UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA (UFBA)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISCIPLINA: MATA02 - CÁLCULO A

UNIDADE I - LISTA DE EXERCÍCIOS

Matemática básica

(1) Calcule a média aritmética, o *m.m.c.* e o *m.d.c.* dos números $36, 40$ e 56.

(2) Qual é a metade de 2^{2019}?

(3) Verdadeiro ou falso?

(a) $2^3 + 2^2 = 2^5$

(b) $\left(4^3\right)^2 \neq 4^9$

(c) $\left(4^3\right)^2 = \left(4^2\right)^3$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[7]{7}$

(e) $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[4]{10}$

(f) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(g) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(h) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

(i) $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{a} + \dfrac{a}{b}$.

(4) Simplifique as seguintes expressões numéricas:

(a) $\left[2^9 \div \left(2^2 \cdot 2\right)^3\right]^{-3} \cdot (0,2)^2$

(b) $\dfrac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^4}$

(c) $\sqrt[3]{8^{-2}} + \sqrt{9}$

(d) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + 2\sqrt{2}$

(e) $\dfrac{a^{-1/9} \cdot \left(a^{-1/3}\right)^2}{-a^2} \div \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2$, para $a \neq 0$

(f) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + \dfrac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$

(g) $\sqrt{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}$

(h) $(x-y)^2 - (x+y)^2$

(i) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$

(j) $16^{0,5} + 8^{-\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-0,2} - (0,25)^2$

(k) $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}$.

(5) Resolva as seguintes equações:

(a) $2 - 5x = 17$

(b) $\dfrac{2 - 1/3}{1 + 1/4} = \dfrac{x}{1 + 2/5}$

(c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(d) $1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$

(e) $\dfrac{2-3x}{x+2} = 0$

(f) $\dfrac{2(x+1)}{3} - \dfrac{3(x+2)}{4} = \dfrac{x+1}{6}$

(g) $(4x-3)(x+1) = 0$

(h) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{1}{6x} - \dfrac{1}{3x}\right)}{\left(\dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{2x}\right)^2 + \dfrac{3}{2x}} = 1.$

(6) Resolva as seguintes equações:

(a) $-2x^2 + 3x + 3 = -2$

(b) $(x-1)(1+x)(4-2x) = 0$

(c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

(d) $70 = \dfrac{x}{1,2} + \dfrac{3x}{(1,2)^2}$.

(7) Encontre a solução dos seguintes sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$.

(8) Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{a+b}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$, (b) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \div \dfrac{a-b}{a+b}$ e (c) $\dfrac{\dfrac{m}{m+n} + \dfrac{n}{m-n}}{\left(\dfrac{n}{m+n} - \dfrac{m}{m-n}\right)} + \dfrac{1 + \dfrac{m}{n}}{1 + \dfrac{(m-n)^2}{4mn}} \cdot \left(1 + \dfrac{n}{m}\right)$.

Revisão: números reais, módulos e inequações

(1) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas!

(a) $\sqrt{4} = \pm 2$;

(b) $\sqrt{x^2} = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = \sqrt{36 + 64}$;

(d) $3 < \dfrac{1}{x} \iff x < \dfrac{1}{3}$, para $x \neq 0$;

(e) $a \leq b \implies a^2 \leq b^2$, para a, b reais quaisquer;

(f) Sejam $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(g) $|a + b| = |a| + |b|, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

(h) Se $x < y$, então $|x - y| = x - y$;

(i) Para $0 < a < b$, vale $0 < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

(2) Resolva as seguintes inequações:

(a) $-5x + 2 \leq 3x + 8$

(b) $(-5x + 2)(x - 2) \leq (3x + 8)(x - 2)$

(c) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x} < 1$

(d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geq 0$

(e) $\dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4x} \geq 0$

(f) $\dfrac{x-2}{x-3} \leq x - 1$

(g) $x^4 - 3x^2 + 2 > x^2 - 1$

(h) $(4x + 7)^{18}(2x + 8) < 0$.

(3) O que está errado na seguinte demonstração?

$$\begin{aligned} \text{Seja } x = y \implies x^2 = xy &\implies x^2 - y^2 = xy - y^2 \\ &\implies (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ &\implies x + y = y \\ &\implies 2y = y \implies 2 = 1. \end{aligned}$$

(4) Mostre que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Em seguida, prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(5) Resolva as seguintes inequações modulares:

(a) $|x-1| - |x+2| \geq 5$

(b) $|x+2| \cdot |x-1| > 3$

(c) $\left|x^2 - 3x\right| > 2\,|x| + 1$

(d) $\left|2x^2 - 1\right| < 1$

(e) $3\,|x-1| + |2x-7| < -\,|x-1|$

(f) $\left|(-x)^2 - 2|x| + 2\right| \leq 1$

(g) $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| < \dfrac{1}{2}$

(h) $\left|4 + \dfrac{1}{x}\right| < 6$

(i) $\dfrac{|x-3|}{x-2} \leq |x-1|$.

Funções reais de uma variável real

(1) Calcule $g(0), g(2), g(\sqrt{2})$ e o domínio de g, onde $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

(2) Simplifique a expressão $\dfrac{f(a+b) - f(a-b)}{ab}$, sendo $f(x) = x^2$ e $ab \neq 0$.

(3) Considere a função $f(x) = \dfrac{x-5}{2-x}$.

(a) Dê o domínio de f, esboce o gráfico de f e encontre a imagem de f;

(b) Determine os valores de x para os quais $f(x) \geq 2$.

(4) Encontre o domínio das seguintes funções:

(a) $a(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}}$

(b) $b(x) = \sqrt{-3 - |x+1|}$

(c) $c(x) = \dfrac{|x-2|}{|x-3| - |x-5|}$

(d) $d(x) = \dfrac{1}{x+1} - \sqrt{-x}$.

(5) Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = x - |x|$

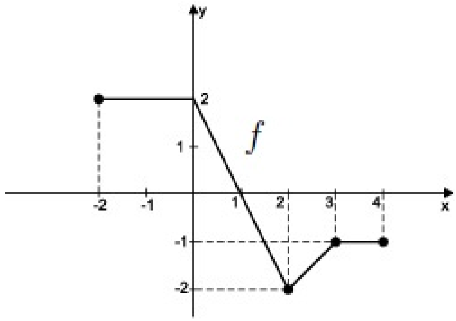
(b) $h(x) = \begin{cases} 10 - 2x, & \text{se } x > 3 \\ (x-2)^2, & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$

(c) $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x+3}$

(d) $l(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(6) Sejam $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ e $g(x) = x + 3$. Podemos dizer que $f = g$? Explique!

(7) Seja f uma função cujo gráfico está esboçado na figura abaixo. A partir deste, esboce os gráficos das funções: $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$, $j(x) = f(x-1)$ e $k(x) = f(x) - 1$.



(8) Quais das seguintes funções são pares? E ímpares?

(a) $a(x) = (x-1)^2$ (b) $b(x) = x|x|$ (c) $c(x) = \sqrt{3x^4 + 2x^2}$.

(9) Determine se o conjunto dado é o gráfico de uma função:

(a) $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = x^2\}$

(b) $\mathrm{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x\}$

(c) $\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$

(d) $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\}$.

(10) Seja $f : A \longrightarrow [-8, 1[$ dada por $f(x) = \dfrac{3+2x}{2-x}$. Determine o conjunto A.

(11) Verifique que $\mathrm{Im}(f) \subset D_g$ e determine a composta $h(x) = g(f(x))$ nos seguintes casos:

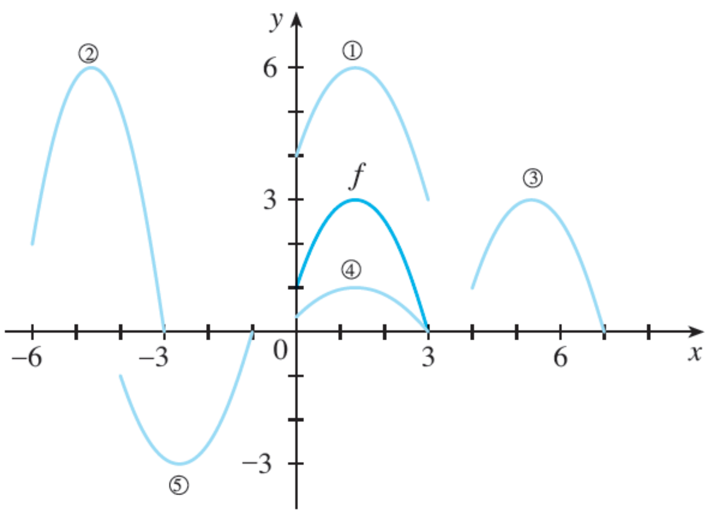
(a) $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$

(b) $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

(12) O gráfico de $y = f(x)$ é dado abaixo. Associe cada equação com o seu gráfico e dê razões para suas escolhas:

(a) $y = f(x-4)$
(b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = f(x)/3$
(d) $y = -f(x+4)$
(e) $y = 2f(x+6)$.



(13) Determine f de modo que $g(f(x)) = x, \ \forall\, x \in D_f$, sendo g dada por $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

(14) Estudos recentes indicam que a temperatura média da superfície da Terra vem aumentando continuamente. Alguns cientistas modelaram a temperatura pela função linear $T = 0,02t + 8,50$ em que T é a temperatura em graus Celsius (^{o}C) e t representa o número de anos desde 1900.

(a) Use a equação para prever a temperatura média global em 2100.

(b) Segundo este modelo, em qual ano a temperatura média global será de $15,5^{o}C$?

(15) Encontre as funções $f \circ g,\ g \circ f,\ g \circ g$ e $f \circ f \circ f$, sendo $f(x) = 1/x$ e $g(x) = x^3 + 2x$.

(16) Determine o valor de a para que as retas dadas sejam paralelas:

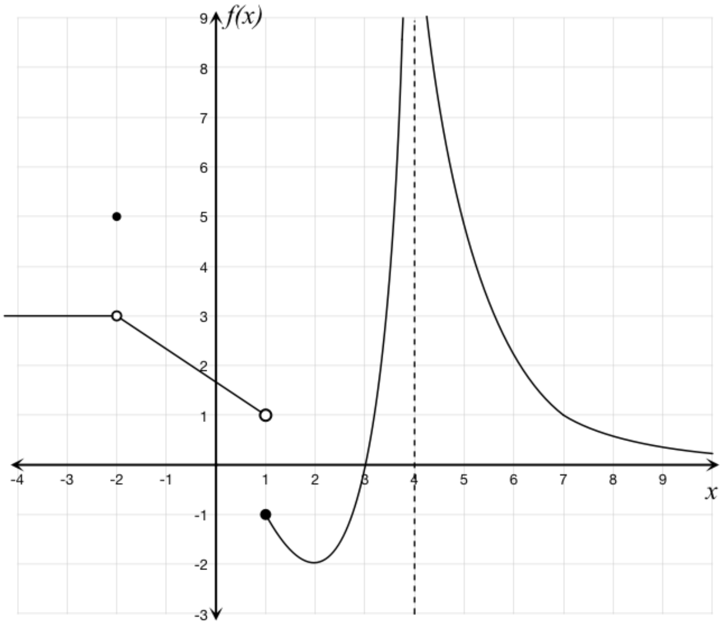
(a) $y = ax$ e $y = 3x - 1$ (b) $2x + y = 1$ e $y = |a|x + 2$ (c) $x + ay = 0$ e $y = 3x + 2$.

(17) Expresse a área de um triângulo equilátero em função do lado.

(18) Seja d a distância de $(0,0)$ a (x,y). Expresse d como função de x, sabendo que (x,y) é um ponto do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

Limites e continuidade: noções intuitiva e formal, e suas propriedades

(1) Considere uma função f cujo gráfico é dado por:



Estime as informações pedidas:

(a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (c) $f(-2)$ (e) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (g) $f(1)$ (i) $f(4)$

(b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (j) $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(2) Explique com suas palavras o que significa

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

Podemos concluir que $f(2) = 5$? Além disso, é possível afirmarmos que $f(2) = 3$?

(3) Explique o significado de

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5.$$

O que você pode dizer sobre o limite de $f(x)$ quando x tende a 1?

(4) Demonstre, pela definição, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} (4x-3) = 5$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0.$

(5) Prove que a reta é contínua, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = ax + b$ é contínua.

(6) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e tal que $|f(x) - 3| \leq 2|x-1|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(7) Prove que a função modular é contínua em toda a reta, ou seja, $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

(8) Calcule, se existir, o valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$, sendo a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Em seguida, esboce o gráfico de f e determine o conjunto dos pontos onde f é contínua.

(9) Determine, se existir, os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \left(-x^2 - 2x + 3\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{7}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x-9}{x-3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

(f) $\lim\limits_{a\to -2} \sqrt{a(a-1)}$

(g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x^3 - x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to -9} (\sqrt{-x} - x - 10)$

(k) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x^3-1}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(o) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

(p) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$

(q) $\lim\limits_{\lambda\to 3} \dfrac{1-\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{\lambda-1}-\lambda}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{x+2}}{x+3x^2}$

(s) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

(t) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

(u) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{x-a}$

(v) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

(w) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

(x) $\lim\limits_{x\to 2} \left|\dfrac{x^2-4}{2-x}\right|$

(y) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

(z) $\lim\limits_{t\to 0} \left[\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}} - \dfrac{1}{t}\right].$

(10) Obtenha o conjunto dos pontos de continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases}.$

(11) Verifique se $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que a função seja contínua no ponto p:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ \lambda, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \ p = 0$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \lambda, & x = 2 \end{cases}, \ p = 2.$

(12) Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(13) Existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

(14) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Verifique que $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua em $x = 1$? Por que?

(15) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

(a) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$;

(b) O seguinte cálculo está correto? Justifique!

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot f(x)}{x} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

(c) Mostre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$.

(16) Seja f uma função que satisfaz $-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\forall\ x \neq 1$. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$.

(17) Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq \sqrt{2}(x - 1)^2$, para todo x suficientemente próximo de 1. Mostre que f é contínua em $x = 1$.

(18) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando ou apresentando um contra-exemplo:

(a) Se o limite de f em x_0 existe, então f está definida em x_0;

(b) Se f é descontínua em x_0, então os limites laterais de f em x_0 são infinitos;

(c) Se f é contínua, então $|f|$ é contínua;

(d) Se $|f|$ é contínua, então f é contínua;

(e) $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \Longrightarrow \quad f$ é contínua em a.

(19) Determine constantes A e B reais de modo que a função abaixo seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ Ax^2 - Bx + 3, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - A + B, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

(20) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixos, suponha que vale $|a + bx + cx^2| \leq |x|^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Prove que $a = b = c = 0$.

(21) Na Teoria da Relatividade, a *fórmula da contração de Lorentz*

$$L(v) = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim\limits_{v \to c^-} L(v)$ e interprete o resultado (em termos físicos). Por que é necessário o limite à esquerda?

(22) **Desafio:** Seja $f(x) = x^3 - 2$.

(a) Encontre um número real $\delta > 0$ tal que, se

$$0 < |x - 2| < \delta, \text{ então } |f(x) - 6| < \epsilon, \text{ com } \epsilon = 1.$$

(b) Repita o exercício anterior com $\epsilon = 0,1$ e $\epsilon = 0,01$;

(c) Encontre um $\delta > 0$ para um $\epsilon > 0$ arbitrário, e conclua que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$.

Limites trigonométricos e o 1º limite fundamental

(1) Mostre que, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes identidades trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$

(b) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

(c) $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(d) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(e) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

(f) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

(2) Verifique que, para todo $x \in \mathbb{R}$ com $\cos x \neq 0$, tem-se $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

(3) Determine o domínio e esboce o gráfico das funções cotangente e cossecante.

(4) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, verifique que $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$. Utilize esse resultado para provar que a função cosseno é contínua.

(5) Prove, pela definição, que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

(6) Calcule, se existir, o valor dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cossec} x$

(f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$

(i) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1}$.

Limites no infinito e limites infinitos

(1) Explique o significado dos seguintes limites: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(2) Calcule o valor dos seguintes limites:

(α) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{2 - x + 5x^2 - 4x^3}$

(β) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

(γ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

(δ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4x + 4}$

(ϵ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 1}$

(ζ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+3}$

(η) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]$

(θ) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{5 + \dfrac{2}{x}}$

(ι) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+3}}$

(κ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

(λ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(μ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

(ν) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x^4 - 3x + 2\right]$

(ξ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

(o) $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{1}{u^2 - 3u + 2}$

(π) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1}$

(ρ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[5 - 4x + x^2 - x^5\right]$

(σ) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+3x}\right)$

(τ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

(υ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{3-x}$

(ϕ) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^2 - x}$

(χ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

(ψ) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

(ω) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$.

(3) **Desafio:** Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x-1}\right)$.

(4) Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, onde $n > 0$ é um natural.

(5) Na Teoria da Relatividade, a massa m de uma partícula com velocidade v é dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso ($v = 0$) e c é a velocidade da luz ($c \approx 300.000\ km/s$). O que acontece quando $v \longrightarrow c^-$? Por que é necessário o limite à esquerda?

(6) Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{3x-11}{|x|-3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$.

(7) Dê exemplos de funções f e g tais que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} (f(x) - g(x)) = 1.$$

(8) Dada a função $f(x) = \dfrac{-5x^2+50x+375}{x^2-20x+75}$, faça o que se pede:

(a) Determine onde f é descontínua, e qual o seu comportamento nestas descontinuidades;

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

(c) Determine onde f intercepta os eixos x e y;

(d) Com base nessas informações, tente esboçar o gráfico de f.

(9) Use limites para provar que as seguintes desigualdades são válidas:

(a) $\dfrac{x^2+1}{(1-x)^2} > 3700$ para todo x suficientemente próximo de 1 (exceto $x = 1$);

(b) $1,95 < \dfrac{2x+75}{x} < 2,1$ para todo x suficientemente grande.

(10) A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa à uma distância r do centro do planeta Terra é dada por

$$F(r) = \begin{cases} GMrR^{-3}, & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2}, & \text{se } r \geq R \end{cases},$$

onde M é a massa da Terra, R é seu raio e G é a constante gravitacional ($G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$).

(a) Qual é o domínio de F? Podemos dizer que F é uma função contínua de r?

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{r\to\infty} F(r)$ e interprete seu significado físico.

Limites logarítmicos e exponenciais, e o T.V.I.

(1) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $a(x) = 7^x$ (c) $c(x) = \log_3(x)$ (e) $e(x) = |\ln x|$

(b) $b(x) = (0,2017)^x$ (d) $d(x) = \ln|x|$ (f) $f(x) = |\ln|x||$.

(2) A função $f(x) = x^5 + x + 1$ possui alguma raiz real?

(3) Mostre que a equação $\operatorname{sen} x + 2\cos x = x^2$ possui solução no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(4) Utilize o T.V.I. para mostrar que:

(a) o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 4$ tem alguma raiz real no intervalo $[1, 2]$;

(b) a equação $2^x + 3 = 4x$ tem pelo menos duas soluções reais.

(5) Prove que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

(6) As funções seno e cosseno hiperbólicos são definidos por $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, respectivamente. Calcule o limite dessas funções para $x \to \pm\infty$ e esboce o gráfico das mesmas.

(7) Determine onde as funções abaixo são contínuas:

(a) $a(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$

(b) $b(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+5}}{1 - e^x}$

(c) $c(x) = \dfrac{x^3}{\ln|x|}$

(d) $d(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$.

(8) Após um objeto ser retirado do forno, sua temperatura T (em ^oC) variou ao longo do tempo t (em min) de acordo com a lei $T(t) = 28 + 52e^{-\frac{t}{15}}$. Ache a temperatura inicial do objeto e para qual valor ela converge após um tempo suficientemente longo.

(9) Aplique a definição para provar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$.

(10) Calcule os seguintes limites, caso existam:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} [2^x - 3^x]$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 2^x}{1 - 3^x}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+3)]$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^x$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^x$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}\ln(x)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{5}{x}}}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 + \ln x\right)$

(p) $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(2 - x)$

(q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-4}{x-1}\right)^{x+3}$

(r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

(11) Mostre que, $\forall\ x \geq 1$, vale a igualdade $\ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\right) = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

(12) Para calcular o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{(x^2-1)}-1}{x-1}$, um aluno fez a seguinte mudança de variável:

$$h = x^2 - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = h+1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{h+1}.$$

Qual dessas duas possibilidades de x ele deve considerar? Em outras palavras, qual dos limites abaixo está correto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x^2-1)}-1}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{\sqrt{h+1}-1} \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{(x^2-1)}-1}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{-\sqrt{h+1}-1} \ ?$$

Explique e calcule o valor do respectivo limite.

(13) Aplique o teorema do confronto (ou sanduíche) para calcular os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \cos(\ln x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(14) **Desafio:** Utilize o teorema do confronto para avaliar o seguinte limite:

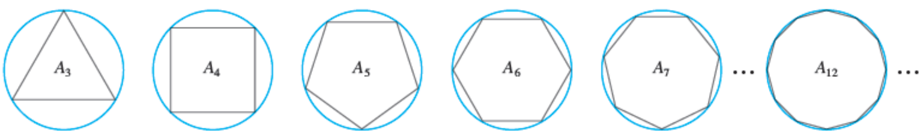
$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{x^2}{e^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}+1} \right].$$

(15) O *método da exaustão*, considerado como o precursor dos métodos de cálculo, é um método para se encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Arquimedes usou tal método para calcular uma aproximação de π, preenchendo o círculo com polígonos de um número cada vez maior de lados. Para exemplificar esse método, faça o seguinte:

(a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito em um círculo de raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central $\dfrac{2\pi}{n}$, mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

(b) Verifique que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} A_n = \pi r^2$ e interprete!



GABARITO

Matemática básica

(1) Média aritmética $= 44$, $m.m.c.(36, 40, 56) = 2520$ e $m.d.c.(36, 40, 56) = 4$; **(2)** 2^{2018};

(3) $(a)\ F,\ (b)\ V,\ (c)\ V,\ (d)\ F,\ (e)\ V,\ (f)\ V,\ (g)\ F,\ (h)\ F,\ (i)\ F;$

(4) $(a)\ 0,04,\ (b)\ 3 \cdot 10^{-2},\ (c)\ \frac{13}{4},\ (d)\ \sqrt{2},\ (e)\ -a^{-7/9},\ (f)\ 10,\ (g)\ 2,\ (h)\ -4xy,\ (i)\ \frac{65}{4},\ (j)\ \frac{103}{16},$ $(k)\ \frac{8}{5}$; **(5)** $(a)\ x = -3,\ (b)\ x = \frac{28}{15},\ (c)\ x = 5,\ (d)\ x = -1,\ (e)\ \frac{2}{3},\ (f)\ -4,\ (g)\ x \in \left\{-1, \frac{3}{4}\right\},$ $(h)\ -\frac{4}{3}$; **(6)** $(a)\ x \in \left\{-1, \frac{5}{2}\right\},\ (b)\ x \in \{-1, 1, 2\},\ (c)\ x = \pm 2,\ (d)\ x = 24$; **(7)** $(a)\ x = 1,\ y = -1,$ $(b)\ x = y = \frac{1}{4}$; **(8)** $(a)\ ab,\ (b)\ \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ e $(c)\ 3$.

Revisão: números reais, módulos e inequações

(1) A única alternativa verdadeira é a letra (i). Para ver isso, note que $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.

(2) Denotando por $\mathcal{S}$ o conjunto solução das inequações, temos:

(a) $\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

(b) $\mathcal{S} = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [2, +\infty)$

(c) $\mathcal{S} = \left(-\infty, 1 - \sqrt{7}\right) \cup \left(0, 1 + \sqrt{7}\right)$

(d) $\mathcal{S} = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$

(e) $\mathcal{S} = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

(f) $\mathcal{S} = \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 3\right) \cup \left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

(g) $\mathcal{S} = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup (-1, 1) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

(h) $\mathcal{S} = (-\infty, -4)$.

(4) *Dica:* Após provar, por absurdo, que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, use este fato para demonstrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(5) Denotando por $\mathcal{S}$ o conjunto solução das inequações modulares, temos:

(a) $\mathcal{S} = \emptyset$

(b) $\mathcal{S} = \left(-\infty, -\frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$

(c) $\mathcal{S} = \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

(d) $\mathcal{S} = (-1, 0) \cup (0, 1)$

(e) $\mathcal{S} = \emptyset$

(f) $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$

(g) $\mathcal{S} = \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$

(h) $\mathcal{S} = \left(-\infty, -\frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

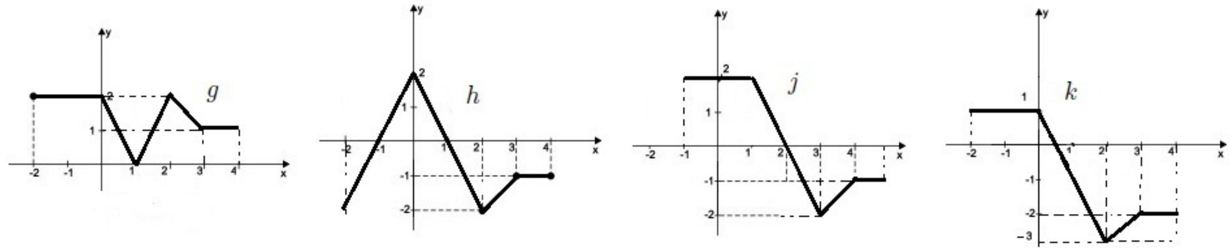
(i) $\mathcal{S} = (-\infty, 2) \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

Funções reais de uma variável real

(2) 4; **(3)** $(a)\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ (b)\ (2, 3]$;

(4) $(a)\ \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty),\ (b)\ \emptyset,\ (c)\ \mathbb{R} \setminus \{4\}$ e $(d)\ (-\infty, 0] \setminus \{-1\}$; **(6)** Não, pois $D_f \neq D_g$.

(7)



(8) (a) Não é par nem ímpar, (b) Ímpar e (c) Par; **(9)** (a) É gráfico de função, (b) Não é gráfico de função, (c) Não é gráfico de função, (d) É gráfico de função; **(10)** $A = \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[\dfrac{19}{6}, \infty\right)$; **(11)** (a) $h(x) = 3x+7$, (b) $h(x) = \sqrt{2+x^2}$, (c) $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$; **(13)** $f(x) = \dfrac{x-2}{1-x}$; **(14)** (a) $11,5^{o}C$ e (b) Ano 2250; **(16)** (a) $a = 3$, (c) $a = -\dfrac{1}{3}$; **(17)** $A(l) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2$; **(18)** $d = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{|x|}$.

Limites e continuidade: noções intuitiva e formal, e suas propriedades

(1) (a) 3, (b) 3, (c) 5, (d) 1, (e) -1, (f) não existe, (g) -1, (h) ∞, (i) não existe, (j) 0;

(6) 3; **(7)** Utilize a desigualdade $||a| - |b|| \leq |a-b|$, que é válida para todos $a, b \in \mathbb{R}$;

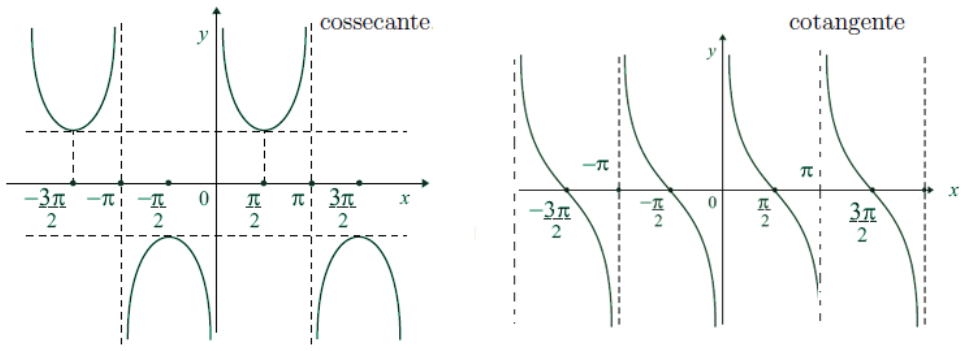
(8) O limite não existe e a função f é contínua no conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(9) (a) 4, (b) $\sqrt{7}$, (c) -5, (d) 3, (e) 0, (f) $\sqrt{6}$, (g) $\dfrac{1}{5}$, (h) $-\dfrac{1}{3}$, (i) -1, (j) 2, (k) $-\infty$, (l) 1, (m) $\dfrac{1}{2}$, (n) Não existe, (o) 8, (p) $\dfrac{27}{80}$, (q) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$, (r) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, (s) 2, (t) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, (u) 0 $(a>0)$ ou $\nexists$ $(a=0)$, (v) $-\dfrac{1}{4}$, (w) 3, (x) 4, (y) Não existe, (z) $-\dfrac{1}{2}$;

(10) (a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, (b) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; **(11)** (a) Não existe $\lambda \in \mathbb{R}$, (b) $\lambda = 12$; **(13)** $a = 15$ e o limite vale -1; **(14)** Não é contínua em $x = 1$; **(15)** (a) 0, (b) Não; **(16)** 2; **(18)** A única alternativa verdadeira é a letra (c); **(19)** $A = B = \dfrac{1}{2}$; **(22)** (a) $\delta = \min\left\{2 - \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9} - 2\right\}$.

Limites trigonométricos e o 1º limite fundamental

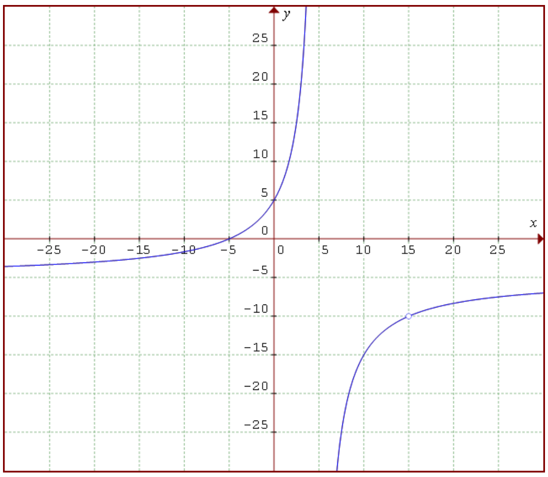
(3)



(6) (a) 3, (b) 0, (c) 1, (d) 0, (e) 1, (f) -1, (g) 1, (h) 0, (i) -1, (j) 0, (k) $\frac{3}{4}$, (l) $2p$, (m) $-\pi$.

Limites no infinito e limites infinitos

(2) (α) $-\frac{1}{2}$, (β) 0, (γ) ∞, (δ) ∞, (ϵ) 0, (ζ) 2, (η) 5, (θ) $\sqrt[3]{5}$, (ι) 0, (κ) $\frac{1}{3}$, (λ) 1, (μ) 0, (ν) ∞, (ξ) $\frac{1}{3}$, (o) não existe, (π) $\frac{1}{7}$, (ρ) ∞, (σ) $-\frac{3}{2}$, (τ) 0, (υ) $-\infty$, (ϕ) $+\infty$, (χ) $+\infty$, (ψ) ∞, (ω) $-\infty$; **(3)** $\frac{1}{2}$, **(5)** A massa se torna arbitrariamente grande; **(6)** (a) Não existe, (b) Não existe, (c) $\frac{1}{6}$; **(8)** (a) Descontinuidade removível em $x = 15$ e descontinuidade infinita em $x = 5$, (b) Ambos dão -5, (c) Nos pontos $(-5, 0)$ e $(0, 5)$; (d) Ver o gráfico abaixo e note que há um buraco em $x = 15$:



(9) (a) Mostre que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{(1-x)^2} = +\infty$, (b) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+75}{x} = 2$.

Limites logarítmicos e exponenciais, e o T.V.I.

(2) Note que $f(0) > 0$ e $f(-1) < 0$;

(4) (b) Fazendo $f(x) = 2^x + 3 - 4x$, observe que $f(1) > 0$, $f(2) < 0$ e $f(4) > 0$;

(7) (a) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, (b) $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq -5 \text{ e } x \neq 0\}$, (c) $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 1\}$, (d) $[0, 4]$;

(8) $T(0) = 80^oC$ e 28^oC;

(9) Note que $\log_2 x > \epsilon = \log_2\ (2^\epsilon)$ e utilize que a função $f(x) = \log_2 x$ é crescente;

(10) (a) $-\infty$, (b) 0, (c) 0, (d) $\ln(2)$, (e) e^4, (f) ∞, (g) e^6, (h) e^{-6}, (i) e, (j) e^{-2}, (k) $\ln(5)$, (l) $-\infty$, (m) $3\ln(2)$, (n) $\frac{1}{2}$, (o) $-\infty$, (p) $-\infty$, (q) e^{-3}, (r) e^4; **(12)** 2; **(13)** (a) 0, (b) 0, (c) 1;

(14) 1; **(15)** (a) Considere o triângulo isósceles de lado r e base como sendo um lado do polígono.

`Última atualização: 07/02/2019`