

Hoofdstuk II: rationale functies

www.karelappeltans.be

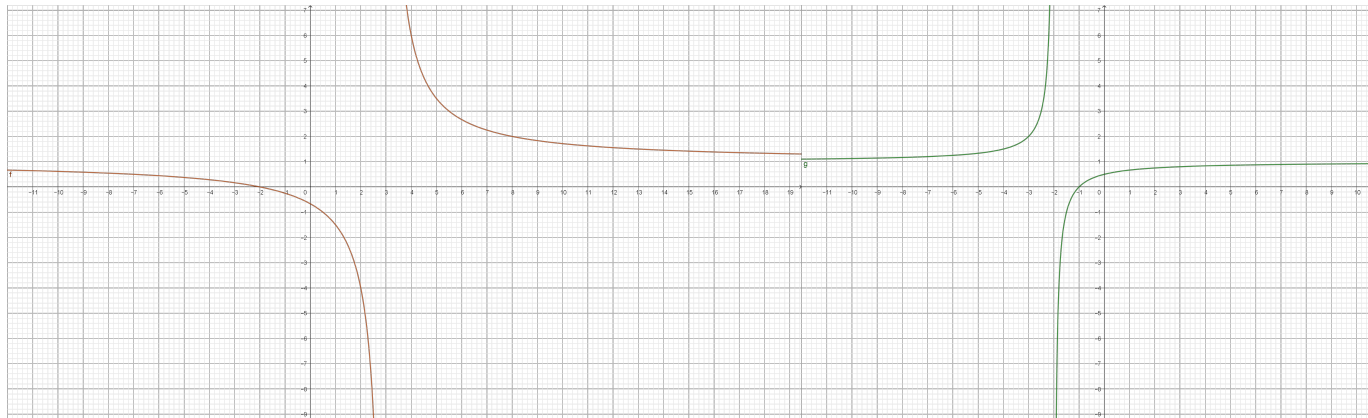
October 6, 2023

Contents

1	voorbeelden	2
2	Definitie	2
3	basisfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$	3
3.1	bespreking	3
3.2	homografische functies: transformaties van $f(x) = \frac{1}{x}$	3
4	domein	4
5	nulpunten	4
6	tekentabel	5
7	ongelijkheden	5
8	asymptoten en perforaties	6
8.1	begripsvorming	6
8.2	overzicht	7
9	toepassingen	7
10	Oefeningen	7
11	taken	9

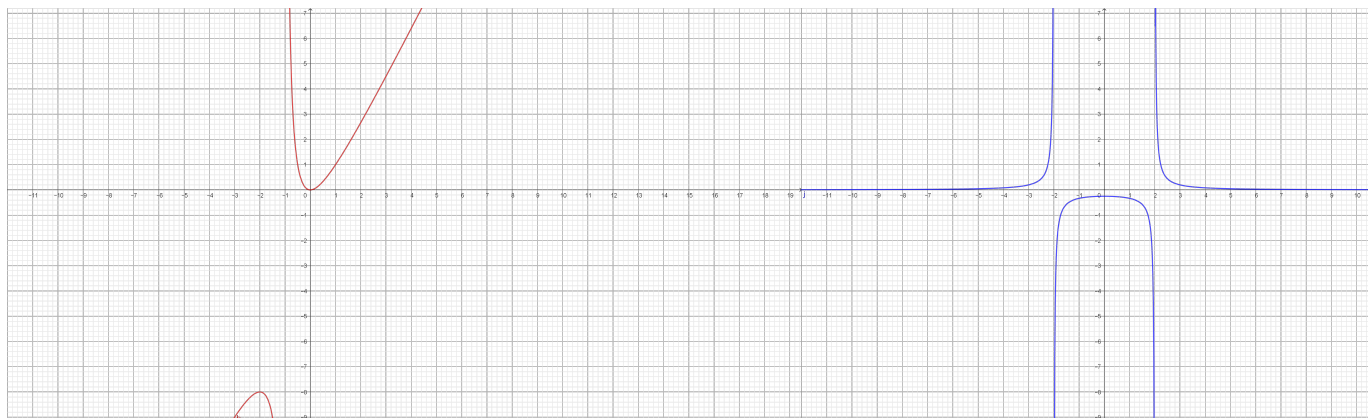
1 voorbeelden

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \quad h(x) = \frac{2x^2}{x+1} \quad j(x) = \frac{1}{x^2-4}$$



(a) $f(x)$

(b) $g(x)$



(c) $h(x)$

(d) $j(x)$

Figure 1: voorbeelden rationale functies

2 Definitie

Een rationale functie is een breuk van twee veeltermfuncties met $gr(N) \geq 1$

3 basisfunctie $f(x) = \frac{1}{x}$

3.1 bespreking

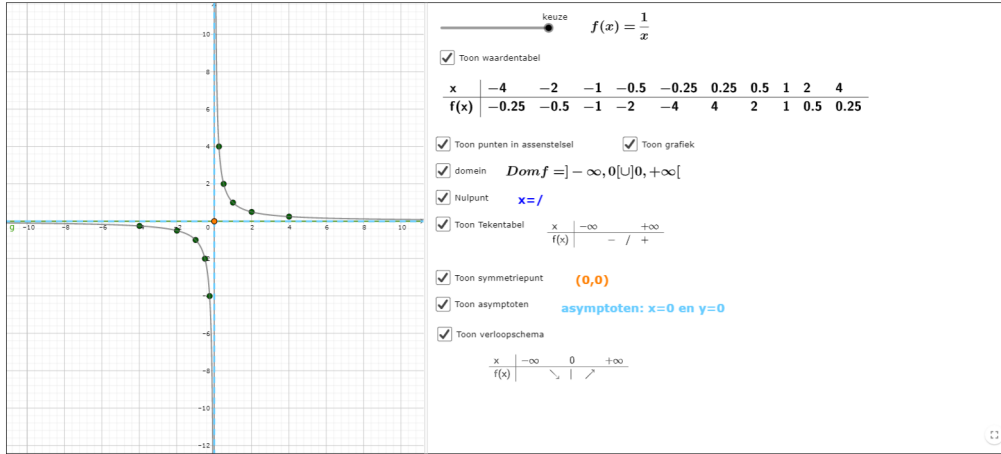


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG>

3.2 homografische functies: transformaties van $f(x) = \frac{1}{x}$

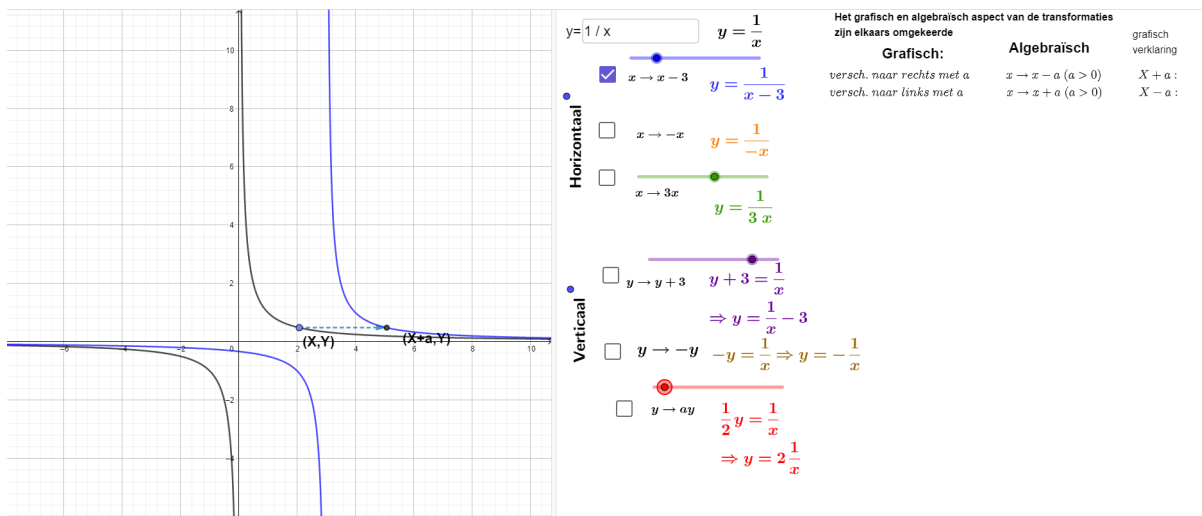


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

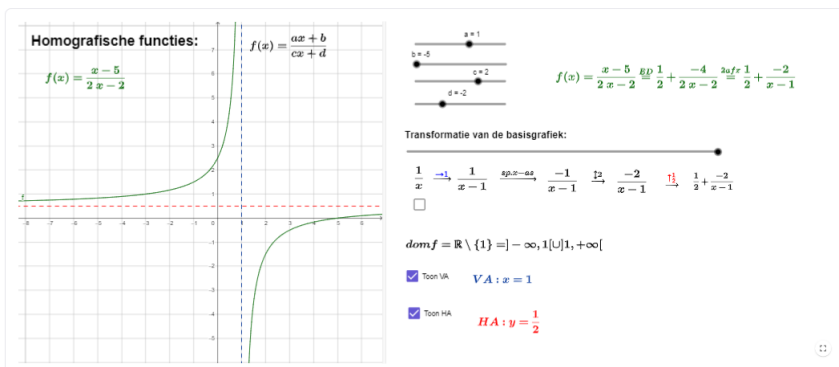


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/DaRnenDn>

4 domein

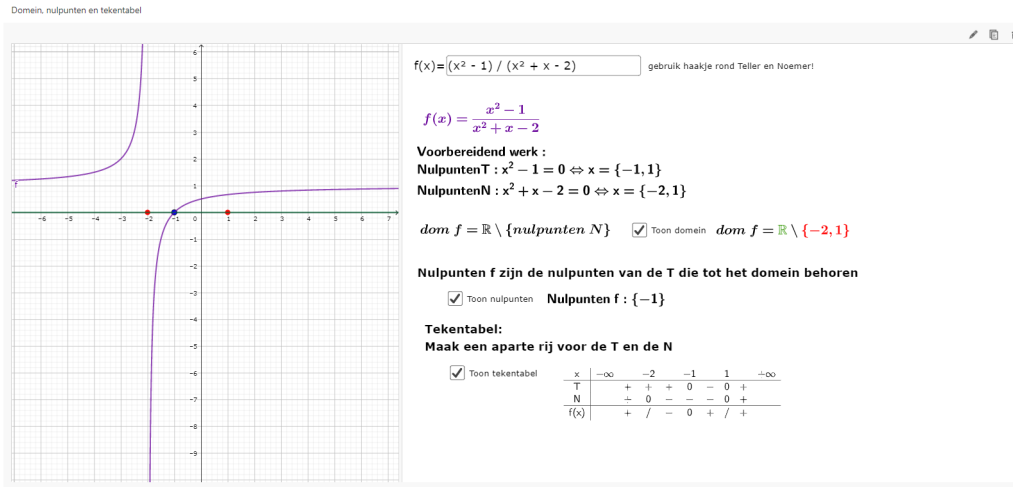


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

5 nulpunten

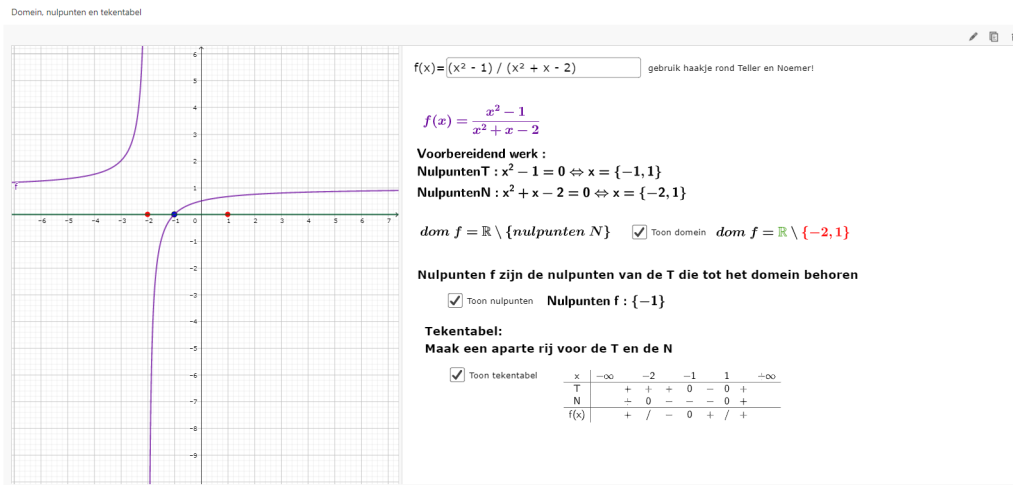


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

6 tekentabel

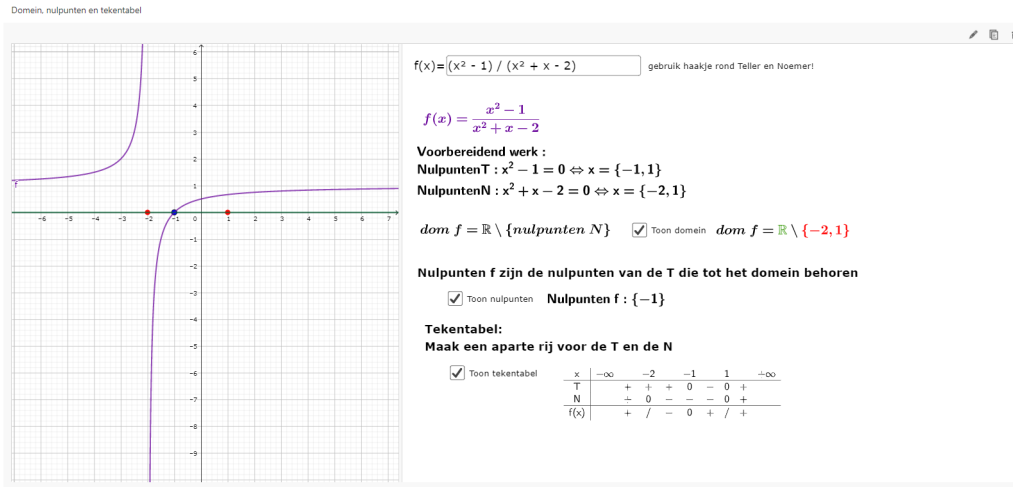


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

7 ongelijkheden

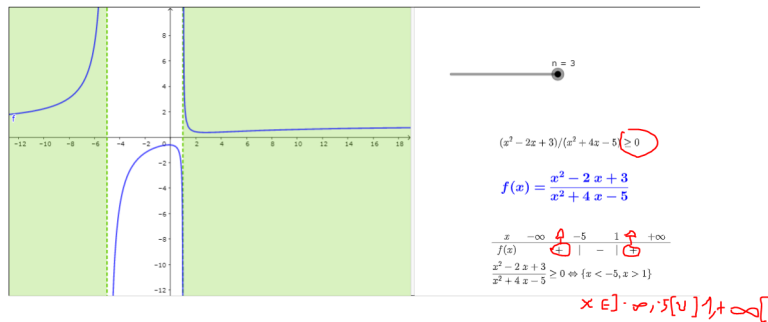


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdK>

8 asymptoten en perforaties

8.1 begripsvorming

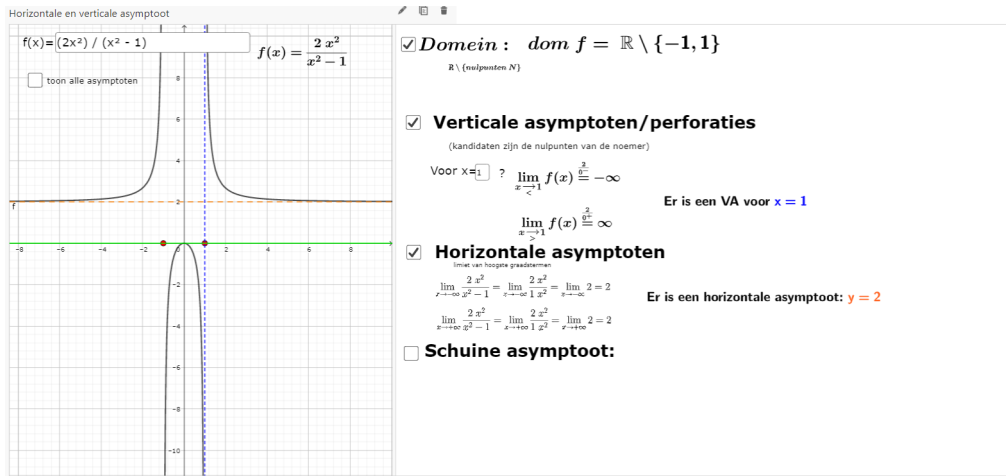


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

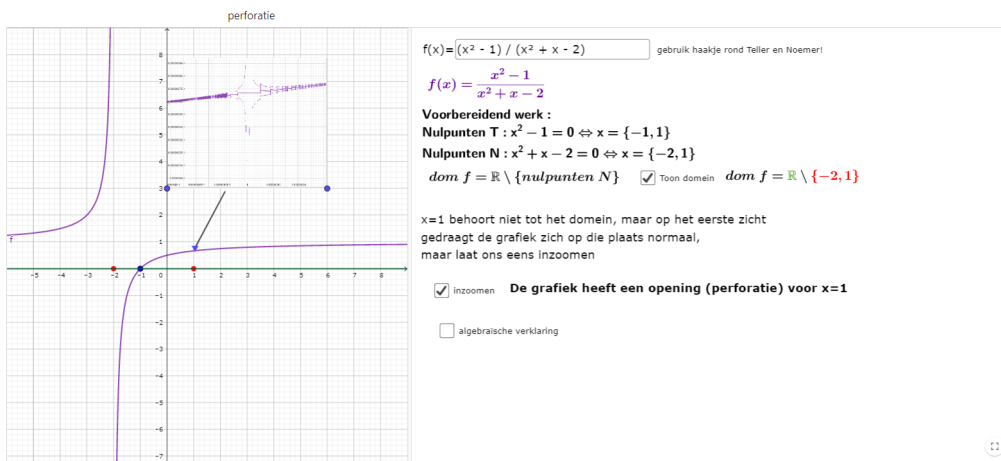


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

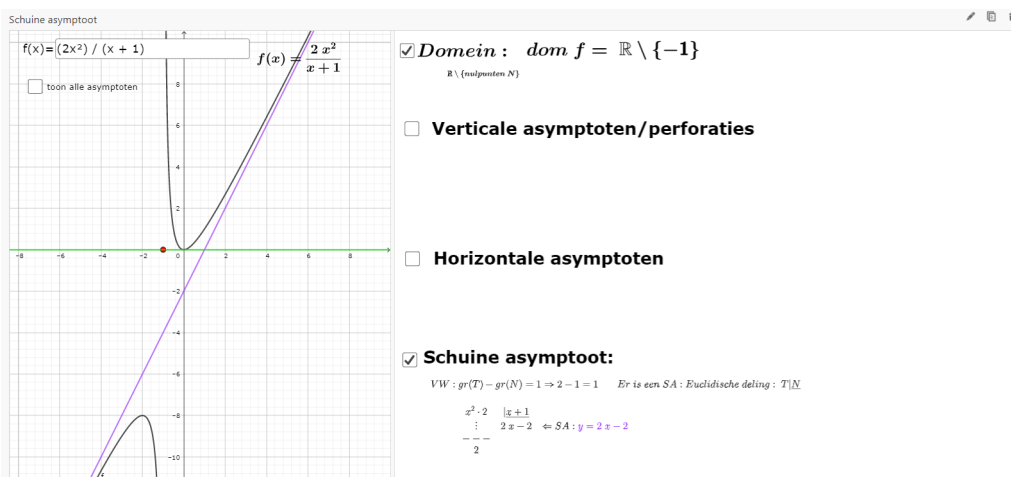


Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

8.2 overzicht

VA en perforatie

kandidaten: nulpunten noemer

VA: $x = a$ als na vereenvoudiging $(x-a)$ nog steeds een factor van de Noemer is.

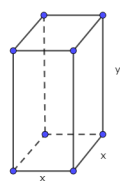
perforatie: $P(a,g(a))$ als na vereenvoudiging $(x-a)$ geen factor meer is van de Noemer.

HA en SA

HA: $y = b$ als $gr(T) \leq gr(N)$

SA: $y = ax + b$ als $gr(T) - gr(N) = 1$

9 toepassingen



De inhoud van een doos met vierkante bodem heeft een inhoud van 125 cm^3
Bepaal de afmetingen zodat 150 cm^2 materiaal gebruikt wordt voor de wanden

1) keuze onbekenden

2) Verband tussen de onbekenden uit het gegeven

$$x^2 \cdot y = 125 \Rightarrow y = \frac{125}{x^2}$$

3) Het gevraagde wiskundig uitdrukken

$$\begin{aligned} opp &= 2x^2 + 4xy = 150 \\ &\Rightarrow 2x^2 + 4x \cdot \frac{125}{x^2} = 150 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + \frac{500}{x} = 150 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^3 - 150x + 500}{x} = 0 \end{aligned}$$

4) vergelijking oplossen

$$x^3 - 75x + 250 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -75 & +250 & \\ 5 & 5 & 25 & -250 & \\ \hline 1 & 5 & -50 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 5)(x^2 + 5x - 50) = 0$$

$$s = -5, y = -50 \Rightarrow x_1 = -10; x_2 = 5$$

5) Formuleer het antwoord

$$x = 5 \text{ cm en } y = \frac{125}{25} = 5 \text{ cm}$$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/sz7kypag>

10 Oefeningen

- Welk functievoorschrift bekom je als je onderstaande transformaties uitvoert op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$?
 - horizontale verschuiving 3 naar rechts, horizontale inkrimping met factor 2, spiegeling om x-as, verticale verschuiving 2 naar onder
 - verticale uitrekking met factor 2, 3 naar links en 1 omhoog
- Schets zonder gebruik te maken van ICT, maar wel m.b.v. transformaties de grafiek van volgende homografische functies:
 - $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$
 - $f(x) = \frac{3x-4}{-x+1}$
 - $f(x) = \frac{9x-8}{3x-6}$
 - $f(x) = \frac{-x}{x-2}$
- Gegeven is de functie f met voorschrift $y = \frac{4x+1}{2x-1}$
 - Welke transformaties zetten de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ om in de grafiek van f?
 - Welke rechten zijn asymptoten van de grafiek van f?
 - Teken de grafiek van f
 - Bepaal het domein, het bereik en de nulpunten van f
 - Los de ongelijkheid $f(x) > 3$ op met behulp van de grafiek van f

4. Bepaal domein, nulpunten en teken tabel van

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 8}{x - 2}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 + 2x - 15}$

(c) $f(x) = \frac{x - 6}{x^3 - 7x^2 - 6x + 72}$

(d) $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 5}{x^2 + 4x - 5}$

5. Los de volgende ongelijkheden op

(a) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} < 0$

(b) $\frac{x^2 + 9}{x^3 + 12x^2 + 11x} \leq \frac{1}{x}$

(c) $\frac{x}{x - 1} \geq \frac{20}{(x - 1)^2}$

(d) $\frac{(4 - x^2)(3x^2 - 9x + 6)}{2x + 4} \leq 0$

6. Bepaal de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van de rationale functies van oefening 2

7. Bepaal de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van de rationale functies van oefening 4

8. Bepaal domein en de eventuele asymptoten en/of perforaties van de grafiek van volgende rationale functies:

(a) $y = f(x) = \frac{(x + 5)^3(2x + 4)}{(x + 5)^2(x + 2)^3}$

(b) $y = f(x) = \frac{(x - 1)^3(-x + 3)}{(x - 1)^4}$

9. Bepaal de waarde van b opdat de functie f met als functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{x^3 + (2 + 2b)x^2 + (4b + b^2)x + 2b^2}$ een VA heeft met vergelijking $x = -3$ (A. $b = 3$)

10. Bepaal de waarde van de parameters a, b en c als je weet dat de grafiek van $f(x) = \frac{3(x - 1)^2}{ax^2 + bx + c}$ een HA heeft voor $y = 3$, een VA heeft voor $x = -2$ en door het punt $P(3, \frac{12}{5})$ gaat.

11. Bepaal de waarde van de parameters a en b als je weet dat de grafiek van $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{2x - 5}$ een SA heeft met als vergelijking $y = 2x - 5$

12. Bepaal het voorschrift van een mogelijke rationale functie met een grafiek met volgende kenmerken:

(a) VA $x = 3$; nulpunt $x = 2$; HA $y = 4$

(b) geen nulpunten en asymptoten, maar een perforatiepunt $P(2, 3)$

(c) SA $y = 2x + 3$, np $x = 1$, VA $x = -2$

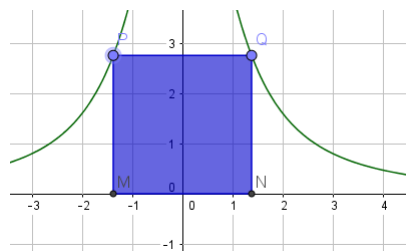
(d) even functie, met o.a. VA $x = -2$, perforatie $P(1, -1)$

13. Stellen f(x) en g(x) dezelfde functies voor? Verklaar uw antwoord

(a) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ en $g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)^2}$ en $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$

14. Bepaal de afmetingen van de rechthoek zodat deze een oppervlakte heeft van 4 eenheden. De hoekpunten P en Q liggen op de grafiek van $f(x) = \frac{8x}{1 + x^2}$.



15. Een internetprovider rekent 50 euro aansluitingskosten aan en daarna een maandelijks abonnement van 23 euro.
- (a) Geef een functievoorschrift voor de gemiddelde maandelijkse kostprijs
 - (b) Na hoeveel maanden is er een gemiddelde kostprijs van 30 euro?
 - (c) Geef de betekenis van de HA van de grafiek in deze context.
16. In een grote ton wordt 100 l gemengd met 5 kg zout. Nu wordt per minuut 10 l water toegevoegd en 1 kg zout.
- (a) vergelijk de concentratie zout na 12 min met de beginconcentratie (A. $C(t) = \frac{5+t}{100+10t}$, $\frac{17}{120} > \frac{1}{20}$)
 - (b) Bepaal de concentratie op lange termijn. (A. $\frac{1}{10}$)

11 taken

1. rationale functies