第一章 极限与连续

1.1数列极限的概念与性质

【内容分析】

本节主要在理解数列的概念的基础上，掌握常见数列的敛散性。对收敛数列的性质，数列的抽象定义，专科阶段只做了解。

【教学内容】

1.数列的概念与性质

2.数列极限的概念与性质

3. 几种常见数列的敛散性

4. 无穷级数的基本概念

【重难点】

重点是数列极限的概念，常见数列的敛散性

难点是常见的发散数列及类型。

【知识目标】

1. 了解极限的性质；

2.理解极限概念；

3.掌握几种常见数列的敛散性

4.在实际应用中，了解无穷级数的基本概念

【能力目标】

1. 会借助图像分析常见数列的单调性和有界性

2. 能借助软件画出数列图像并能分析常见数列的敛散

3.能运用极限性质进行简单的四则运算

4.尝试用$\varepsilon-\delta$*语言*表述数列极限的概念

【过程和方法目标】

1.通过微课和阅读资料了解微积分发展历程及现代应用，理解极限思想的哲学思辨。

2.复习数列的概念和性质，指出高中和大学的区别；并对常见数列、及他们的单调性和有界性做归纳。

3.介绍数列的敛散性，即数列极限的概念。过程借助GGB，画出数列图像并能分析常见数列的敛散，掌握图像分析的方法，培养几何直观。并适当介绍数列极限的概念$\varepsilon-\delta$语言，具有初步的数学符号语言，培养抽象。

4.以税收中的乘数效应，简单介绍几何级数的相关概念。

【情感态度和价值观目标】

1.把握数列的函数本质，以及其特殊性，培养从一般到特殊，从特殊到一般的数学思维品质。

2.借助数学工具GGB分析数列有界性、单调性、敛散性的过程中，培养学生数据分析、数学应用、数学的工具化意识，既有几何直观又有抽象思维。

3.在问题驱动、解决数学建模项目中，激发学生对数学的学习兴趣，具有数学视野。

4.在组织启发、讨论、探究、实验等活动中，培养学生自主、探究、反思的学习习惯；增加交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质，增强诚实认真的道德品质 。

1.1.1数列的概念与性质

一、数列的概念与性质

问题：还记得高中数学的数列的概念吗？如何表示？

1.数列：按照一定的次序排列的一列数叫数列.

①常用$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$等表示. $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$. 下标$1,2,3,\cdots,n,\cdots$叫数列的项数. a_n

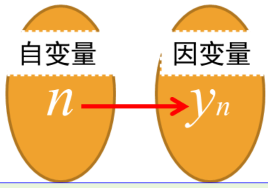
叫项，其中a_1是第一项，叫首项，a_n是第n项，也叫通项或一般项. 项数和项之间建立了函数关系，项数n是自变量，a_n是因变量,数列是个特殊的函数，他的定义域是正整数集或其子集.

②我们还知道，有有限个数的数列叫有限（有穷）数列，无限个数的数列叫无限（无穷）数列，例如，$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$首项$a_1=1$，$a_n=n$即通项公式，是无限数列，

数学中常用英文字母表中前面的表示常量，后边的表示变量，大学通常用$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$表示数列，更能体现数列是特殊的函数.另大学中的数列没特别说明，一般指无限数列.

数列$\{y_n\}$: $\boxed{y_1}$ ，$\boxed{y_2}$， y_3 ，… ，$\boxed{y_n}$,⋯.

第一项　第二项　第n项，通项或一般项

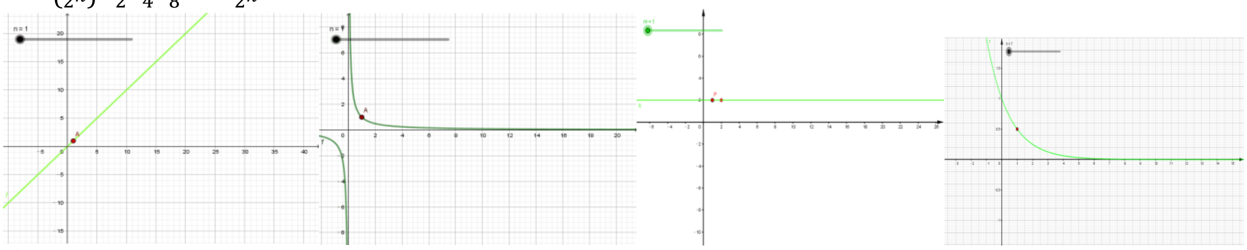


数列是特殊的函数
①满足函数的所有通性；
② 自变量是n,因变量是y_n; 定义域是正整数集（高中的数列分有穷和无穷数列，大学里说到数列一般指无穷数列）；
③数列的图像是散点图（可用Excel进行数学实验）；
④数列一般记作整标函数：$y_n=f(n)(n=1,2,3,\dots)$.

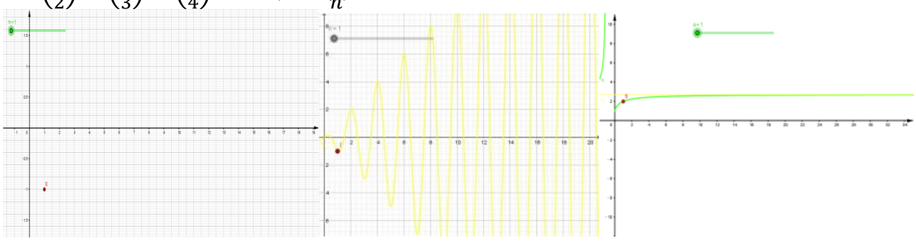
二、常见的数列

【数学探究】认识常见的数列，试着用Excel进行实验，画出下列数列的图像(散点图),并重点分析数列的有界性和单调性.

① $\{n\}: 1,2,3,\cdots,n,\cdots$　　自然数列
② $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$　　调和数列
③ $\{a\}: a,a,a,\cdots,a,\cdots$　　常数列
④ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$　　无穷递缩等比数列



⑤ $\{(-1)^n\}: -1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$　（常）震荡数列
⑥ $\{n(-1)^n\}: -n,n,-n,\cdots,n(-1)^n,\cdots$　（无穷）震荡数列
⑦ $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$: $2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdots,(1+\frac{1}{n})^n,\cdots$　欧拉数列

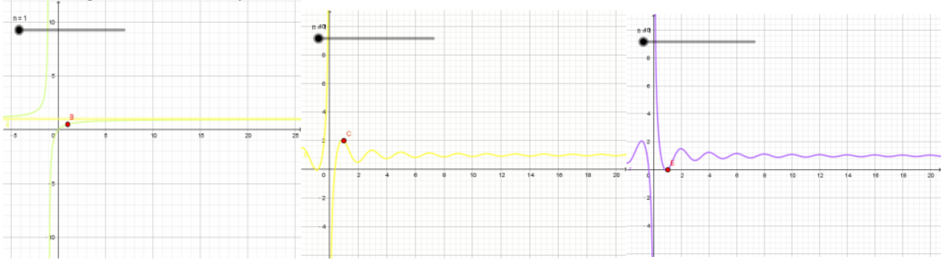


【拓展练习】写出下列数列，试着用Excel进行实验，画出下列数列的图像(散点图),并重点分析数列的有界性和单调性.

① $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

② $\left\{\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}$: $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots$

③ $\left\{\frac{n+(-1)^{n}}{n}\right\}$: $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n}}{n},\cdots$



1.1.2数列极限的概念和性质

一、数列极限的概念

1.数列的极限： 设数列$y_1,y_2,y_3,\ y_4,\cdots,y_n,\cdots$ 若当n无限增大时, y_n趋向于一个常数A, 则称数列$\{y_n\}$以A为极限，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$或$n\to+\infty, y_n\to A$或$y_n\to A(n\to+\infty)$.

有极限的数列称为收敛数列.没有极限的数列称为发散数列.

数列的极限的几何解释

①自变量n的趋向：$n\to+\infty$（表示n取正数，且无限增大.）

②因变量y_n的趋向：一个常数

③符号书写:

④图解常见数列的敛散性:

$n\to+\infty$表示n取正数且无限增大;口诀：**y**轴右侧,一直往右看;

$n\to-\infty$表示n取负数且无限减小;口诀：**y**轴左侧,一直往右看;

$\boldsymbol{n\to\infty} \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{n\to+\infty}\\ \boldsymbol{n\to-\infty}\end{cases}$

2.常见数列的敛散性

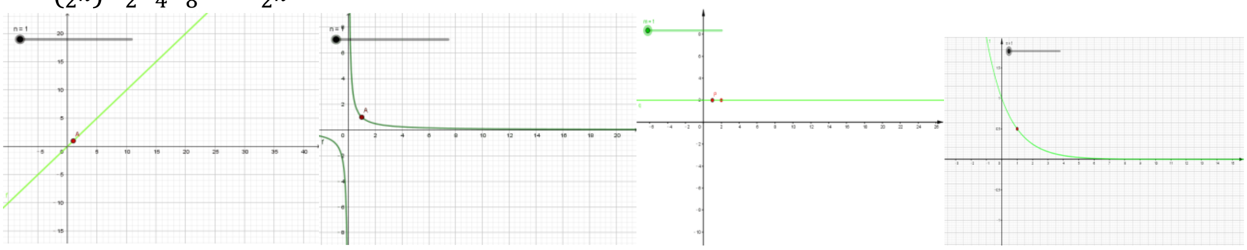
【数学探究】 结合图像分析常见数列的敛散性.

① $\{n\}$: $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 自然数列

② $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 调和数列

③ $\{a\}$: $a,a,a,\cdots,a,\cdots$ 常数列

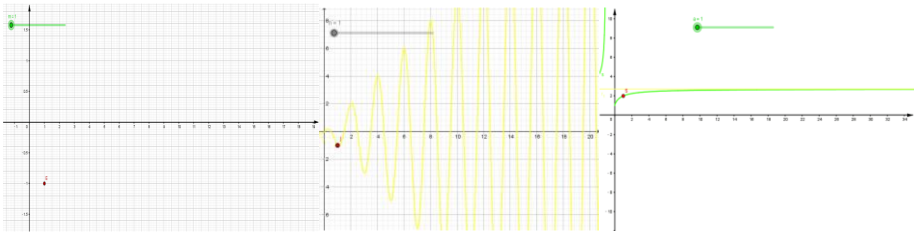
④ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$ 无穷递缩等比数列



⑤ $\{(-1)^n\}$: $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$ （常）震荡数列

⑥ $\{n(-1)^n\}$: $-n,n,-n,\cdots,n(-1)^n,\cdots$ （无穷）震荡数列

⑦ $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$: $2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdots,(1+\frac{1}{n})^n,\cdots$ 欧拉数列

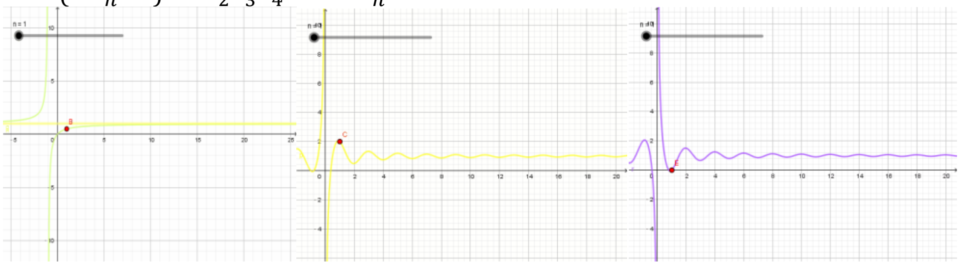


【拓展练习】写出下列数列，试着用 Excel 进行实验，画出下列数列的图像(散点图),并重点分析数列的有界性和单调性.

① $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

② $\left\{\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}$: $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots$

③ $\left\{\frac{n+(-1)^{n}}{n}\right\}$: $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n}}{n},\cdots$

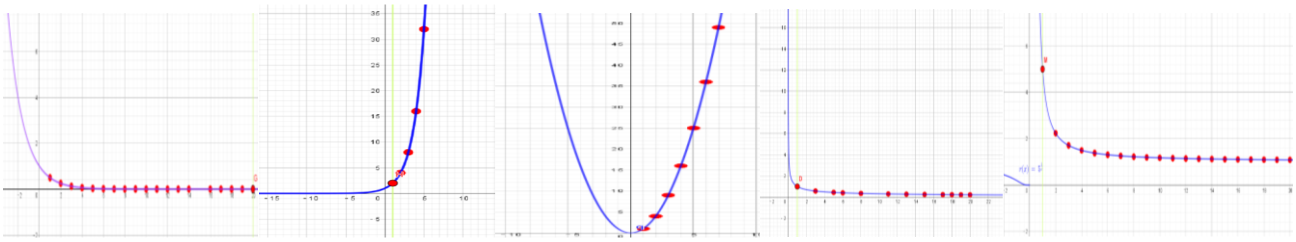


总结与思考：数列发散有哪几种情况?

【基础探究】

1.结合图像判断下列常见的数列敛散性

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ② $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=\infty$ ③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ ④ $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=\infty$ ⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5}=1$



【拓展探究】

2.试着进行实验，画出下列数列的图像(散点图),结合图像判断下列常见的数列的敛散性

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0(|q|<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=\infty(|q|>1)$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0(k>0)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=\infty(k>0)$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1,k>0)$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>1)$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$

【拓展】

***3.数列极限的严格化定义($\varepsilon-N$语言)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N, st.\ \forall n>N \Longrightarrow |y_n-A|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0, \forall N, st.\ \exists n>N \Longrightarrow |y_n-A|\geq\varepsilon$

①用定义证明数列的极限($\varepsilon-N$法)

②证明数列发散的方法:

1)∃某一子数列x_{nk}发散 ⟹ 数列x_n发散（逆否）

2)∃两个子数列不收敛于同一个常数 ⟹ 发散

二、数列极限的性质

1．数列的敛散性法则

① **收敛+收敛=收敛**;收敛−收敛=收敛;收敛×收敛=收敛;收敛÷收敛($\neq 0$)=收敛

② 收敛+发散=发散

③ 发散+发散≠发散

2.收敛数列的性质

性质1.唯一性：收敛⟹极限存在且唯一

性质2.局部有界性：收敛⟹某个去心邻域内有界

①无界⟹发散（逆否命题成立）

②有界⇏收敛（逆命题不成立）

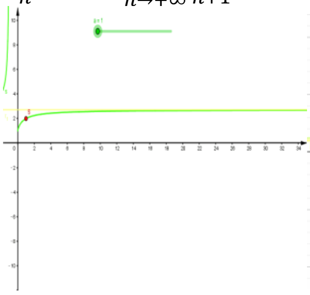
③单调有界⟹收敛.

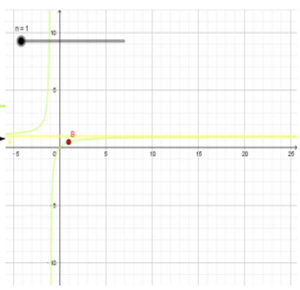
单增有上界⟹收敛;

单减有下界⟹收敛

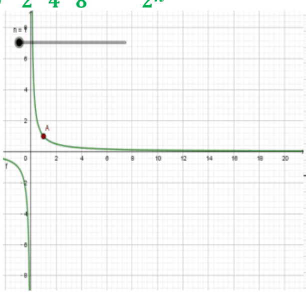
例如，⑥$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$: $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4\cdots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \cdots$; $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$;

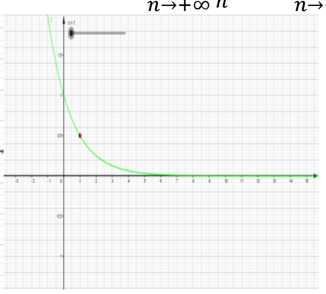
单增有上界⟹收敛. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$





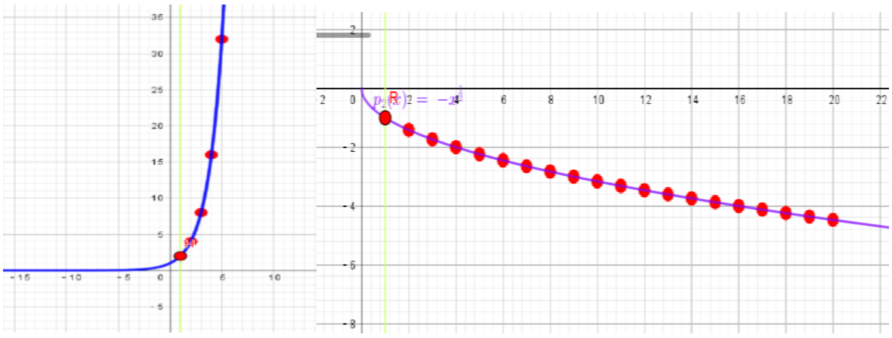
②$\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ ④$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$单减有下界⟹收敛. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$





注意：单调增加的数列若没有上界，则他发散到$+\infty$；单调减少的数列若没有下界，则他发散到$-\infty$。

例如，$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{-1}{2}}=+\infty$



性质 3. 局部保号性：**收敛⇒某个去心邻域内保号**

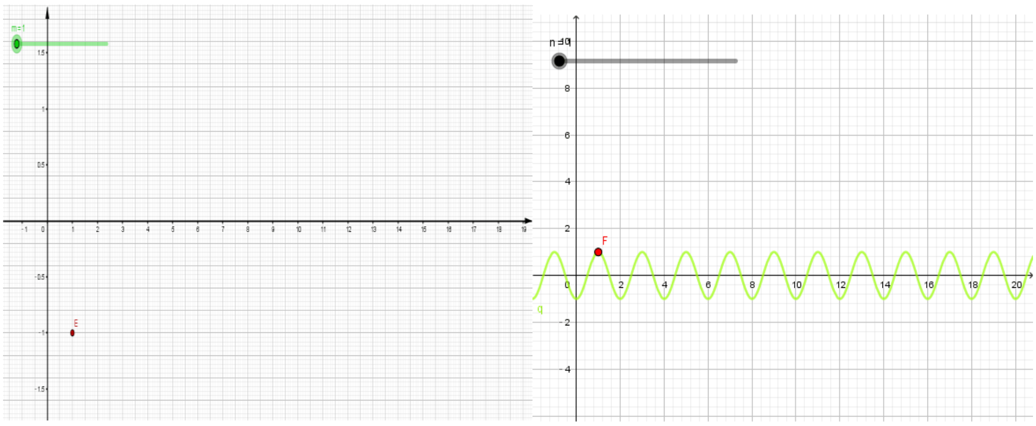
非负函数的极限一定是非负的

性质 4.海涅 THR:数列$x_n \to a \Leftrightarrow \forall$子数列$x_{nk} \to a$

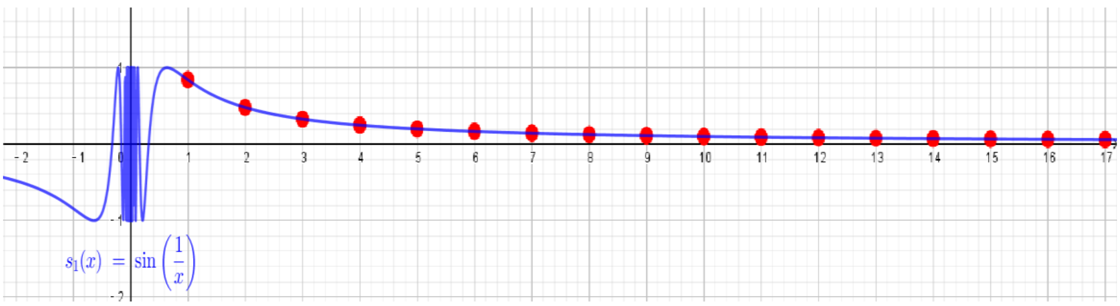
> 整体收敛，部分收敛；部分发散，整体发散
> **①∃某一子数列x_{nk}发散 $\Longrightarrow$ 数列x_n发散（逆否）**
> **②∃两个子数列不收敛于同一个常数 $\Longrightarrow$ 发散③单调有界⇒收敛.**
> **③若子数列x_{2k-1}、x_{2k}都收敛于同一个常数a $\Longrightarrow$ 数列$x_n \to a$**

例如，有界 ⇏ 收敛(逆命题不成立)，∃两个子数列不收敛于同一个常数 ⟹ 发散

⑤$\{(-1)^n\}$:-1, 1,-1, 1,⋯, $(-1)^n$, ⋯偶数列 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = 1$;奇数列 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = -1$， $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = \begin{cases}-1\\ 1\end{cases}$（两个常数）;同理， $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1} = \begin{cases}1\\ +1\end{cases}$（两个常数）



再例如， $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$, 而 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在,



而 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在，取$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0(n\to+\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin 2n\pi = 0$;

取$x_n' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0(n\to+\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n'} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n} \neq \lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{x_n'}$$

性质 5.极限存在准则

(1) 夹逼准则 (准则1)

①$y_n \le x_n \le z_n (n=1,2,\dots)$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

(2)单调有界数列必有极限（准则2）

$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a(\le M);$

$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b(\ge m);$

【专升本连接】先试着用放缩法求出下列数列的范围，下次课之后再利用夹逼定理完成极限的计算.

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解析: $\because \frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \le \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$

$\le \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}$

$\therefore \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n} \le \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \le \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$

即: $\frac{n^2+n}{2(n^2+n+n)} \le \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \le \frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$, 由夹逼定理知

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

解析: $\because n(\frac{1}{n^2+n\pi}+\frac{1}{n^2+n\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}) \le n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi})$

$\le n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+\pi})$

$\therefore n\frac{n}{n^2+n\pi} \le n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}) \le n\frac{n}{n^2+\pi}$

即 $\frac{n^2}{n^2+n\pi} \le n(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}) \le \frac{n^2}{n^2+\pi}$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$, 由夹逼定理知

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

3. (2015计算机) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解析: $\because \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$\le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

$\therefore \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$, 由夹逼定理知

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$

【竞赛与考研】

（1996年1）设$x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证明$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

证明： $x_1=10$， $x_2=\sqrt{6+x_n}=4, x_1>x_2$， 易证单调减少的数列.知极限存在.
设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$， ${x^2}_{n+1}=6+x_n$， 两边同时取极限得， $a^2=6+a$， $a=3$，
所以， $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=3$

1.1.3税收中的乘数效应

在经济领域和社会生活中，会遇到多个甚至无穷多个数相加的问题，也就是求和的问题。这里的"和"已经不是普通意义下有限个数的和了，那么这个"和"什么意思呢？在传统的凯恩斯宏观经济模型中,用于解释政府财政政策重要性的一个重要工具是乘数.其基本的思想是说,如果政府的支出增加,就会产生乘数效应,其对经济活动最终的影响一定大于最初支出的.

例： 为了刺激经济的发展，某联邦政府通过一项削减100亿美元税收的方案。假设居民收入的分配为：国家收入的93%用于消费，7%用于储蓄.试估计削减税收对整体经济活动的总效应（即消费总额有多大）.

一、税收中的乘数效应

1. 乘数效应：经济学上把类似这种由于消费产生更多消费的经济现象称为乘数效应。

2.把这个93%称为" 边际消费倾向"，将每人花费1美元额外收入的比例，记为MPC=0.93.把7%称为"边际储蓄倾向".

3.实际效应：削减税所产生的消费总额. 消费总额=削减税× $\frac{\boldsymbol{MPC}}{\boldsymbol{1-MPC}}$

二、无穷级数

1. 级数：已知数列$u_1,u_2,u_3,\ u_4,\cdots,u_n,\cdots$.则和式$u_1+u_3+u_4+\cdots+u_n+\cdots$或

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

称为无穷级数，简称级数.

2. 等比级数：等比数列的无穷项的和.又称几何级数. $a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+\cdots=$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1q^{n-1}$$

3. 等比级数的和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1q^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-q}, & |q|<1\\ \text{发散}, & |q|\geq 1\end{cases}$$

4.级数的收敛和发散：设无穷级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

其部分和$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n(n=1,2,3,\cdots)$构成一个部分和数列$\{S_n\}$: $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n,\cdots$ 如果数列$\{\boldsymbol{S_n}\}$收敛且有极限S，即

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=S,$$

则称级数收敛，其和为S，即

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n=S$$

如果数列$\{S_n\}$发散，则称级数发散（发散级数没有和）。

解:

构造数列$\{u_n\}$： $100\times0.93, 100\times0.93^2, 100\times0.93^3,\cdots,100\times0.93^n,\cdots$.

设消费总额为S，则$S=100\times0.93+100\times0.93^2+100\times0.93^3+\cdots+100\times0.93^n,\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$

因为，边际消费倾向$MPC=0.93$.边际储蓄倾向=1- $MPC=0.07$，削减税 $=100$

所以，实际效应即消费总额=削减税× $\frac{\boldsymbol{MPC}}{\boldsymbol{1-MPC}}$=100× $\frac{\mathbf{0.93}}{\mathbf{1-0.93}}$=$\frac{\mathbf{93}}{\mathbf{0.07}}\approx1328.6$(亿美元)

练习： 某城市为了刺激经济发展，政府决定减免税收1000万元，假设居民将收入的90%用于消费，10%用于

储蓄.试问：1）用级数来表示消费总额2）政府减免税收政策会带动多大的消费？（答案约9000万元）

阅读：分牛问题

农夫养牛17头，临死前要把这17头牛分给自己的3个儿子。遗嘱是这样的：老大得1/2，老二得1/3，老三得1/9。既不能把牛杀死，也不能卖了分钱。农夫死后，兄弟3人怎么也想不出办法。兄弟3人只好向邻居请教。邻居想了想说：我借给你们一头牛，就好分了。这样，老大得到18的1/2为9头，老二得到1/3为6头，老三得到1/9为2头，合计刚好为17头，剩下1头牛还给邻居。农夫的问题得到解决，邻居的聪明才智令人赞扬。我们再细细思考一下，这样分牛合理吗？也就说，老大、老二和老三得到的牛数是否真的农夫的遗嘱丝毫不差？

分析：第一次分后，老大得到17×1/2头牛，老二得到17×1/3头牛，老三得到17×1/9头牛。由于牛不能分割，分数的分法在这里不起作用。这就是农夫儿子想不出办法的原因。

为什么会出现分数而不是整数呢？问题就出在这里，按照农夫的遗嘱，第一次分后牛不能够把17头牛完全分完，还剩下17/18头牛。

每个人必须按照遗嘱继续分掉剩下的牛。

第二次分后，牛也没有分完，还剩下牛17/182。每个人按照遗嘱继续分牛。

继续分下去，这是一个收敛的无穷级数。

也就是说，老大得到的牛头数为

17×1/2 + 17/18×1/2 + 17/182×1/2 + 7/183×1/2 + ……

老二得到的牛头数为

17×1/3 + 17/18×1/3 + 17/182×1/3 + 7/183×1/3 + ……

老三得到的牛头数为

17×1/9 + 17/18×1/9 + 17/182×1/9 + 7/183×1/9 + ……

计算级数1/18 + 1/182 + 1/183 + ……=1/17

我们看到，经过级数计算的结果与邻居分牛方法完全一致。

【作业】

1.数学实验探究活动:借助GeoGebra软件小组合作讨论下列数列的单调性、有界性、敛散性完成表1和表2（要求上传雨课堂-小组探究1）

附表1.

	数列		图像	单调性	有界性	敛散性	极限书写
1	自然数列$\{n\}$	1,2,3,4,5,6,⋯					
2	调和数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{x}\cdots$					
3	震荡数列$\{(-1)^n\}$	-1,1,-1,1,⋯					
4	常数列$\{2\}$	2,2,2,2,⋯					
5	无穷递缩等比数列$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$	$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$					

拓展	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$	$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1}\cdots$					
	$\{(-1)^{n+1}\}$	1,-1, 1,-1,⋯					
	$\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$	$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4}\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n},\cdots$					

附表2.

	常见类型	常见例子
1. 常见的收敛数列	1.常数列	
	2.调和数列	
	3.无穷递缩的的等比数列	
	4. 两个重要的极限	
2. 常见的发散数列	1. 正无穷	
	2. 负无穷	
	3. 无穷	
	4. 震荡（两个）	

2.试着利用敛散性法则判断下列函数的敛散性，并说明理由，小组成员之间相互讲一讲,并完成表3.

附表3.

性质			举例	分析	
敛散性法则	★1）收敛数列的四则运算	收敛+收敛=	4）	①$\{\frac{1}{n}\}$ ②$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ③$1-\frac{1}{2^n}$ ④$\{1+\frac{1}{n}\}$ ⑤ $\{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$	⑥$\{n+C\}$ ⑦$\{3+(-1)^n\}$ ⑧$\{n+(-1)^n\}$ ⑨$\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$ ★⑩$\{\frac{n+1}{n}\}$（需化简） ⑪$\{\frac{(-1)^n+(-1)^{n+1}+3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\}$
		收敛-收敛=	3）		
		收敛×收敛=	2）、5）		
		收敛÷收敛($\neq \mathbf{0}$)=			
	2）收敛+发散=		6）、7）		
	★3）发散+发散=		8）发散、9）收敛	方法：敛散性法则，复杂问题需要**化简**转化成四则运算	