Hoja de trabajo #2

Sofia Osorio Echeverry Código: A00365139

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

→ Guia de lectura.

2.1.1. Para cada modelo que vaya a Estudiar, siempre haga un análisis dimensional y asegúrese de tener claridad sobre las "unidades de medida" de cada termino involucrado en las Ecuaciones.

→ 2.1.2. los modelos Exponenciales (crecimiento y decrecimiento) tienen la forma general $\frac{dA}{dt} = kA,\ A(t_0) = A_0$, donde

"A(t) Representa la "cantidad" presente en el instante t de cierta "sustancia", objeto de estudio, y la constante k es un dato que se caracteriza dicho objeto de estudio (el signo algebraico de k es el que determina si se trata de un problema de crecimiento o decrecimiento.

Como vimos anteriormente en la sección 1.4 del ejercicio #34 de crecimiento poblacional.

- En un cultivo de ciertas bacterias su número se incrementa seis veces en 10 Horas. ¿cuanto le tomará a la población duplicarse?

→ $P(t) = P_0 e^{kt}$

donde se toma $P(0) = P_0$ como la población inicial

$P(t) = P_0 e^{0.0179t}$

y como $P(10) = 6P(0)$

$$\cancel{P_0} e^{k(10)} = 6\cancel{P_0}$$

$$e^{10k} = 6$$

$$\ln e^{10k} = \ln 6 \rightarrow 10k = \ln 6$$

$$k = \frac{1}{10}\ln 6$$

$$k = 0.1791$$

→ donde pasamos a Hallar el valor de t tal que $P(t) = 2P_0$

$$\cancel{P_0} e^{0.1791t} = 2\cancel{P_0}$$

$$e^{0.1791t} = 2$$

$$t \approx \frac{1}{0.1791}\ln 2 \text{ horas}$$

$$t \approx 3.87 \text{ horas}$$

2.1.4 la ecuación se puede escribir de dicha forma siempre que se cumpla la condición que sea posible despejar y' y exista exclusivamente una variable "y".

3. Selección de ejercicios y problemas.

1.5 ~ 27, 29, 30, 36, 38, 44.

Ej. 27. $(x+ye^{y})\frac{dy}{dx}=1$

$$x+ye^{y}=\frac{dx}{dy}$$

$$ye^{y}=\frac{dx}{dx}-1\cdot x$$

$$\frac{dx}{dy}-1\cdot x=ye^{y}$$

$$e^{-y}\left(\frac{dx}{dy}-1\cdot x\right)=e^{-y}\cdot(ye^{y})$$

$$\frac{d}{dy}(e^{-y}\cdot x)\,dy=y$$

$$\int\frac{d}{dy}\cdot(e^{-y}\cdot x)\,dy=\int y\,dy$$

$$e^{-y}x=\frac{y^2}{2}+c$$

$$x(y)=e^{y}\left(\frac{1}{2}y^2+c\right)$$

$$x(y)=\frac{1}{2}y^2e^{y}+ce^{y}$$

29. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2xy$

$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1$

$e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right) = e^{-x^2}$

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot y\right) = e^{-x^2}$

$d\left(e^{-x^2} \cdot y\right) = e^{-x^2} \cdot dx$

$\int d\left(e^{-x^2} \cdot y\right) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt + c$

$e^{-x^2} \cdot y(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt + c$

$y(x) = e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2} \cdot dt + c\right)$

Se reescribe en terminos de

$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

$y(x) = e^{x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt + c\right)$

$y(x) = e^{x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erf}(x) + c\right)$

30. $2x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 2x\cos x \; ; \; y(1) = 0$

$2x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 2x\cos x$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y = \cos x$

$x^{-1/2}\left[\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y\right] = x^{-1/2} \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(x^{-1/2} y\right) = x^{-1/2} \cos x \rightarrow d\left(x^{-1/2} y\right) = x^{-1/2} \cos x \, dx$

$\int d\left(x^{-1/2} \cdot y\right) = \int_1^x v^{-1/2} \cos v + c$

$$x^{-1/2}\,y = \int_1^x v^{-1/2}\cos v \cdot dv$$

$$y(x) = x^{-1/2}\int_1^x v^{-1/2}\cos v\,dv.$$

36. $V(0) = 60\,gal$

$x(0) - 0\,lb$

$C_e = 1\,lb/gal$

$r_e = 2\,gal/min$

$r_s = 3\,gal\,min$

$V(60) = 0$

a. hallar $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = C_e r_e - r_s \frac{x}{V_0 + (r_e - r_s)t}$$

$$\frac{dx}{dt} = (1)(2) - \frac{3x}{60-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{3}{60-t} \cdot x$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t} x = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(t) = e^{\int \frac{3}{60-t} dt} \quad \int(t) = e^{\ln(60-t} \\ \rho(t) = e^{-3\ln(60-t)} \quad = (60-t)^{-3} \end{array}}$$

$$\to (60-t)^{-3} \cdot \left[\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t} x\right] = (60-t)^{-3}(2)$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[(60-t)^3 (x)\right] = \int 2(60-t)^{-3}$$

$$(60-t)^{-3} \cdot x = \frac{1}{(60-t)^2} + C$$

$$x(t) = \frac{(60-t)^{\cancel{3}}}{(60-t)^2} + C(60-t)^3$$

$$x(t) = (60-t) + C(60-t)^3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0) = (60-0) + C(60-0)^3 = 0 \\ C = \frac{1}{3600} \end{array}}$$

$$x(t) = (60-t) - \frac{1}{3600}(60-t)^3$$

H cantidad de sal presente en el deposito en todo instante $t\ [0,60]$ min

b. Maximo de $x(t)$ en $t \in [0,60]$

$$x'(t) = -1 - \frac{3}{3600}(60-t)^2(-1)$$

$$x'(t) = -1 + \frac{1}{1200}(60-t)^2 = 0$$

$$\frac{1}{1200}(60-t)^2 = 1$$

$$(60-t)^2 = 1200$$

$$60 - t = \pm 20\sqrt{3}$$

$\rightarrow 60 - t = 20\sqrt{3}$ $\vee$ $60 - t = -20\sqrt{3}$

$60 - 20\sqrt{3} = t$ $\vee$ $60 + 20\sqrt{3} = t$

$t \approx 25.36$ mn $\vee$ $t \approx 94{,}64$ mn

$x(0) = 0$ lb

$x(25.36) \approx 23{,}09$ lb en x_{max}

$x(60) \approx 0$ lb.

sección 1.6. Ej 29, 30, 46, 49, 50.

29. Resolver la E.D.O

$$2x\,\text{sen}y\cos y\,\frac{dy}{dx} = 4x^2 + \text{sen}^2 y$$

$u = \text{sen}^2 y$

$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(\text{sen}^2 y)$

$\frac{du}{dx} = 2\,\text{sen}y\cos y\,\frac{dy}{dx}$

$$x \cdot \boxed{2\,\text{sen}y\cos y}\,\frac{dy}{dx} = 4x^2 + \text{sen}^2 y$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = 4x^2 + u$$

$$x\frac{du}{dx} - u = 4x^2$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = 4x$$

ecuación lineal primer orden.

$\to \frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u\right) = \frac{1}{x}4x$

$\to \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right) = 4$

→ Continuación

$$d\left(\frac{1}{x}u\right) = 4dx$$

$$^{-1}\int d\left(\frac{1}{x}u\right) = \int 4\,dx$$

$$\frac{1}{x}u = 4x + c$$

$$u = 4x^2 + cx$$

$$\operatorname{sen}^2 y = 4x^2 + cx$$

$$\rho(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\rho(x) = e^{\int \frac{-1}{x}\,dx}$$

$$\rho(x) = e^{-\ln x}$$

$$\rho(x) = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{x}$$

Ejercicio #30. Resolver

$$(x+e^{y})y' = xe^{-y} - 1$$

$$(x+e^{y})\frac{dy}{\boxed{dx}} + 1 - xe^{-y} = 0$$

$\rightarrow$ $(x+e^{y})dy + (1-xe^{-y})dx = 0$

$\sim$ $(1-xe^{-y})dx + (x+e^{y})dy = 0$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

donde $M_y = xe^{-y}$ $\wedge$ $N_x = 1$

$\Rightarrow$ $M_y \neq N_x$ No es Exacta

observamos que $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{1-xe^{-y}}{1-xe^{-y}} = 1$

$\rightarrow$ Existe un factor integrante $\rho(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

$\rho(y) = e^{\int 1\,dy}$

$\rho(y) = e^{y}$

$\rightarrow$ $(1-xe^{-y})dx + (x+e^{y})dy = 0$

Mult. Factor integrante ambos lados

$$e^{y}(1-xe^{-y})dx + e^{y}(x+e^{y})dy = 0$$

$\rightarrow$ $(e^{y} - x)dx + (xe^{y} + e^{2y})dy = 0$

$m(x,y)\,dx + n(x,y)\,dy = 0$

observamos que $m_y = e^{y}$ $\wedge$ $n_x = e^{y}$ EDO 2 es Exacta

$$m_y = n_x$$

Existe una función $f(x,y)$ tal que $f(x,y) = c$ es la familia monoparametrica de soluciones de la E.D.O 2

continuación → donde
Ej #30

$$\frac{\partial f}{\partial x} = m(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = n(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} - x \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y} + e^{2y}$$

integar Parcialmente respecto a y

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$f(x,y) = \int xe^{y} + e^{2y}\, dy$$

$$f(x,y) = xe^{y} + \frac{1}{2}e^{2y} + g(x)$$

derivo Parcialmente Respecto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} + 0 + g'(x)$$

$$\rightarrow \cancel{e^{y}} - x = \cancel{e^{y}} + g'(x)$$

$$-x = g'(x)$$

$$\int -x\, dx = g(x)$$

$$-\frac{1}{2}x^{2} + C_1 = g(x)$$

Entonces la solución Exacta a la EDO $f(x,y) = C$

es $\rightarrow xe^{y} + \frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2}x^{2} + C_1 = C$

$$xe^{y} + \frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2}x^{2} = C_2 \quad (\text{donde } C_2 = C - C_1$$

$$\rightarrow 2xe^{y} + e^{2y} - x^{2} = K$$

donde $K = 2C_2$

46. Resolver $xy'' + y' = 4x$ para reducir el orden

Sea $u(x) = y'$

$$\frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(y')$$

$$u'(x) = y''$$

reemplazando las expresiones $y' = u$ y $y'' = u'$ en la e.d.o tenemos:

$$\to x\,u'(x) + u(x) = 4x$$

$$x\frac{du}{dx} + u = 4x$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 4 \quad \text{(ecuación lineal)}$$

$$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\rho(x) = e^{\ln x} = x$$

$$x\left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u\right) = 4x$$

$$\frac{d}{dx}(xu) = 4x$$

$$d(xu) = 4x\,dx$$

$$\int d(xu) = \int 4x\,dx$$

$$xu = 2x^2 + c_1$$

$$u = 2x + \frac{c_1}{x}$$

$$u(x) = 2x + \frac{c_1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{c_1}{x}$$

continuación Ej # 46

$$\to dy = \left(2x + \frac{c_1}{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int 2x + \frac{c_1}{x}\, dx$$

$$y(x) = x^2 + c_1 \ln x + c_2$$

• Ej 49.

Resolver $yy'' + (y')^2 = yy'$ | para reducir el orden se hace $u(y) = y'$

$$\to \frac{d}{dx}(u(y)) = \frac{d}{dx}(y')$$

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y''$$

$$\frac{du}{dy} \cdot y' = y''$$

$$\frac{du}{dy} \cdot u = y''$$

→ reemplazando las expresiones $y'' = u\frac{du}{dy}$ y $y' = u$ en la e.dc. se obtiene

se divide por uy; $u = y' > 0$, $y > 0$ dado las condiciones del problema.

$$\to y \cdot u \cdot \frac{du}{dy} + (u)^2 = yu$$

$$\to \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = 1$$

ecuación lineal $\frac{du}{dy} + P(y)u = Q(y)$

→ continuación

$$y\left(\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u\right) = y$$

$$\frac{d}{dy}(uy) = y$$

$$\cdot\ d(uy) = y\,dy$$

$$\int d(uy) = \int y\,dy$$

$$uy = \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

$$u(y) = \frac{1}{2}y + \frac{c_1}{y}$$

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y + \frac{c_1}{y} \rightarrow dy = \left(\frac{1}{2}y + \frac{c_1}{y}\right)dx$$

$$dy = \frac{y^2 + c^2}{2y}\,dx$$

$$\cdot\ \frac{2y}{y^2+c_2}\,dy = dx$$

$$\int \frac{2y}{y^2+c_2}\,dy = \int dx$$

$$\ln(y^2 + c_2) = x + c_3$$

$$e^{\ln(y^2+c_2)} = e^{x+c_3} = e^x \cdot e^{c_3}$$

$$y^2 + c_2 = Be^x$$

$$y^2 = A + Be^x \quad \rightarrow y = +\sqrt{A + Be^x}$$

$$\rho(y) = e^{\int p(y)\,dy}$$

$$p(y) = e^{\int \frac{1}{y}\,dy}$$

$$\rho(y) = e^{\ln y} = y$$

donde $A = -c_2$

$B = e^{c_3}$

asumimos $y>0$

50. Resolver $y'' = (x + y')^2$

→ principalmente se procede a efectuar un cambio de variable

$$u(x) = x + \frac{dy}{dx}$$

$$\to \frac{du}{dx} = 1 + \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\to \frac{du}{dx} - 1 = y''$$

→ así : $y'' = (x+y')^2$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2$$

$$du = (1+u^2)\,dx$$

$$\frac{du}{1+u^2} = dx$$

$$\to \int \frac{du}{1+u^2} = \int dx$$

$$\arctan u = x + C_1$$

donde $u(x) = \tan(x+C_1)$

$$x + \frac{dy}{dx} = \tan(x+C_1)$$

$$\to \frac{dy}{dx} = \tan(x+C_1) - x$$

$$\to dy = (\tan(x+C_1) - x)\,dx$$

$$\int dy = \int \tan(x+C_1) - x \; dx$$

$$\int \tan(x+C_1)\,dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x+C_1)}{\cos(x+C_1)}\,dx$$

$$w = \cos(x+C_1)$$

$$dw = \operatorname{sen}(x+C_1) \cdot dx$$

$$\int -\frac{dw}{w}$$

$$= -\ln|w + C_2|$$

$$= -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2$$

$$y(x) = -\ln|\cos(x+C_1)| \; \frac{-x^2}{2} + C_2$$

$$y(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos(x+C_1)}\right| - \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$y(x) = \ln|\sec(x+C_1)| - \frac{1}{2}x^2 + C_2$$