De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{3}$ *y* $g(x) = \dfrac{x^2}{6} - 2$.

[*Selectividad Andalucía Junio 2022*]

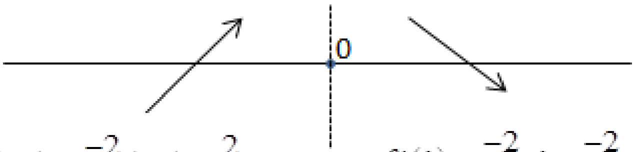
<u>*Solución*</u>:

Representemos las gráficas de las dos funciones que se tratan de dos parábolas:

- $y = f(x) = \dfrac{-x^2}{3} + 4$

  - $Cortes\ ejes \begin{cases} Y:\ x=0\ ,\ y=4\ ,\ \underline{\underline{(0,4)}} \\ X:\ y=0\ ,\ \dfrac{-x^2}{3}+4=0\ ,\ 4=\dfrac{x^2}{3}\ ,\ x^2=12\ ,\ x=\pm\sqrt{12}=\pm 3,46 \left\langle \begin{array}{l} \underline{\underline{\left(-\sqrt{12},0\right)}} \\ \underline{\underline{\left(\sqrt{12},0\right)}} \end{array} \right. \end{cases}$

  - $f'(x) = \dfrac{-2}{3}x\ ,\ \dfrac{-2}{3}x = 0\ ,\ \underline{\underline{x=0}},\ y = \dfrac{-0^2}{3}+4 = 4$



$f'(-1) = \dfrac{-2}{3}(-1) = \dfrac{2}{3} > 0 \qquad f'(1) = \dfrac{-2}{3}\cdot 1 = \dfrac{-2}{3} < 0$

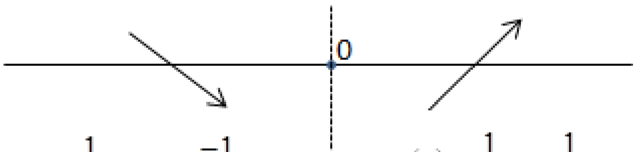
$\left.\begin{array}{l} f\ \ es\ CREC.\ en\ (-\infty,0) \\ f\ \ es\ DECREC.\ en\ (0,+\infty) \end{array}\right\rangle MAX.\ en\ (0,4)$

  - $f''(x) = \dfrac{-2}{3} < 0\ \ \forall x$, la función es CÓNCAVA

- $y = g(x) = \dfrac{x^2}{6} - 2$

  - $Cortes\ ejes \begin{cases} Y:\ x=0\ ,\ y=-2\ ,\ \underline{\underline{(0,-2)}} \\ X:\ y=0\ ,\ \dfrac{x^2}{6}-2=0\ ,\ \dfrac{x^2}{6}=2\ ,\ x^2=12\ ,\ x=\pm\sqrt{12}=\pm 3,46 \left\langle \begin{array}{l} \underline{\underline{\left(-\sqrt{12},0\right)}} \\ \underline{\underline{\left(\sqrt{12},0\right)}} \end{array} \right. \end{cases}$

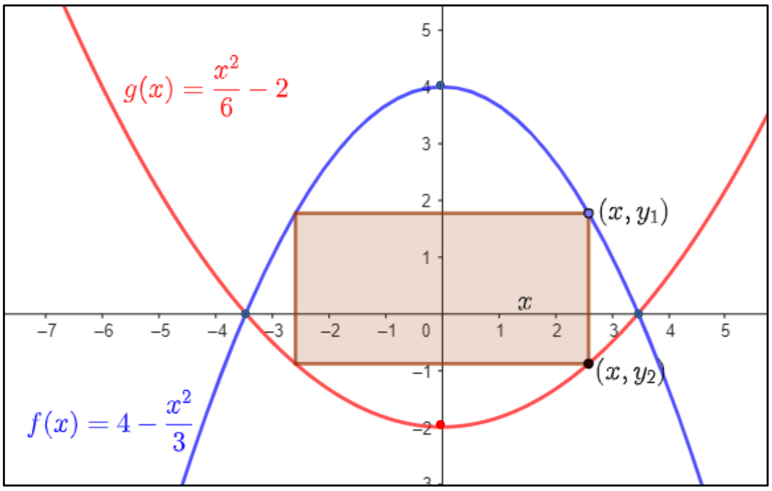
  - $g'(x) = \dfrac{2}{6}x\ ,\ \dfrac{1}{3}x = 0\ ,\ \underline{\underline{x=0}},\ y = \dfrac{0^2}{4} - 2 = -2$



$g'(-1) = \dfrac{1}{3}(-1) = \dfrac{-1}{3} < 0 \qquad g'(1) = \dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{1}{3} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} g \;\; es\ DECREC.\ en\ (-\infty,0) \\ g \;\; es\ CREC.\ en\ (0,+\infty) \end{array}\right\rangle MIN.\ en\ (0,-2)$$

- $f''(x)=\dfrac{1}{3}>0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$, la función es CONVEXA $\cup$



La función a maximizar es el área del rectángulo construido según las condiciones del problema y que según el dibujo:

la base es: $b=2x$, y

la altura es: $h=y_1-y_2=\left(4-\dfrac{x^2}{3}\right)-\left(\dfrac{x^2}{6}-2\right)=\dfrac{24-2x^2-x^2+12}{6}=\dfrac{36-3x^2}{6}=\underline{6-\dfrac{x^2}{2}}$

Entonces la función área es: $\underline{\underline{A(x)}}=b\cdot h=2x\cdot\left(6-\dfrac{x^2}{2}\right)=\underline{\underline{12x-x^3}}$

Los extremos relativos están entre los valores que anulan la primera derivada:

$A'(x)=12-3x^2$

$12-3x^2=0$, $x^2=4$, $x=\pm\sqrt{4}$ $\left\langle\begin{array}{l} x=-2 \text{ no válido al ser } x \text{ una dimensión} \\ \underline{x=2} \end{array}\right.$

Para decidir el tipo de extremo aplicamos el criterio del signo del valor de la segunda derivada:

$A''(x)=-6x$, $A''(2)=-6\cdot 2=-12<0 \Rightarrow$ Máximo en $x=2$

$$Para \;\; x=2 \left\langle\begin{array}{l} b=2x=2\cdot 2=\underline{4} \\ h=6-\dfrac{x^2}{2}=6-\dfrac{2^2}{2}=6-2=\underline{4} \end{array}\right.$$

Por tanto, el rectángulo de área máxima es el cuadrado de dimensión: $\boxed{4\times 4\ u}$ y de área $\underline{\underline{16\ u^2}}$.