APLICACIONES DE LAS DERIVADAS DE BACHILLERATO

1. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $y = e^x(x-2)$
Solución: Decreciente $(-\infty, 1)$**, Creciente** $(1, +\infty)$**. mínimo** $(1, -e)$**.**

b) $y = x^5 - 5x^3 + 10x$
Solución: Decreciente $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$**, Creciente** $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$**. mínimos** $(-1, -6)$**,**$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$**, máximos** $(1, 6)$**,** $(-\sqrt{2}, 16\sqrt{2})$

c) $y = (x-1)^4$
Solución: Decreciente $(-\infty, 1)$**, Creciente** $(1, +\infty)$**. mínimo** $(1, 0)$**.**

d) $y = \log\left(\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
Solución: Decreciente $(-\frac{1}{2}, 0)$**, Creciente** $(0, +\infty)$**.No hay máximos ni mínimos.**

e) $y = \dfrac{x-1}{e^x}$
Solución: Decreciente $(2, +\infty)$**, creciente** $(-\infty, 2)$**. máximo** $(2, e^{-2})$**.**

f) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$
Solución: Decreciente $(0, 2) \cup (2, 4)$**, creciente** $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$**. máximo** $(0, 0)$**, mínimo** $(4, 8)$

2. Dada la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar a, b, c, d de modo que :

a) tenga puntos singulares en $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
Solución: $a = 2$**,** $b = -9$**,** $c = 12$**,** $d = -4$

b) pase por los puntos $(2, 27)$ y $(1, 37)$ y admita punto singular en $(0, 0)$.
Solución: $a = \dfrac{-121}{4}$**,** $b = \dfrac{269}{4}$**,**$c = 0$**,**$d = 0$

c) tenga punto singular en $(0, -1)$ y la curva sea tangente a la recta de ecuación $2x - y - 2 = 0$ en el punto $(1, 0)$
Solución: $a = 0$**,** $b = 1$**,** $c = 0$**,** $d = -1$

3. Hacer una representación gráfica de la función $f(x) = 1 + 4x - x^2$ hallando dominio, puntos de corte con los ejes y máximos y mínimos de $f(x)$ en el intervalo $[1, 7]$

4. Representar las funciones hallando dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y extremos relativos:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ (PROPUESTO EN SELECTIVIDAD)

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-2}{x+4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ (PROPUESTO EN SELECTIVIDAD)

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LA LAGUNA)

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LEÓN)

g) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$

h) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (PROPUESTO UNIVERSIDAD LEÓN)

i) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

j) $f(x) = x^3(x-1)$ (PROP. UNIV OVIEDO)

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

l) $f(x) = x + \sqrt{x}$

m) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

n) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$

ñ) $f(x) = x \cdot \ln x$

5. Con un alambre de 1m, queremos construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones ha de tener el rectángulo?

Solución: $2'5\,\mathrm{dm}$ **cada lado**

6. Calcula dos números reales cuya suma sea 5 y cuyo producto sea el mayor posible.

Solución: $2'5\,\mathrm{m}$ **cada lado**

7. Sea un segmento de longitud a que se divide en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos la altura es el doble de la base y en el otro, la altura es el triple de la base. Determina el punto de división de modo que la suma de sus áreas sea mínima.

Solución: $\dfrac{3a}{5}, \dfrac{2a}{5}$

8. Halla el área del triángulo determinado por los dos ejes coordenados y la tangente a la curva $\dfrac{1}{x}$ en el punto $x=1$

Solución: $2\,\mathrm{u}^2$

9. Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}$m, se desea acotar una superficie triangular de área máxima.¿Qué medidas deberán tener los catetos?

Solución: $10\,\mathrm{m}$ **cada uno**

10. Indica cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30cm.

Solución: un triángulo equilátero de lado $10\,\mathrm{cm}$

11. Una hoja de papel debe contener $18\mathrm{cm}^2$ de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2cm cada uno y los laterales 1cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución: 5cm **y** 10cm

12. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10m.

Solución: radio $\dfrac{10}{4+\pi}$**, base del rectángulo** $\dfrac{20}{4+\pi}$ **y altura del rectángulo igual al radio**

13. De todos los conos de área lateral $2\pi\mathrm{dm}^2$, ¿cuál es el de volumen máximo?

Solución: el de radio $\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}$ **y altura** $\dfrac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

14. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 5dm, ¿cuál es el de perímetro máximo?

Solución: lado= $5\sqrt{2}\,\mathrm{dm}$

15. En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de ancho, alto y largo debe ser 72cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

Solución: un cubo de lado $24\,\mathrm{cm}$

16. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 l. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínimo.

Solución:radio $2\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ **y altura** $\dfrac{40}{\pi}\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{100}}$

17. Un agente comercial cobra por la venta de mercaderías una comisión: $C(x) = 100 + \dfrac{x}{100} - \dfrac{x^2}{100}$ medido en euros, donde x representa la cantidad en miles de euros de la venta efectuada. Determinar la cantidad que habrá que vender para que la comisión que haya que pagar sea máxima y calcula esa comisión

Solución: 500 **euros cantidad máxima que habrá que vender y la comisión es de** 100 **euros**