

Esercizi

A. La retta r_0 dei minimi quadrati che passa per $O(0, 0)$

1. Completa il procedimento qui sotto per trovare la formula che fornisce la pendenza m_0 della retta s_0 .

Esempio numerico	In generale
Sono dati i punti sperimentali $O(0; 0)$, $A_1(1; 1,6)$, $A_2(2; 2,8)$, ..., $A_7(7; 12,8)$	Sono dati N punti sperimentali $O(0; 0)$, $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_N(x_N; y_N)$
Esamino la somma D dei quadrati degli scarti fra la retta $y = mx$ e i punti sperimentali, al variare di m $D = (1,6 - m \cdot 1)^2 + (2,8 - m \cdot 2)^2 + \dots + (12,8 - m \cdot 7)^2$ Sviluppo i quadrati e ottengo una legge del tipo $D = a \cdot m^2 + b \cdot m + c$ con $a = 1^2 + \dots$ $b = -2(1 \cdot 1,6 + \dots)$ $c = 1,6^2 + \dots$ Il grafico della legge è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Perciò D è minima per $m = -\frac{b}{2a} = \dots$ Perciò la pendenza m_0 che rende minima la somma dei quadrati degli scarti è data da $m_0 = \frac{\dots}{\dots} @$	Esamino la somma D dei quadrati degli scarti fra la retta $y = mx$ e i punti sperimentali, al variare di m $D = (y_1 - m \cdot x_1)^2 + (y_2 - m \cdot x_2)^2 + \dots + (y_N - m \cdot x_N)^2$ Sviluppo i quadrati e ottengo una legge del tipo $D = a \cdot m^2 + b \cdot m + c$ con $a = \dots$ $b = \dots$ $c = \dots$ Il grafico della legge è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Perciò D è minima per $m = -\frac{b}{2a} = \dots$ Perciò la pendenza m_0 che rende minima la somma dei quadrati degli scarti è data da $m_0 = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_N \cdot y_N}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2} = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} x_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{k=N} x_k^2}$

2. Nei grandi acquedotti pubblici è importante filtrare l'acqua e trattare i sedimenti ottenuti prima di distribuirla; nella tabella qui sotto X indica la quantità d'acqua filtrata (misurata in metri cubi) e Y la quantità di sedimenti estratti (misurata in kg).

X	31	33	37	40	45
Y	14,0	17,1	20,4	21,3	27,4

A partire dai dati in tabella risolvi i seguenti quesiti:

a. Per prevedere i futuri sedimenti devi trovare la retta dei minimi quadrati. Spiega perché la retta deve passare per $O(0, 0)$.

.....
.....

b. Completa il calcolo della pendenza m_0 della retta s_0 con l'aiuto di una calcolatrice tascabile

$$m_0 = \frac{31 \cdot 14,0 + \dots}{31^2 + \dots} @$$

c. Come puoi prevedere la quantità di sedimenti che si otterrà dopo aver filtrato $60m^3$ d'acqua?

.....
.....

B. La retta dei minimi quadrati che non passa per O

Ecco un esempio per riflettere.

3. La Capacità Vitale (CV) di una persona è il volume massimo d'aria contenuto nei polmoni dopo un'ispirazione profonda. Per studiare gli effetti del fumo di sigarette, i medici hanno studiato la relazione fra Capacità Vitale e numero di sigarette fumate al giorno in un gruppo di fumatori.

I dati sono raccolti nella tabella qui sotto.

Numero di sigarette X	2	4	6	7	8	10	12	14	16	20
CV (litri d'aria) Y	6,5	6,5	5,9	5,5	5,5	4,8	4,4	4,1	3,8	3,1

Spiega perché la retta s che meglio raccorda i punti sperimentali qui sopra non può passare per $O(0, 0)$.

Ora debbo determinare i coefficienti m_s e q_s nell'equazione della retta s del tipo $Y = mX + q$.

Per determinare m_s e q_s si applica ancora il metodo dei minimi quadrati, in questo caso con lunghi calcoli algebrici, che portano alle seguenti formule:

$$m_s = \frac{(x_1 - M_x) \cdot (y_1 - M_y) + (x_2 - M_x) \cdot (y_2 - M_y) + \dots + (x_N - M_x) \cdot (y_N - M_y)}{(x_1 - M_x)^2 + (x_2 - M_x)^2 + \dots + (x_N - M_x)^2} = \frac{\sum_{k=1}^{k=N} (x_k - M_x) \cdot (y_k - M_y)}{\sum_{k=1}^{k=N} (x_k - M_x)^2}$$

$$q_s = M_y - m_s M_x$$

Dove M_x è la media dei dati X e M_y è la media dei dati Y .

La Retta di Regressione

4. Spiega perché la retta s che meglio raccorda i punti sperimentali passa per il punto $M(M_x ; M_y)$

La retta così trovata prende il nome di **retta di regressione**.

Determinare la retta di regressione che raccorda ad un numero elevato di punti richiede lunghi calcoli, perciò è particolarmente utile un foglio di calcolo che esegue i calcoli in modo rapido e corretto.

5. Apri il file ['Esercizio scheda 1a'](#); troverai:

- il foglio di calcolo, dove sono già inseriti i dati assegnati nella tabella sopra;
- la finestra grafica;
- la finestra Algebra, dove compaiono dati ed equazioni.

Risolvi i seguenti quesiti:

- a. Fai comparire sulla finestra grafica i punti che rappresentano le coppie di dati assegnati.
- b. Fai comparire nella finestra grafica la retta di regressione.
- c. Leggi nella finestra Algebra l'equazione della retta di regressione e scrivila qui.....
- d. Prevedi la Capacità vitale per chi fuma 18 e 22 sigarette al giorno e

Scrivi qui sotto i procedimenti seguiti per rispondere.

..... e

6. Apri il file ['Esercizio scheda 1b'](#); troverai:

- il foglio di calcolo, dove sono inseriti i dati assegnati nel quesito della presentazione;
- la finestra grafica e la finestra Algebra;

Risolvi i seguenti quesiti:

- a. Fai comparire sulla finestra grafica i punti che rappresentano le coppie di dati assegnati.
- b. Fai comparire nella finestra grafica la retta di regressione.
- c. Leggi nella finestra Algebra l'equazione della retta di regressione e scrivila qui.....
- d. Confronta la retta di regressione con la retta passante per O, ottenuta quando abbiamo risolto il quesito di esempio nella presentazione e scrivi qui sotto le tue osservazioni.

.....
.....
.....