PCM4 : Composition de fonction

I/ Définition :

Soient deux fonctions *u* et *v*, la fonction composée de ces deux fonctions est notée :

- $(v°u)(x) = v(u(x))$ qui se lira *v* rond *u*
- $(u°v)(x) = u(v(x))$ qui se lira *u* rond *v*

On retiendra que : $(v°u)(x) \neq (u°v)(x)$

Exemple 1 :

Soient $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$ alors :

- $(v°u)(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$
- $(u°v)(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Exemple 2 :

Soit la fonction *f* définie par :

$f(x) = e^{2x^2+3}$

Cette fonction est une fonction composée avec :

$u(x) = e^x$ et $v(x) = 2x^2 + 3$

II/ Méthodes :

1) Calcul d'images :

Pour calculer l'image d'un nombre *a* par une fonction composée $(u°v)(x)$, on commence par calculer l'image de *a* par *v(x)* puis l'image de *v(a)* par *u(x)*.

Exemple :

Soit *f*, définie par :

$f(x) = (2x^2 + 5x + 8)^2$

f est une fonction composée avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x^2 + 5x + 8$

Si on cherche à calculer l'image de 1 par *f* :

$v(1) = 2 \times 1^2 + 5\times 1 + 8 = 15$

$u(v(1)) = (v(1))^2 = (15)^2 = 225$

Remarque c'est la méthode que les programmes nous demandent d'utiliser, mais cela reviens strictement au même que la méthode habituelle, à savoir remplacer x par le nombre dont on calcule l'image.

2) Dérivation :

Soient *u* et *v* deux fonctions définies et dérivables, nous admettrons que :

$$\big((v°u)(x)\big)' = u'(x) \times v'(u(x))$$

Exemples :

$f(x) = (2x^2 + 5x + 8)^2$

On pose :

$u(x) = 2x^2 + 5x + 8$ $\quad$ $v(x) = x^2$

$u'(x) = 4x + 5$ $\quad$ $v'(x) = 2x$ donc, $v'(u(x)) = 2(2x^2 + 5x + 8)$

Donc :

$f(x) = (4x + 5) \times 2(2x^2 + 5x + 8) = 2(4x + 5)(2x^2 + 5x + 8)$

$g(x) = \ln(7x^2 + 12x - 5)$

On pose :

$u(x) = 7x^2 + 12x - 5$ $\quad$ $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 14x + 12$ $\quad$ $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc, $v'(u(x)) = (14x + 12) \times \frac{1}{7x^2+12x+5} = \frac{14x+12}{7x^2+12x+5}$