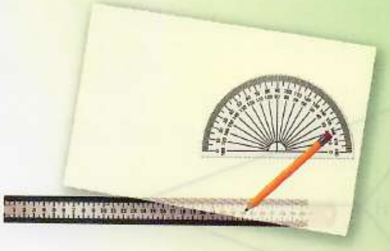
2.5 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน

ในหัวข้อนี้ จะกำหนดเงื่อนไขให้รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน ดังกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม : สำรวจ ด้าน–ด้าน–ด้าน

อุปกรณ์

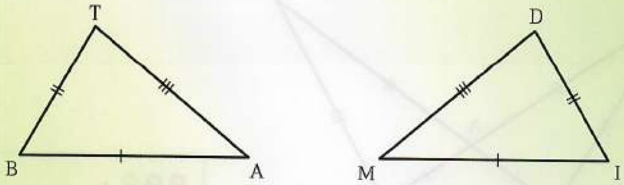
- โพรแทรกเตอร์
- ไม้บรรทัด
- ดินสอ
- กระดาษลอกลาย



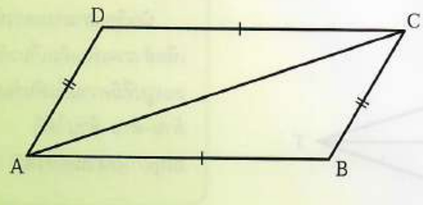
ขั้นตอนการทำกิจกรรม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านที่ยาวเท่ากัน 3 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

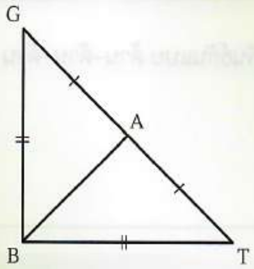
1.



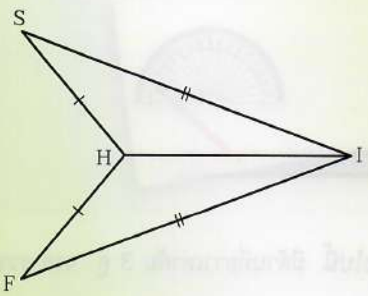
2.



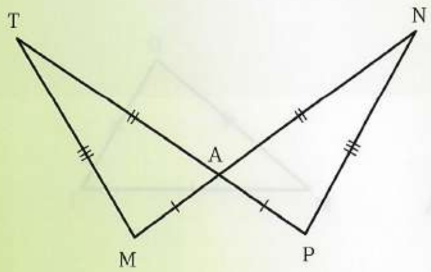
3.



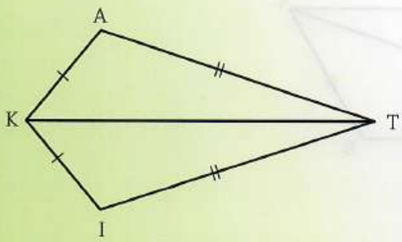
4.



5.



6.



มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน ได้ที่ http://ipst.me/9145

ผลจากการสำรวจข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และเมื่อพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จะเห็นว่าเป็นการกำหนดด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ซึ่งกล่าวว่า**รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน (Side–Side–Side)** หรือเขียนย่อ ๆ ว่า **ด.ด.ด. (SSS)** และผลที่ได้ตามมาคือมุมทั้งสามคู่ จะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

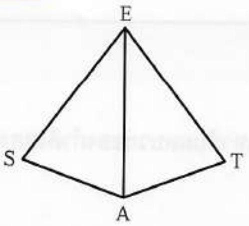
โดยทั่วไป **รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ด.ด. จะเท่ากันทุกประการ** ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน (ด.ด.ด.)
> กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ชวนคิด 2.8

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเป็นรูปที่เท่ากันทุกประการหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1



จากรูป ΔSEA และ ΔTEA มี $SE = TE$ และ $SA = TA$
จงพิสูจน์ว่า $S\hat{E}A = T\hat{E}A$

กำหนดให้ ΔSEA และ ΔTEA มี $SE = TE$ และ $SA = TA$

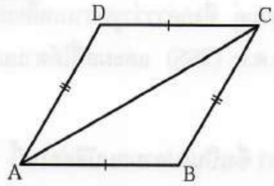
ต้องการพิสูจน์ว่า $S\hat{E}A = T\hat{E}A$

จะพิสูจน์ก่อนว่า $\Delta SEA \cong \Delta TEA$

พิสูจน์ พิจารณา ΔSEA และ ΔTEA

	$SE = TE$		(กำหนดให้)
	$SA = TA$		(กำหนดให้)
	$EA = EA$		($\overline{EA}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta SEA \cong \Delta TEA$		(ด.ด.ด.)
จะได้	$S\hat{E}A = T\hat{E}A$		(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2



กำหนด ΔABC และ ΔCDA ดังรูป ถ้า $A\hat{C}B = 30^\circ$ จงหาขนาดของ $C\hat{A}D$

จะแสดงก่อนว่า $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

วิธีทำ พิจารณา ΔABC และ ΔCDA

	$AB = CD$	(กำหนดให้)
	$BC = DA$	(กำหนดให้)
	$AC = CA$	($\overline{AC}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	(ด.ด.ด.)
จะได้	$A\hat{C}B = C\hat{A}D$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
เนื่องจาก	$A\hat{C}B = 30^\circ$	(กำหนดให้)
ดังนั้น	$C\hat{A}D = 30^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน)

ตอบ 30°

123 มุมคณิต

นักเรียนได้รู้จัก**บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส** มาแล้ว ซึ่งกล่าวว่า

"สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่ง เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก"

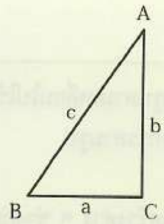
จะเห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นการนำผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาเป็นเหตุ และนำเหตุมาเป็นผล ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มีข้อความที่เป็นเหตุและผล ดังนี้

เหตุ : มีรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ผล : กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม

เมื่อนำผลมาเป็นเหตุ และนำเหตุมาเป็นผล ก็จะได้บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสดังกล่าว การพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทำได้ดังนี้

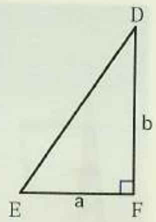


กำหนดให้ ΔABC มี $AB = c$ หน่วย $BC = a$ หน่วย $AC = b$ หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$

ต้องการพิสูจน์ว่า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

พิสูจน์ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF โดยมี $D\hat{F}E$ เป็นมุมฉาก ให้ด้านประกอบมุมฉาก EF และ DF ยาว a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ ดังรูป

แนวคิดในการพิสูจน์ ต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF อีกรูปหนึ่ง ให้ด้านประกอบมุมฉาก EF และ DF ยาว a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ แล้วแสดงให้เห็นว่า $\Delta DEF \cong \Delta ABC$



$EF = BC = a$ และ $DF = AC = b$				(จากการสร้าง)
จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF จะได้	DE^2	$=$	$a^2 + b^2$	(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)
จาก ΔABC	c^2	$=$	$a^2 + b^2$	(กำหนดให้)
ดังนั้น	DE^2	$=$	c^2	(สมบัติของการเท่ากัน)
นั่นคือ	DE	$=$	c	
แต่	AB	$=$	c	(กำหนดให้)
จะได้	DE	$=$	AB	(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น	ΔDEF	$\cong$	ΔABC	(ด.ด.ด.)
จะได้	$D\hat{F}E$	$=$	$A\hat{C}B$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
เนื่องจาก	$D\hat{F}E$	$=$	90°	(จากการสร้าง)
จะได้	$A\hat{C}B$	$=$	90°	(สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

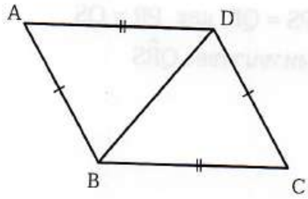
เกร็ดน่ารู้

เราสามารถนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น โครงสร้างของขาตั้งกล้องมีส่วนประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการสามรูป

ในการก่อสร้างต่าง ๆ ช่างก่อสร้างมักต้องสร้างโครงที่มีส่วนประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยม เช่น โครงหลังคา โครงยึดเสา การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้เป็นไปตามแบบที่กำหนด เขาจะวัดและสร้างด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมให้ยาวเท่ากับความยาวของด้านทั้งสามด้านตามแบบโดยไม่ต้องวัดขนาดของมุม และถือว่า รูปสามเหลี่ยมที่ได้มีขนาดและรูปร่างเป็นไปตามแบบที่กำหนดแล้ว โดยอาศัยสมบัติของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน–ด้าน–ด้าน (ด.ด.ด.) นั่นเอง

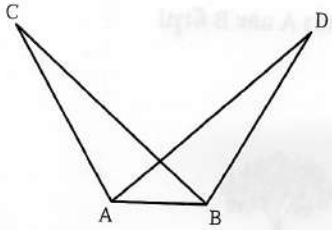
แบบฝึกหัด 2.5

1.



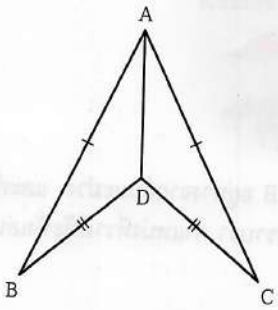
จากรูป กำหนดให้ AB = CD และ DA = BC จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม BD แบ่งรูปสี่เหลี่ยม ABCD ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

2.



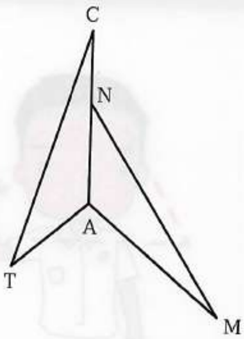
จากรูป กำหนดให้ AC = BD และ BC = AD จงพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = B\hat{D}A$

3.



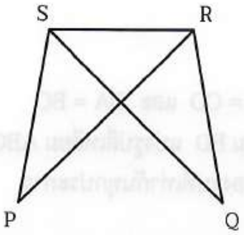
จากรูปที่กำหนดให้ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

4.



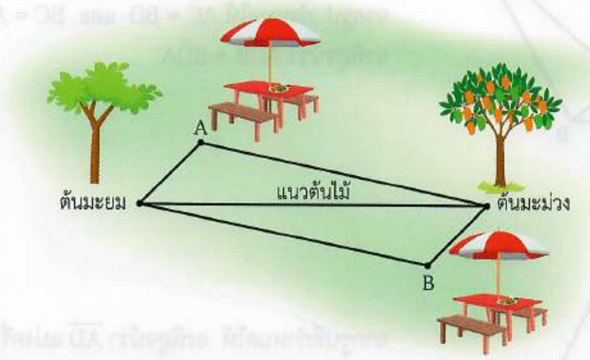
กำหนดให้ AT = AN, CT = MN และ AC = AM ถ้า $M\hat{A}N = 130^\circ$ จงหาขนาดของ $C\hat{A}T$

5.



จากรูป กำหนดให้ PS = QR และ PR = QS
ถ้า $P\hat{S}R = 100^\circ$ จงหาขนาดของ $Q\hat{R}S$

6. พิ้งกี้ต้องการจัดบริเวณสวนหน้าบ้านใหม่ โดยวางโต๊ะนั่งเล่นไว้ที่ตำแหน่ง A และ B ดังรูป



พิ้งกี้ทราบว่า ตำแหน่ง A อยู่ห่างจากต้นมะยมเท่ากับที่ตำแหน่ง B อยู่ห่างจากต้นมะม่วง และตำแหน่ง A อยู่ห่างจากต้นมะม่วงเท่ากับที่ตำแหน่ง B อยู่ห่างจากต้นมะยม อยากทราบว่า ตำแหน่งที่วางโต๊ะนั่งเล่นทั้งสองอยู่ห่างจากแนวต้นไม้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด