2019/20. 3. probléma

Adjuk meg a következő sorozat első *n* tagjának összegét!

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 1$$

Állítások:(1) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ és (2) $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(1)Bizonyítása : teljes indukcióval

$n = 3$esetén:

a sorozat képzési szabály alapján:$a_3 = 2a_2 - a_1 + 1 = 6$, és (1) szerint $a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$.

Indukciós feltétel: $k < n$ esetén $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Be kell látnunk, hogy $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Az indukciós feltétel miatt $a_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ és

$a_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$.

A sorozat képzési szabálya és az indukciós feltétel szerint:

$a_n = 2\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Ezzel az (1) állítást beláttuk.

(2)Bizonyítása : Mivel $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, így

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_1^n n^2 + \frac{1}{2}\sum_1^n n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

.Ezzel az (2) állítást beláttuk.