Definition des Funktionsbegriffs

In den bisherigen Aufgaben ist es darum gegangen, Abhängigkeiten

- durch eine Formel auszudrücken und
- in Tabellenform wiederzugeben

Was haben das Handybeispiel und das Schachtelbeispiel gemeinsam? In beiden Fällen haben wir Vorschriften betrachtet, die es gestatten,

einem gegebenen Objekt	$\longrightarrow$	ein anderes, *davon abhängiges* Objekt
z.B.: die Gesprächszeit *t*	$\longrightarrow$	Die Höhe der Telefonrechnung $H(t)$
z.B.: die Seitenlänge des Quadrats *x*	$\longrightarrow$	Das Volumen der Schachtel *V(x)*

zuzuordnen. Diese Idee der Zuordnung ist in der Mathematik sehr wichtig. Dabei können wir an ganz unterschiedliche Objekte (wie beispielsweise natürliche Zahlen oder reelle Zahlen) denken.

Wir wollen nun etwas genauer formulieren, wie die Idee der Zuordnung für die Mathematik nutzbar gemacht werden kann. Dazu müssen wir – wie es dem Genauigkeitsanspruch der Mathematik entspricht – für jede konkrete Zuordnung festlegen, um welche Objekte es sich dabei handelt. Wir fassen alle möglichen "gegebenen Objekte" in einer Menge A zusammen und stellen uns vor, dass alle möglichen "abhängigen Objekte" in einer Menge B liegen. So gelangen wir zur *Definition des Funktionsbegriffs*, wie er in der Mathematik seit mehr als 100 Jahren verwendet wird:

Definition: Seien A und B zwei Mengen. Eine **Funktion** von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Element der Menge A ein (d.h. *genau* ein) Element der Menge B zuweist.

Bezeichnungen:

- Die Menge A nennen wir **Definitionsmenge**, die Menge B heißt **Zielmenge**.
- Wie andere mathematische Objekte auch werden Funktionen mit Symbolen (in der Regel mit Buchstaben) bezeichnet. Bezeichnen wir eine Funktion von A nach B mit dem Buchstaben f, so schreiben wir dafür auch

  $$f : A \longrightarrow B$$

  (ausgesprochen: "f ist eine Funktion von A nach B ").

- Wir sagen auch: Jedes $x \in A$ wird von der Funktion f auf ein Element von B **abgebildet**. Dieses Element von B schreiben wir als

  $$f(x).$$

  Funktionen werden manchmal auch **Abbildungen** genannt.

- Lässt sich durch einen Term (d.h. durch eine Formel) angeben, wie $f(x)$ aus x ermittelt wird, so sprechen wir von einer "**Termdarstellung** der Funktion f". So ist beispielsweise durch die Termdarstellung

  $$f(x) = x^2$$

  jene Funktion definiert, die jedem Element der Definitionsmenge sein Quadrat zuordnet. Die Aussage $f(x) = x^2$ wird auch als **Funktionsgleichung** bezeichnet. Eine andere Schreibweise dafür ist

  $$f : x \longmapsto x^2.$$

  Eine Termdarstellung ist eine durch einen Term ausgedrückte **Zuordnungsvorschrift**.

GeoGebra gestattet es, eine Funktion, d.h. eine Zuordnungs*vorschrift* einzugeben, um sie später bei Bedarf anwenden zu können.

Funktionen beschreiben Abhängigkeiten

Funktionen beschreiben Abhängigkeiten zwischen Größen.

Wenn eine Größe (z.B. der Flächeninhalt eines Quadrats) von einer anderen Größe (z.B. die Seitenlänge) **abhängt**, so kann diese Abhängigkeit durch eine Funktion beschrieben werden. Bezeichnen wir den Flächeninhalt mit F und die Seitenlänge mit a, so ist $F = a^2$. Das ist zunächst nur eine "Formel".

Motiviert durch diese *Formel* können wir eine *Funktion* definieren:

- Zuordnungsvorschrift (Termdarstellung):

$$F(a) = a^2.$$

Das bedeutet: Der Flächeninhalt wird gewonnen, indem die Seitenlänge quadriert wird.

- Angabe von Definitions- und Zielmenge:

  Definitionsmenge = Menge R^+ aller positiven reellen Zahlen
  Zielmenge = Menge *R* aller reellen Zahlen

  Wir können das in Kurzform als

$$F : R^+ \longrightarrow R$$

  anschreiben. Das bedeutet: Jeder positiven reellen Zahl (der Seitenlänge) wird eine reelle Zahl (der Flächeninhalt) zugeordnet.

Beachte, dass der Begriff der "Funktion" schärfer als jener der "Formel" ist!

Der Name der abhängigen Größe wird oft (wie auch im obigen Beispiel) als Name der Funktion verwendet. Durch die Schreibweise $F(a) = a^2$ wird ausgedrückt, **wie F von a abhängt**.

Die Größe	nennen wir...
a	...die **unabhängige Variable** (das **Argument**) – sie kann innerhalb der Definitionsmenge frei gewählt werden.
$F(a)$	...die **abhängige Variable** (den **Funktionswert**) – für einen gegebenen Wert der unabhängigen Variable ist sie ein Element der Zielmenge.