

4.4 Voorstellingswijzen van driefasige signalen

Vergelijking 4-11 geeft een driefasig stelsel in een dimensieloze grootheid f . Echter, dit kan bijvoorbeeld een driefasig stel spanningen of stromen voorstellen. Als *standaardgedaante* voor harmonische functies wordt een sinusfunctie gekozen.

$$f_{abc}(t) = \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_b(t) \\ f_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_a \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_a) \\ \hat{F}_b \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_b) \\ \hat{F}_c \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_c) \end{bmatrix} \quad 4-11$$

4.4.1 Fasorvoorstelling van elektrische signalen

Vergelijking 4-12 geeft de complexe fasorvoorstelling van vergelijking 4-11. (Genormeerd op de piekwaarde van de functie.) De hoekfrequentie (ω_1) van de fasoren moet daarbij aangegeven worden [13],[8].

$$\underline{\hat{F}}_{abc} = \begin{bmatrix} \hat{F}_a \\ \hat{F}_b \\ \hat{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_a \cdot e^{j(\varphi_a)} \\ \hat{F}_b \cdot e^{j(\varphi_b)} \\ \hat{F}_c \cdot e^{j(\varphi_c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_a \angle(\varphi_a) \\ \hat{F}_b \angle(\varphi_b) \\ \hat{F}_c \angle(\varphi_c) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 \quad 4-12$$

Voor sinusoidale signalen geldt als verband tussen de piekwaarde \hat{F} en effectiefwaarde (RMS-waarde) F :

$$\hat{F} = \sqrt{2} \cdot F \quad 4-13$$

Veelal wordt ook gebruik gemaakt van een complexe voorstelling genormeerd op de effectiefwaarde:

$$\underline{F}_{abc} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underline{\hat{F}}_{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{F}_a \\ \hat{F}_b \\ \hat{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{F}_a}{\sqrt{2}} \angle(\varphi_a) \\ \frac{\hat{F}_b}{\sqrt{2}} \angle(\varphi_b) \\ \frac{\hat{F}_c}{\sqrt{2}} \angle(\varphi_c) \end{bmatrix} \quad 4-14$$

$$= \begin{bmatrix} F_a \angle(\varphi_a) \\ F_b \angle(\varphi_b) \\ F_c \angle(\varphi_c) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1$$

Met de betrekking van Euler¹⁹ kan steeds teruggekeerd worden naar de voorstelling in het tijdsdomein:

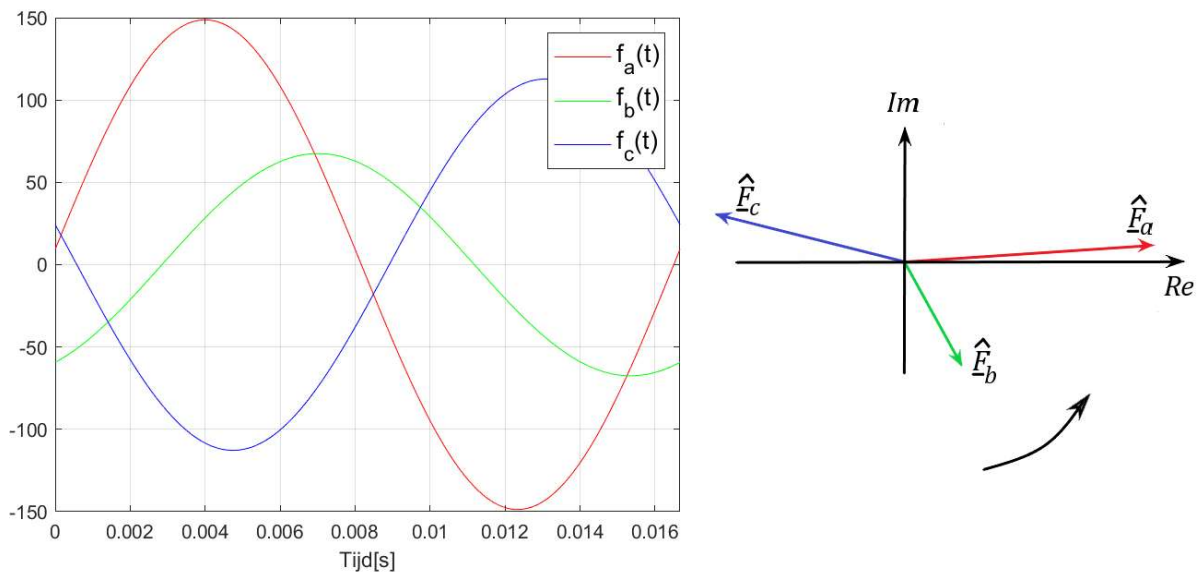
$$f_{abc}(t) = \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_b(t) \\ f_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Jm}(\underline{\hat{F}}_a \cdot e^{j\omega_1 t}) \\ \mathcal{Jm}(\underline{\hat{F}}_b \cdot e^{j\omega_1 t}) \\ \mathcal{Jm}(\underline{\hat{F}}_c \cdot e^{j\omega_1 t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot \mathcal{Jm}(\underline{F}_a \cdot e^{j\omega_1 t}) \\ \sqrt{2} \cdot \mathcal{Jm}(\underline{F}_b \cdot e^{j\omega_1 t}) \\ \sqrt{2} \cdot \mathcal{Jm}(\underline{F}_c \cdot e^{j\omega_1 t}) \end{bmatrix} \quad 4-15$$

¹⁹ $\underline{z} = A \cdot \cos(x) + j \cdot A \cdot \sin(x) = A \cdot e^{j(x)}$; met $\text{Re}(\underline{z}) = A \cdot \cos(x)$ en $\text{Im}(\underline{z}) = A \cdot \sin(x)$

Vergelijking 4-15 kan geïnterpreteerd worden als de projectie op de imaginaire as van de fasoren \hat{F}_{abc} wanneer deze ronddraaien in het complexe vlak met hoeksnelheid ω_1 (in tegenwijzerzin).

Figuur 4-7 geeft een voorbeeld ([7]) bij het geval dat de complexe fasoren genormeerd op de amplitude voldoen aan de waarden weergegeven bij vergelijking 4-16.

$$\hat{F}_{abc} = \begin{bmatrix} 148,6888 \angle (3,59^\circ) \\ 67,4752 \angle (-61,52^\circ) \\ 112,75516 \angle (167,529^\circ) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot 60 \quad \text{4-16}$$



Figuur 4-7: Voorbeeld van de fasorvoorstelling van een ongebalanceerd driefasig stelsel (Gebaseerd op [7])

4.4.2 Voorstelling in symmetrische componenten

Aan de hand van vergelijking 4-11 kunnen drie vormen van symmetrie gedefinieerd worden [4]:

- Indien $\hat{F}_a = \hat{F}_b = \hat{F}_c = \hat{F}_+$ én $\varphi_a = \theta_{f+}$, $\varphi_b = \theta_{f+} - \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_c = \theta_{f+} + \frac{2\pi}{3}$ (met θ_{f+} een constante hoek), dan noemt men $f_{abc,+}(t)$ een direct symmetrisch (+) stelsel.
- Indien $\hat{F}_a = \hat{F}_b = \hat{F}_c = \hat{F}_-$ én $\varphi_a = \theta_{f-}$, $\varphi_b = \theta_{f-} + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_c = \theta_{f-} - \frac{2\pi}{3}$ (met θ_{f-} een constante hoek), dan noemt men $f_{abc,-}(t)$ een invers symmetrisch (-) stelsel.
- Indien $\hat{F}_a = \hat{F}_b = \hat{F}_c = \hat{F}_0$ én $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \theta_{f0}$ (met θ_{f0} een constante hoek), dan noemt men $f_{abc,0}(t)$ een homopolair symmetrisch (0) stelsel.

Indien een driefasig signaal niet kan beschreven worden aan de hand van juist één van deze symmetriën, dan noemt men het ongebalanceerd of asymmetrisch.

De analyse van ongebalanceerde systemen (Figuur 4-7) kan éénvoudiger door de opsplitsing in symmetrische componenten. Elk ongebalanceerd systeem kan opgesplitst worden in de drie symmetrische driefasige stelsels van hierboven (een direct symmetrisch stelsel (+), een invers symmetrisch stelsel (-) en een homopolair (0) symmetrisch stelsel).

De opsplitsing van een ongebalanceerd driefasig stelsel (in complexe vorm $\underline{\hat{F}}_{abc}$; genormeerd op de piekwaarde) in een directe, inverse en homopolaire component gebeurt a.d.h.v. de inverse transformatiematrix van Fortescue (T_s^{-1}) [4]. Er geldt²⁰:

$$\underline{\hat{F}}_{0+-} = \begin{bmatrix} \hat{F}_0 \angle(\theta_{f0}) \\ \hat{F}_+ \angle(\theta_{f+}) \\ \hat{F}_- \angle(\theta_{f-}) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{F}_a \\ \hat{F}_b \\ \hat{F}_c \end{bmatrix}; \quad \underline{a} = 1 \angle \frac{2\pi}{3} \quad 4-17$$

Met:

$$T_s^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \quad 4-18$$

In het kort kan men dus schrijven:

$$\underline{\hat{F}}_{0+-} = T_s^{-1} \cdot \underline{\hat{F}}_{abc} \quad 4-19$$

Op die manier komt men tot een direct, invers en homopolair driefasig stelsel:

$$\underline{\hat{F}}_{abc,+} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{a,+} \\ \hat{F}_{b,+} \\ \hat{F}_{c,+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_+ \angle(\theta_{f+}) \\ \hat{F}_+ \angle(\theta_{f+} - \frac{2\pi}{3}) \\ \hat{F}_+ \angle(\theta_{f+} + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad 4-20$$

$$\underline{\hat{F}}_{abc,-} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{a,-} \\ \hat{F}_{b,-} \\ \hat{F}_{c,-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_- \angle(\theta_{f-}) \\ \hat{F}_- \angle(\theta_{f-} + \frac{2\pi}{3}) \\ \hat{F}_- \angle(\theta_{f-} - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad 4-21$$

$$\underline{\hat{F}}_{abc,0} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{a,0} \\ \hat{F}_{b,0} \\ \hat{F}_{c,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_0 \angle(\theta_{f0}) \\ \hat{F}_0 \angle(\theta_{f0}) \\ \hat{F}_0 \angle(\theta_{f0}) \end{bmatrix} \quad 4-22$$

De overgang van een direct, invers en homopolair systeem naar een ongebalanceerd driefasig stelsel kan via de transformatiematrix van Fortescue (T_s). Er geldt:

$$\underline{\hat{F}}_{abc} = \begin{bmatrix} \hat{F}_a \\ \hat{F}_b \\ \hat{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{F}_0 \angle(\theta_{f0}) \\ \hat{F}_+ \angle(\theta_{f+}) \\ \hat{F}_- \angle(\theta_{f-}) \end{bmatrix}; \quad \underline{a} = 1 \angle \frac{2\pi}{3} \quad 4-23$$

Met:

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \quad 4-24$$

²⁰ Fase a wordt als "referentiefase" genomen.

In het kort kan men dus schrijven:

$$\hat{\underline{F}}_{abc} = T_s \cdot \hat{\underline{F}}_{0+-} \quad 4-25$$

De overgang van een direct, invers en homopolair systeem naar een ongebalanceerd driefasig systeem komt erop neer dat men de volgende bewerking uitvoert:

$$\hat{\underline{F}}_{abc} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_a \\ \hat{\underline{F}}_b \\ \hat{\underline{F}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_{a,+} + \hat{\underline{F}}_{a,-} + \hat{\underline{F}}_{a,0} \\ \hat{\underline{F}}_{b,+} + \hat{\underline{F}}_{b,-} + \hat{\underline{F}}_{b,0} \\ \hat{\underline{F}}_{c,+} + \hat{\underline{F}}_{c,-} + \hat{\underline{F}}_{c,0} \end{bmatrix} \quad 4-26$$

Vergelijking 4-26 kan ook in het tijdsdomein worden uitgeschreven [7]:

$$\begin{aligned} f_{abc}(t) &= \hat{F}_+ \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \theta_{f+}) \\ \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} + \theta_{f+}) \\ \sin(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} + \theta_{f+}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \hat{F}_- \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \theta_{f-}) \\ \sin(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} + \theta_{f-}) \\ \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} + \theta_{f-}) \end{bmatrix} \\ &\quad + \hat{F}_0 \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \theta_{f0}) \\ \sin(\omega_1 t + \theta_{f0}) \\ \sin(\omega_1 t + \theta_{f0}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_b(t) \\ f_c(t) \end{bmatrix} = f_{abc,+}(t) + f_{abc,-}(t) + f_{abc,0}(t) \\ &= \begin{bmatrix} f_{a,+}(t) \\ f_{b,+}(t) \\ f_{c,+}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{a,-}(t) \\ f_{b,-}(t) \\ f_{c,-}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{a,0}(t) \\ f_{b,0}(t) \\ f_{c,0}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 4-27$$

Bemerk dat men vergelijkingen 4-17 tot 4-27 ook kan normeren op de RMS-waarde. Dit kan door gebruik te maken van vergelijking 4-13.²¹

²¹ De geïnteresseerde lezer kan via <https://www.geogebra.org/m/ga7yufha> een animatie vinden die speciaal voor deze masterproef werd gemaakt en kan helpen bij de voorstelling in symmetrische componenten. Voor de tijdsfuncties werd voor de animatie ook een sinusfunctie gekozen.

Het bovenstaande wordt wellicht duidelijker wanneer de opsplitsing in symmetrische componenten eens wordt toegepast op het ongebalanceerde driefasige systeem van Figuur 4-7 [7]. Invullen van vergelijking 4-16 in vergelijking 4-19 geeft de volgende symmetrische componenten:

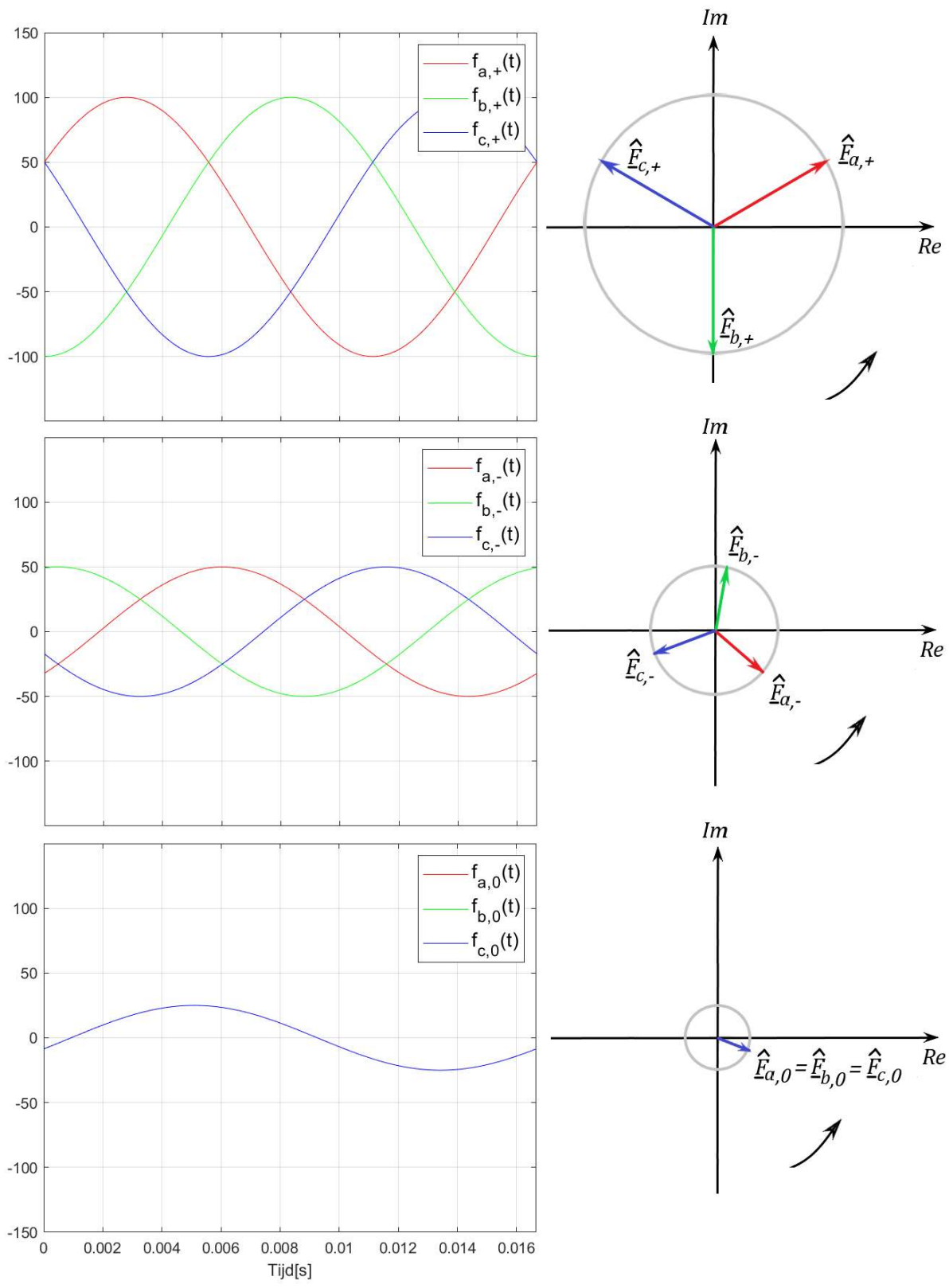
$$\underline{\hat{F}}_{0+-} = \begin{bmatrix} 25\angle(-20^\circ) \\ 100\angle(30^\circ) \\ 50\angle(-40^\circ) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 2 \cdot \pi \cdot 60 \quad \mathbf{4-28}$$

$$\underline{\hat{F}}_{abc,+} = \begin{bmatrix} 100\angle(30^\circ) \\ 100\angle(30^\circ - 120^\circ) \\ 100\angle(30^\circ + 120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle(30^\circ) \\ 100\angle(-90^\circ) \\ 100\angle(-210^\circ) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 \quad \mathbf{4-29}$$

$$\underline{\hat{F}}_{abc,-} = \begin{bmatrix} 50\angle(-40^\circ) \\ 50\angle(-40^\circ + 120^\circ) \\ 50\angle(-40^\circ - 120^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle(-40^\circ) \\ 50\angle(80^\circ) \\ 50\angle(-160^\circ) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 \quad \mathbf{4-30}$$

$$\underline{\hat{F}}_{abc,0} = \begin{bmatrix} 25\angle(-20^\circ) \\ 25\angle(-20^\circ) \\ 25\angle(-20^\circ) \end{bmatrix}; \quad @\omega_1 \quad \mathbf{4-31}$$

Op Figuur 4-8 werden de fasoren en de bijhorende tijdsfuncties weergegeven.



Figuur 4-8: Symmetrische componenten van het ongebalanceerd driefasig systeem van Figuur 4-7 (Gebaseerd op [7])