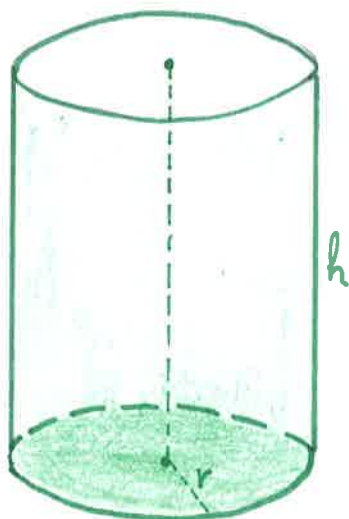


Marta Matašin i Ivana Popović  
2. c razred

V A L J A K



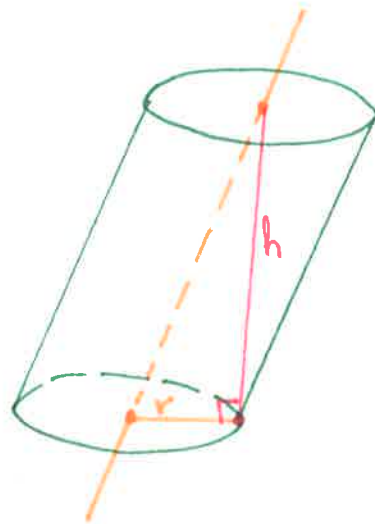
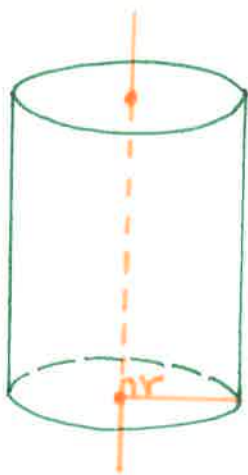
# Općenito

## Definicija

- Valjak je najmanji konveksni skup omeđen s dvama sukladnim krugovima koje nazivamo bazama valjka i zakrivljenom plohom koju nazivamo plaštem
- Valjak je oblo-rotacijsko geometrijsko tijelo
- rotacijska tijela su tijela koja nastaju rotacijom krivulje (geometrijskog lika) oko zadane osi rotacije
- Valjak nastaje tako da dužinama spojimo 2 ista kruga koji se nalaze na paralelnim ravninama

## Vrste

- Valjak je uspravan ako je izvodnica okomita na ravninu baze, a ako to nije slučaj, valjak je kos

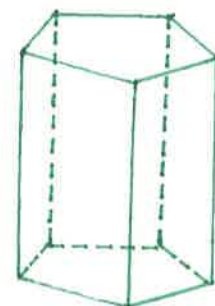


## Razlika između prizme i valjka

- osnovka prizme je mnogokut, a valjka je krug
- prizma je uglato, a valjak oblo geom. tijelo

## Sličnosti između prizme i valjka

- imaju istu formulu za računanje obujma →  $V = B \cdot h$
- imaju 2 baze i plašt

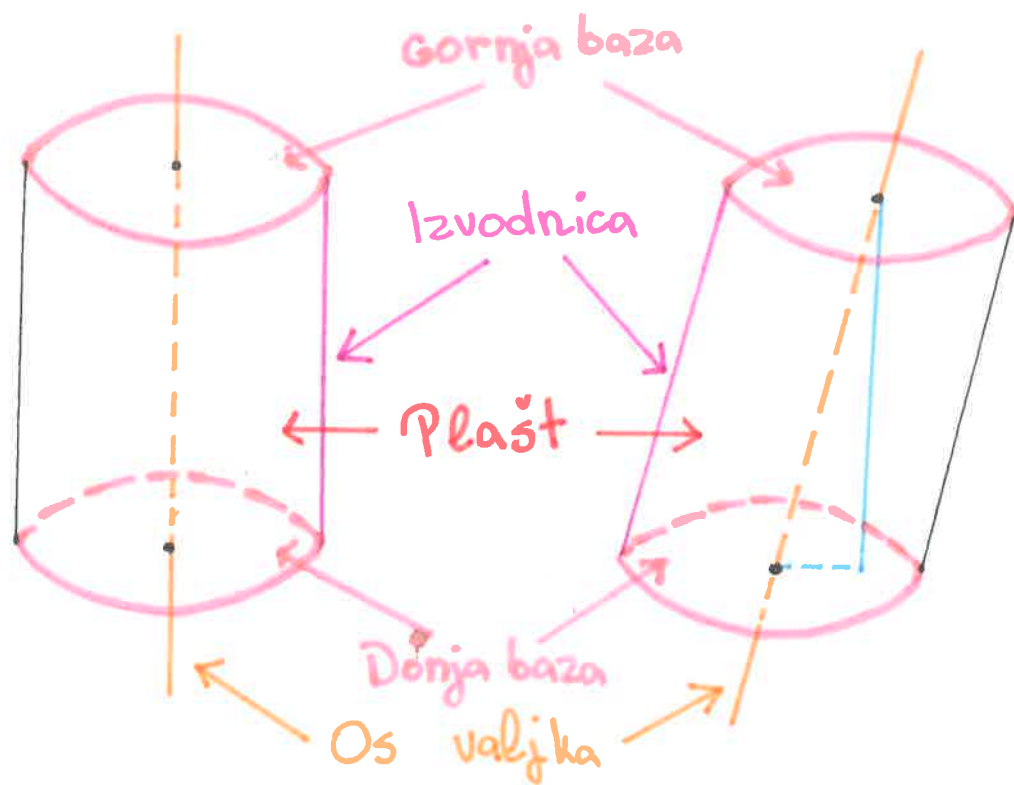


PRIZMA



VALJAK

# Dijelovi valjka



• **os valjka** → je pravac koji prolazi kroz središta gornje i donje baze

• **osnovke valjka** → su krugovi

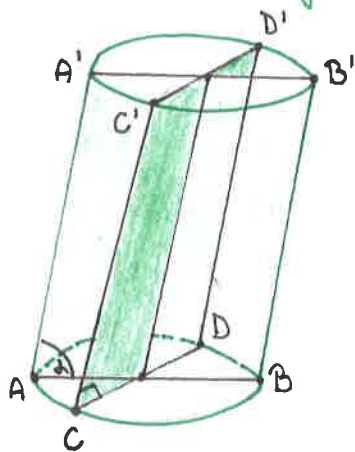
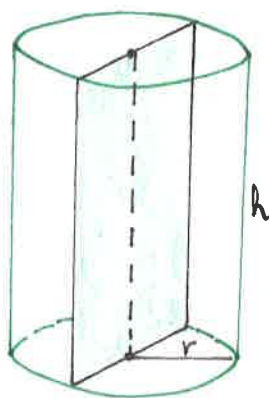
• **visina valjka** → je udaljenost u kojima leže osnovke valjka

• **izvodnica** → dužina koja spaja dvije točke na rubu osnovki i koja je paralelna s osi valjka

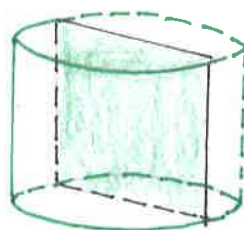
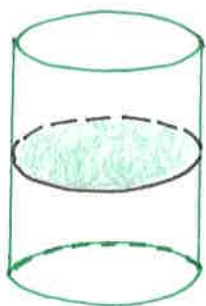
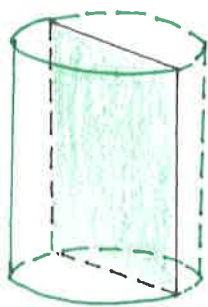
• **plašt** → zakrivljena ploha koja zajedno s njegovim osnovkama omeđuje valjak

## Oсни presjek

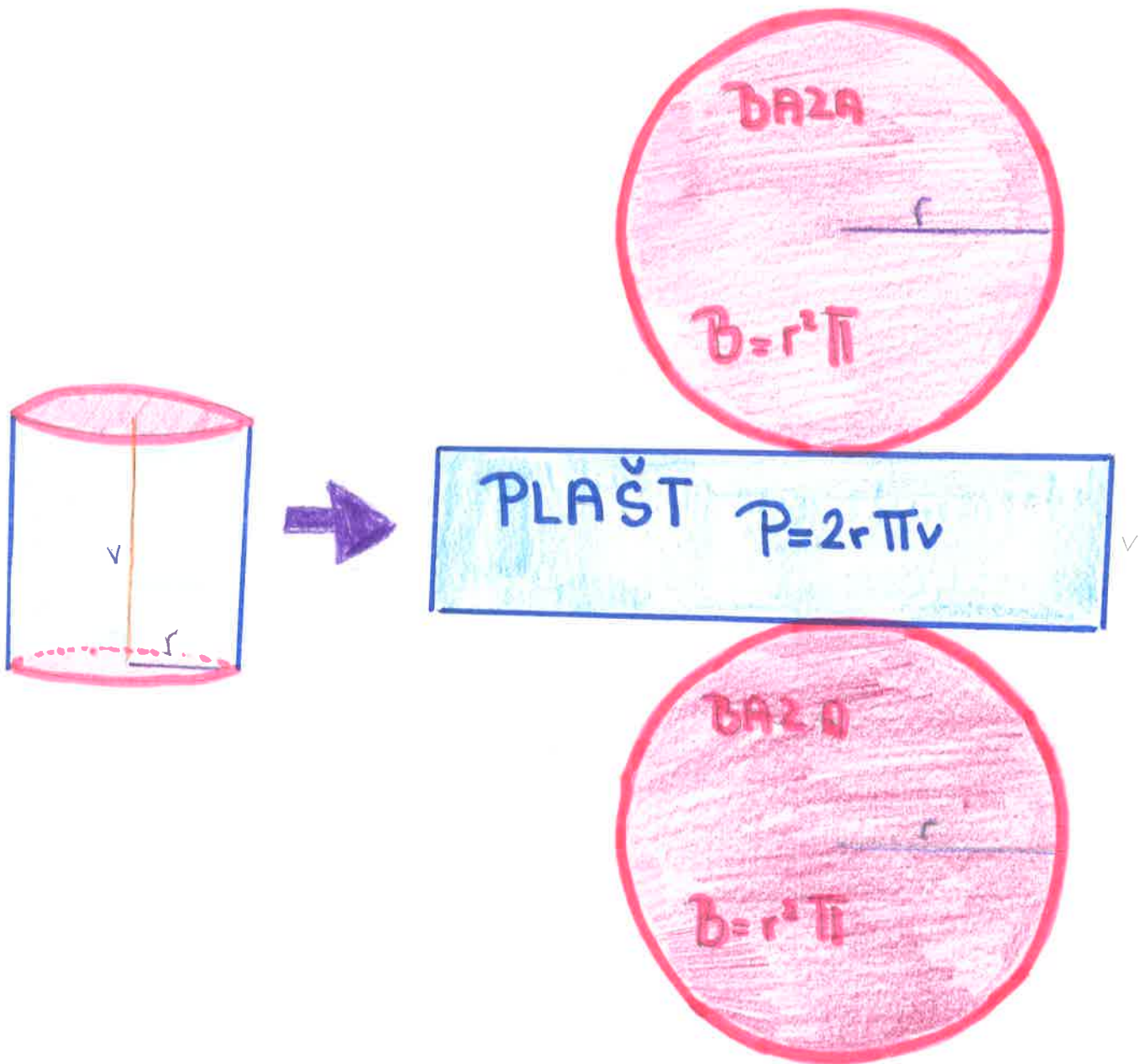
- Osni presjek je lik, dobiven kad presiječemo valjak ravninom koja prolazi središtem njegove baze i paralelna je s izvodnicom
- ako je valjak uspravan, onda su svi osni presjeci sukladni pravokutnici sa stranicama duljina
- formula za površinu osnog presjeka čija je duljina polumjera bazera, a visina  $h$ :  
$$P_p = 2 \cdot r \cdot h$$
- osni presjeci kosog valjka su paralelogrami; međutim oni nisu sukladni
- rezanjem valjka ravninom koja sadrži os valjka i 2 međusobno usporedna promjera njegovih baza dobit ćemo pravokutnik
- rezanjem valjka ravninom koja je usporedna s ravninama kojima pripadaju baze valjka dobivamo krug



- valjak kojem je osni presjek kvadrat naziva se jednakostraničan valjak



# Mreža uspravnog valjka



Mreža valjka sastoji se od dvaju krugova (osnovke valjka) i pravokutnik koji nastaje rezanjem plašta duž njegove izvodnice i razgrtanjem u ravninu.

# Formule

## OPLOŠJE

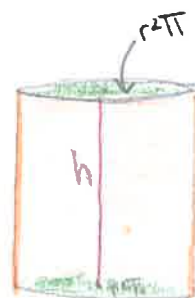
Oplošje je površina svih likova koji ograduju valjak. Računa se kao zbroj dvostruke površine baze  $B$  i površine plašta  $P$ . Plašt je zapravo pravokutnik s jednom stranicom dugačkom kao opseg kruga (baze) polumjera  $r$ , a druga stranica je visina valjka  $v$ .

$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v)$$

## OBUJAM ILI VOLUMEN

Obujam ili volumen jednak je umnošku površine baze i duljine visine valjka.

$$V = B \cdot h = r^2 v \pi$$



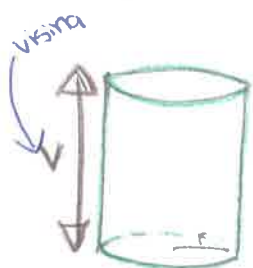
# 1. zadatak, udžbenik matematika 2, 2. dio, 134. str.

Oplošje valjka je  $112\pi \text{ cm}^2$ . Duljine polumjera i visine valjka su u omjeru 2:5. Koliki je obujam valjka?

$$O = 112\pi \text{ cm}^2$$

$$r:h = 2:5$$

$$V = ?$$



$$B = r^2\pi$$

$$O = 2B + P = 2r\pi(r+h)$$

$$V = B \cdot h = r^2\pi h$$

$$2r\pi(r+h) = 112\pi \quad /: \pi$$

$$2r(r+h) = 112 \quad /: 2$$

$$r(r+h) = 56$$

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{2}{5}h$$

$$r = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \text{ cm}$$

$$V = r^2\pi \cdot h$$

$$V = 4^2\pi \cdot 10$$

$$V = 16\pi \cdot 10$$

$$V = 160\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{2}{5}h + h \right) = 56$$

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{2h}{5} + \frac{h}{1} \right) = 56$$

Proširi razlomak do najmanjeg zajedničkog nazivnika

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{2h}{5} + \frac{5 \cdot h}{5 \cdot 1} \right) = 56$$

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{2h}{5} + \frac{5h}{5} \right) = 56$$

napiši brojnike nad zajedničkim nazivnikom

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{2h+5h}{5} \right) = 56$$

Zbroji 2h+5h

$$\frac{2}{5}h \left( \frac{7h}{5} \right) = 56 \quad \leftarrow \text{pomnoži } \frac{2}{5}h \text{ i } \frac{7h}{5}$$

$$\frac{14}{25}h^2 = 56 \quad / \cdot \frac{25}{14} \quad \leftarrow \text{pomnoži obje strane}$$

$$\frac{25}{14} \cdot \frac{14}{25}h^2 = \frac{25}{14} \cdot 56 \rightarrow \text{kratimo 25}$$

$$\frac{1}{14} \cdot 14h^2 = \frac{25}{14} \cdot 56$$

$$56:14=4$$

$$14:14=1$$

$$h^2 = 25 \cdot 4$$

$$h^2 = 100 \quad \sqrt{\quad} \rightarrow \text{kvadriramo}$$

$$h_1 = +10 \quad \checkmark$$

$$h_2 = -10 \quad \times$$

## 2. zadatak, udžbenik matematike 2, 2.dio, 134.str

Visina valjka je za 10cm veća od polumjera osnovke, a optože iznosi  $144\pi\text{cm}^2$ . Odredite duljine polumjera osnovke i visine valjka.

$$h = 10\text{cm} + r \leftarrow \text{polumjer osnovke}$$

$$O = 144\pi$$

$$B = r^2\pi$$

$$P = 2r\pi h$$

\*  $O = 2B + P$

$\downarrow$  površina osnovke  
 $\rightarrow$  površina plašta



\* u ovom zadatku ćemo visinu označiti s malim slovom v

$$r, h = ?$$

$$O = 2 \cdot (r^2\pi) + 2r\pi h$$

$$O = 2 \cdot (r^2\pi) + 2r\pi \cdot (10+r)$$

$$144\pi = 2r^2\pi + 20r\pi + 2r^2\pi$$

$$4r^2\pi + 20r\pi - 144\pi = 0 \quad /: \pi$$

$$4r^2 + 20r - 144 = 0 \quad \leftarrow \text{kvadratna jednačba}$$

FORMULA:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-20 + \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-144)}}{2 \cdot 4}$$

$$r_1 = \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 2304}}{8}$$

$$r_1 = 4\text{cm} \quad \checkmark$$

$$r_2 = \frac{-20 - \sqrt{20^2 + 2304}}{8}$$

$$r_2 = -9\text{cm} \quad \times$$

$$h = 10 + r$$

$$h = 10 + 4$$

$$h = 14\text{cm}$$

kalkulator  
Mode 5.3



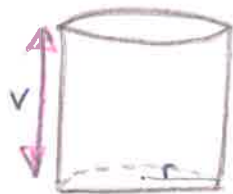
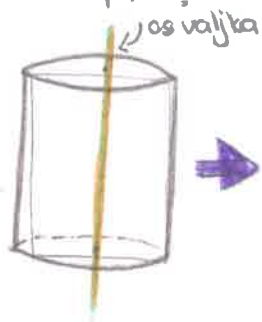
# 6. zadatak, udžbenik matematika 2, 2. dio, 134. str

Opseg osnovnog presjeka uspravnog valjka je 20cm, a površina tog presjeka 16cm<sup>2</sup>. Izračunajte oplošje i volumen valjka.

$O_0 = 20\text{cm} \Rightarrow$  opseg osnovnog presjeka

$P_0 = 16\text{cm}^2 \Rightarrow$  površina osnovnog presjeka

$O_1, V = ?$



$B = r^2 \pi \Rightarrow$  baza

$O = 2B + P = 2r\pi(r+h) \Rightarrow$  OPLOŠJE

$V = B \cdot h = r^2 \pi \cdot h \Rightarrow$  VOLUMEN

$2 \cdot 2r + 2 \cdot h = 20$

$4r + 2h = 20$

← jedna jednačina s dvije nepoznane

$2r \cdot h = 16 \Rightarrow r = \frac{16}{2h}$

$2r \cdot h = 16 \quad | : 2h$

$r = \frac{16}{2h} \quad | : 2$

$r = \frac{8}{h}$

uvrštimo u jednačinu

$r_1 = \frac{8}{v_1} = \frac{8}{8} = 1\text{cm}$

$r_2 = \frac{8}{v_2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$

$4 \cdot \frac{8}{h} + 2h = 20$

$\frac{32}{h} + 2h = 20 \quad | \cdot h$

$32 + 2h^2 = 20h$

$2h^2 - 20h + 32 = 0 \quad | : 2$

$h^2 - 10h + 16 = 0$

$h_1 = 8\text{cm}$

$h_2 = 2\text{cm}$

sve na jednu stranu  
jednako je nula  
(x<sup>2</sup>, x, 1)  
↳ 2x<sup>2</sup>, 20x, 32

$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = 1$   
 $b = -10$   
 $c = 16$  } uvrštimo u formulu

kvadratna jednačina

↘ dva rješenja

$O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi (r_1 + h_1)$

$O_1 = 2 \cdot 1 \cdot \pi (1 + 8)$

$O_1 = 18\pi\text{cm}^2$

$O_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi (r_2 + h_2)$

$O_2 = 2 \cdot 4 \cdot \pi (4 + 2)$

$O_2 = 48\pi\text{cm}^2$

$V_1 = r_1^2 \pi \cdot h_1$

$V_1 = 1 \cdot \pi \cdot 8$

$V_1 = 8\pi\text{cm}^3$

$V_2 = r_2^2 \pi \cdot h_2$

$V_2 = 32\pi\text{cm}^3$

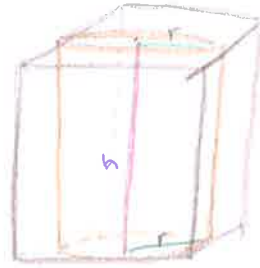
## 9. zadatak, udžbenik matematika 2, 2. dio, 134. str.

Iz mjedne kocke brida 10cm valja istokariti valjak s osnovkama upisanima stranama kocke. Kolika će masa mjedi pitom otpasti ako je gustoća mjedi  $8500 \text{ kg/m}^3$ ?

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$\rho_{\text{mJED}} = 8500 \text{ kg/m}^3$$

$$m = ?$$



$$\Delta V = V_{\text{KVADRAT}} - V_{\text{VALJAK}}$$

$$r_{\text{valjak}} = \frac{a}{2} = 5$$

$$h_{\text{valjak}} = 10 \text{ cm}$$

$$V_{\text{VALJAK}} = r^2 \pi h$$

$$V_{\text{VALJAK}} = 5^2 \pi \cdot 10$$

$$V_{\text{VALJAK}} = 250 \pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{KVADRAT}} = a^3$$

$$V_{\text{KVADRAT}} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = 1000 \text{ cm}^3 - 250 \pi \text{ cm}^3 = 214.60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm} &= 10^{-2} \text{ m} \\ 1 \text{ cm}^3 &= 10^{-6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 8500 \text{ kg/m}^3 \cdot 214.60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

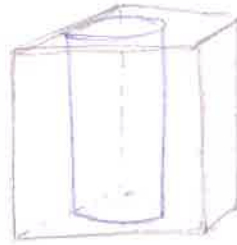
$$m = 1.824 \text{ kg}$$

# 9. zadatak, udžbenik matematika 2, 2. dio, 134. str.

## 2. NAČIN

$$\rho_{\text{MED}} = 8500 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$



$$V_{\text{KOCKA}} = a \cdot a \cdot a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$V_{\text{VALJAK}} = r^2 \pi h = \left(\frac{0.1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.1 = 7.854 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$h_{\text{VALJAK}} = h_{\text{KOCKA}} = a = 0.1 \text{ m}$$

$$r_{\text{VALJAK}} = \frac{a}{2} = \frac{0.1}{2}$$

polu brida  
kocke

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \text{formula za gustoću}$$

$$M_{\text{KOCKA}} = \rho_{\text{MED}} \cdot V_{\text{KOCKA}}$$

$$M_{\text{KOCKA}} = 8500 \text{ kg/m}^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 8.5 \text{ kg}$$

$$M_{\text{VALJAK}} = \rho_{\text{MED}} \cdot V_{\text{VALJAK}}$$

$$M_{\text{VALJAK}} = 8500 \text{ kg/m}^3 \cdot 7.854 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 6.6759 \text{ kg}$$

$$M_{\text{KOCKA}} - M_{\text{VALJAK}} = 8.5 \text{ kg} - 6.6759 \text{ kg} = 1.824 \text{ kg}$$