Formes mathématiques

Le théorème des calissons

« Quelle belle preuve ! » s'exclame parfois le mathématicien heureux devant une démonstration à la fois simple et élégante, où l'on a évité les longs calculs fastidieux et les arguments trop techniques, remplacés par une fulgurance, une idée géniale qui vient justifier comme une évidence la pertinence d'une intuition mathématique. Le théorème des calissons nous en offre un très bon exemple.

PAR **GUILLAUME REUILLER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Les calissons, vous connaissez ? Il s'agit d'une spécialité de la région d'Aix-en-Provence, à base de sucre, de poudre d'amande et de melon confit. Mais plus que sa composition, c'est plutôt la forme de cette confiserie qui va nous intéresser ici : un calisson est un losange constitué de deux triangles équilatéraux collés base à base. Les angles entre deux côtés consécutifs sont donc de 60° ou 120° (fig. 1). Nous oublierons volontairement dans cet article que les sommets d'un « vrai » calisson sont légèrement arrondis.

Le plus souvent, ces calissons sont rangés dans une boîte elle-même en forme de calisson. Imaginons que, pour se démarquer de ses confrères, un confiseur décide de les placer dans une boîte en forme d'hexagone régulier. Peut-elle être entièrement recouverte de calissons, sans qu'il n'y ait d'espaces vides ni de chevauchements ? Cette question paraît moins saugrenue quand on sait que l'on peut paver l'ensemble d'un plan avec des calissons, si l'on en dispose à foison.

Et la réponse est positive : si l'on choisit pour unité le côté d'un calisson, des calissons de côté 1 pavent tout hexagone régulier de côté n, où n est un entier plus grand que 2 (fig. 2). Le nombre de calissons disposés dans la boîte est alors $3n^2$ (le lecteur friand de défis mathématiques n'aura aucun mal à le démontrer). Ce résultat peut déjà surprendre, mais vous êtes loin d'avoir tout vu...

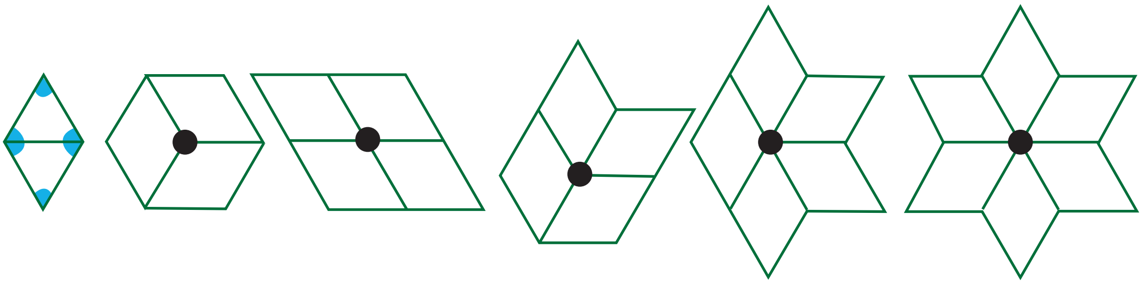

Figure 1. **Pavons avec des calissons...**
Un calisson est un losange dont les angles entre deux côtés consécutifs sont de 60° (en bleu sur le dessin) ou 120°. Il y a cinq façons de disposer des calissons autour d'un même point (en noir sur le dessin) sans laisser d'espace vide, et sans recouvrement : une en utilisant 3 calissons, deux en utilisant 4, et deux autres en utilisant respectivement 5 et 6 calissons.

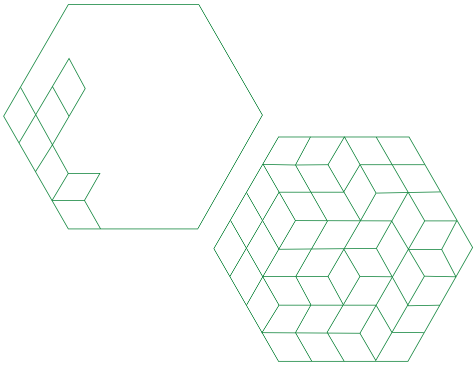

Figure 2. **Une boîte hexagonale de calissons.**
On peut remplir un hexagone régulier de côté 4 avec des calissons de côté 1.

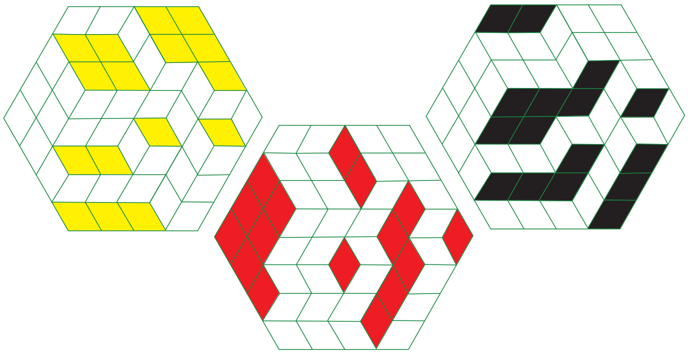

Figure 3. **Un peu de coloriage.**
Les calissons de la boîte hexagonale sont dans trois directions différentes. Pour chacune, une couleur : jaune, rouge ou noir. Dans chacune de ces trois directions, les calissons ont des côtés parallèles à deux côtés consécutifs de l'hexagone.

PRENONS DE LA HAUTEUR

Si nous observons bien ce pavage d'un hexagone régulier par des calissons, nous remarquons que ces derniers sont orientés suivant trois directions différentes, désignées en jaune, en rouge et en noir sur la figure 3. Comptez le nombre de calissons dans chacune de ces trois directions : que constatez- vous ? Il y en a le même nombre. Et ce n'est pas un hasard dû à une configuration particulière, mais un résultat général connu sous le nom de « théorème des calissons » : dans un pavage d'hexagone régulier par des calissons tous identiques, le nombre de losanges placés dans chacune des trois directions possibles est le même.
Réfléchissez un peu à la manière dont nous pourrions démontrer ce résultat. *A priori*, la preuve ne semble pas complètement évidente. Pourtant, une idée simple et géniale suffit à nous convaincre intuitivement que ce théorème est vrai. Il suffit de regarder le pavage sous un autre angle et d'y voir... un empilement de cubes.
Prenons $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubes tous identiques, coloriés et placés de telle façon que la face du dessus soit noire, celle de devant jaune et celle de droite rouge. Empilons-les de manière à obtenir un cube ressemblant à un célèbre casse-tête résolu (fig. 4a). Petite remarque au passage : si nous oublions qu'il s'agit d'un volume, nous pouvons y voir un hexagone, ici non régulier. Surtout, le nombre de faces des petits cubes jaunes, rouges et noirs visibles est égal pour chacune des couleurs (à 16).

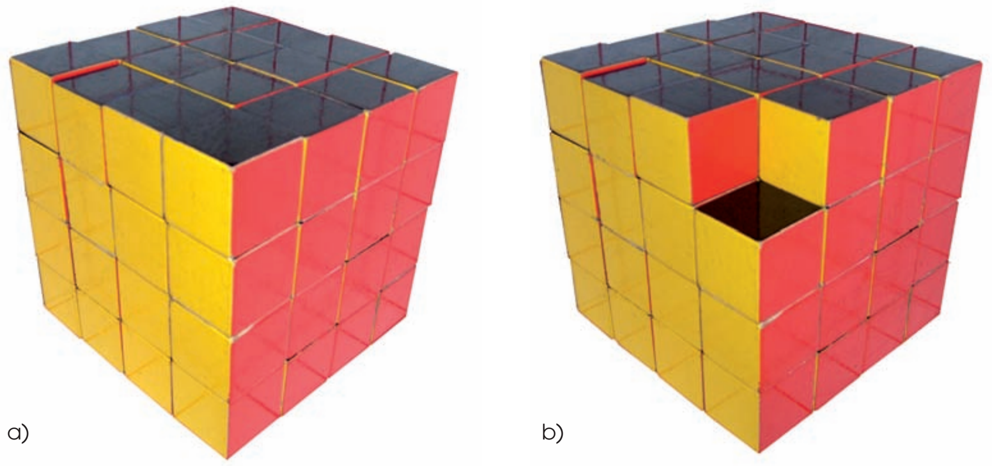

Figure 4. Un cube avec des cubes. Si l'on retire un petit cube placé à l'extérieur du grand cube a), cela ne change pas le nombre de carrés jaunes, rouges et noirs visibles b).

JOUONS AVEC DES CUBES

Si nous enlevons un petit cube situé à l'extérieur du grand cube (fig. 4b), nous constatons que le nombre de carrés jaunes, rouges et noirs visibles est inchangé et donc toujours égal par couleur. En effet, la face noire du cube que l'on a enlevé est remplacée par la face noire du cube située en dessous de lui. Idem pour les faces jaunes et rouges avec les cubes qui sont derrière et à gauche du cube en moins. Et si nous continuons à enlever des cubes extérieurs, ce sera toujours le cas, quitte à colorier le « fond » du cube quand nous enlevons tous les cubes d'une rangée. Or il est possible, en enlevant un certain nombre de cubes (vous pouvez toujours vous amusez à trouver lequel...), de construire un empilement qui ressemble à s'y méprendre au pavage d'un hexagone avec des calissons (fig. 5). Plus précisément si, sur notre pavage, nous colorions tous les calissons dans la même direction respectivement en noir, jaune et rouge, nous obtenons une représentation plane de notre empilement de cubes. Puisque le nombre de faces jaunes, rouges et noires est identique sur l'empilement, nous en déduisons immédiatement le théorème des calissons.

Cette méthode nous rappelle que, même dans un problème de géométrie plane, il ne faut pas oublier que nous vivons dans un monde à trois dimensions... Et il y a beaucoup d'autres exemples de propriétés mathématiques qui se démontrent en interprétant une figure plane comme la projection d'une figure de l'espace.

Il existe d'autres preuves de ce théorème (encadré *Pour les plus sceptiques*). Mais celle-là, qui consiste à colorier le pavage en trois couleurs pour mieux y voir la représentation en perspective d'un empilement de cubes, est probablement la plus « belle ». Même si, en fait, pour que cet argument constitue une preuve rigoureuse du théorème, il faudrait montrer que tout pavage d'un hexagone régulier par des calissons peut être considéré comme la représentation plane d'un empilement de cubes colorés, ce qui est loin d'être évident ! Cet exemple nous montre qu'en mathématiques, il ne suffit pas toujours d'avoir une bonne idée pour en faire une preuve : il faut, la plupart du temps, la consolider pour qu'elle devienne une démonstration mathématiquement acceptable.

Ces problèmes de calissons vous inspirent-ils ? Alors, essayez de déterminer les empilements de cubes correspondants aux dessins de la figure 1.

En voici un autre : quel est le meilleur rangement de calissons dans une boîte en forme de calisson ? Est-il possible de paver entièrement un calisson par d'autres calissons ? Et si oui, quelles sont les dimensions de la boîte par rapport à celle d'un calisson ? Une chose est sûre : cette question est plutôt celle d'un client gourmand. Le confiseur, lui, a tout intérêt à ce que l'espace vide entre les calissons soit le plus grand possible tout en restant raisonnable... De son point de vue, quelle forme donner à la boîte pour que le nombre maximal de calissons que l'on puisse ranger dedans soit le plus petit possible ? **G. R.**

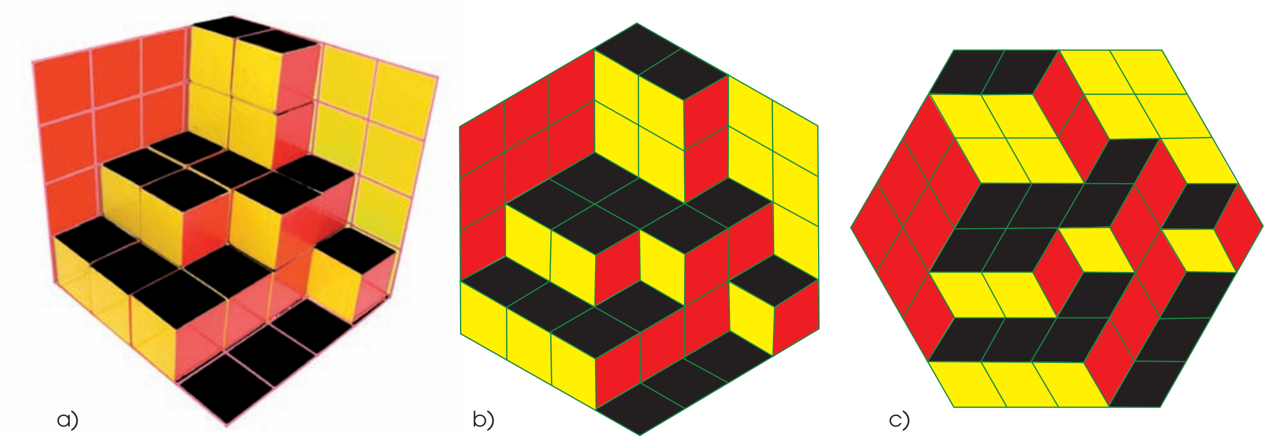

Figure 5. Des cubes aux calissons, et vice versa. a) Empilement de cubes obtenu en enlevant des cubes à un cube complet, toujours par l'extérieur. b) Représentation plane de cet empilement de cubes. En l'inclinant de 30° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on obtient la figure c) qui est l'association des trois coloriages de la figure 3.

Pour les plus sceptiques

Pour ceux qui n'ont pas été suffisamment convaincus par l'idée développée dans cet article, voici des éléments d'une autre démonstration du théorème des calissons, un peu plus technique mais qui reste relativement simple. Son point de départ est le fait qu'il existe, dans le pavage d'un hexagone régulier par des calissons, des « chaînes » entre deux côtés parallèles de l'hexagone. Ces chaînes sont telles que deux losanges successifs ont un côté commun et parallèle aux côtés de l'hexagone d'où part et où arrive cette chaîne (fig. I). Ces chaînes sont donc toujours constituées de calissons disposés dans seulement deux directions différentes. Puisqu'il y a trois couples de côtés parallèles dans un hexagone régulier, il y a, par définition, trois types de chaînes. Les premières sont constituées uniquement de calissons jaunes et noirs, les secondes de calissons noirs et rouges et les troisièmes de calissons jaunes et rouges. Observons attentivement ces chaînes. Combien y en a-t-il de chaque type ? On peut aisément se convaincre intuitivement que deux chaînes de même type sont nécessairement disjointes ; il y a donc autant de chaînes que de points de départ de chaînes, c'est-à-dire de calissons placés le long d'un même côté de la boîte. Pour un hexagone de côté n, il y a exactement n losanges dont un des côtés est contenu dans celui d'un côté de l'hexagone. Il y a donc n chaînes de chaque type. C'est presque fini : il suffit de constater que tout losange noir peut être défini comme l'intersection d'une chaîne de losanges jaunes et noirs et d'une chaîne de losanges rouges et noirs (fig. II). Il y a n x n = n^2 rencontres possibles entre n chaînes du premier type et n chaînes du second type, donc n^2 losanges noirs. Le raisonnement reste valable pour les losanges jaunes et rouges, qui sont donc aussi en nombre n^2. D'où le résultat. Attention : pour être parfaitement rigoureux, il faudrait démontrer que tout calisson appartient bien à deux chaînes et seulement deux chaînes.

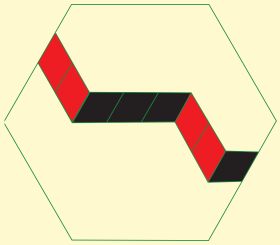

Figure I. Une chaîne de calissons.

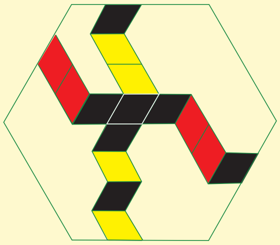

Figure II. Quand deux chaînes de calissons se rencontrent.