Historische Aspekte der Analysis – dynamisch visualisiert

Hans-Jürgen Elschenbroich

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$\sum f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x)dx$$

AK MDW 28.9.2018, Essen

GeoGebra: www.geogebra.org/m/**hymsqdyg**

Agenda

1. **Historische Aspekte** (LEIBNIZ & Co)
   - Differenziale und Differenzialquotient,
   - charakteristisches Dreieck
   - Indivisible
2. **Dynamische Visualisierung** (mit GeoGebra)
3. **Strenge und Intuition**
4. **Sinn heute**

GeoGebra: www.geogebra.org/m/**hymsqdyg**

1. Historische Aspekte (LEIBNIZ & CO)

1. **Differenziale, Differenzialquotient**
   LEIBNIZ
2. **Charakteristisches Dreieck**
   PASCAL, LEIBNIZ
3. **Indivisible**
   Indivisible: CAVALIERI und LEIBNIZ
4. **Bezeichnungen**
   Differenzialquotient, Integralzeichen: LEIBNIZ

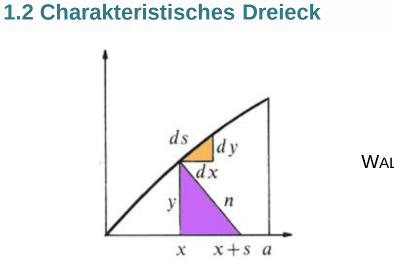
1.1 Differenziale, Differenzialquotienten

Differenziale wurden zu LEIBNIZ' Zeiten als beliebig kleine, aber von Null verschiedene Objekte dx und dy verstanden, aus denen dann das Verhältnis, der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ gebildet wurde.
Dieser gab die Steigung der Tangente an.

Dies war ein einerseits fruchtbarer, andererseits problematischer Umgang mit dem Unendlichkleinen.

Leibniz versuchte, das infinitesimale Dreieck vergrößert sichtbar zu machen.

1.2 Charakteristisches Dreieck



Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ

WALTER, S. 234

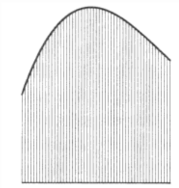
LEIBNIZ konstruierte zum infinitesimalen Dreieck dx-dy-ds, dem **charakteristischen Dreieck,** ähnliche Dreiecke mit gleichen Seitenverhältnissen.

1.3 Indivisible

atomis (gr.), *indivisibel* (lat.): unteilbar, nicht teilbar.
„Die Indivisiblen sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze." (Wußing, S. 159)

Bild: Perlen und Kette
Bild: Dielen und Boden
Bild: Blätter und Papierstapel
Bild: Computertomographie

1.4 Indivisible und Flächeninhalt



CAVALIERIS Indivisiblenmethode

WALTER, S. 194

Zur Berechnung von Flächen unter dem Graphen von f werden beliebig dünne Rechtecke $f(x) \cdot dx$ gebildet, die dann alle aufsummiert werden.

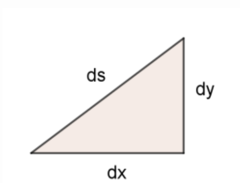
1.5 Integral

Bei der Summation der indivisiblen Rechtecke $f(x) \cdot dx$ schrieb LEIBNIZ unter das Summenzeichen Σ zunächst einfach ***omn***. (*omnia*, alle).

1675 benutzt er erstmals das Integralzeichen $\int$ als stilisiertes Summenzeichen (WALTER, S. 195).

$$\sum_{omn.} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

1.6 Indivisible und Kurvenlänge



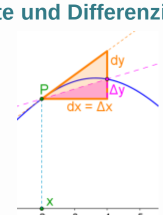
$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

Den Graphen einer (stetigen) Funktion f verstand man insgesamt aus infinitesimal kleinen, indivisiblen Stückchen ds zusammengesetzt, die alle aufsummiert werden (COLERUS, S. 267) und die Kurvenlänge s ergeben.

2. Dynamische Visualisierung

1. **Differenziale, Differenzialquotient**
2. **Charakteristisches Dreieck**
3. **Flächen und Körper als Summe von Indivisiblen**
4. **Kurvenlänge**

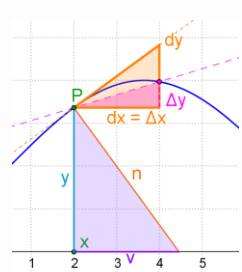
2.1 Tangente und Differenziale



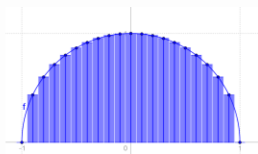
Differenzial-Figur aus Folie 1.1 mit GeoGebra dynamisieren:
- Funktion f veränderbar
- *P* veränderbar
- Δx veränderbar, kann sehr klein werden. Grenzprozess $\Delta x \to 0$ dynamisch visualisieren.
- Mit der Funktionenlupe betrachten.

2.2 Differenziale und charakteristisches Dreieck

Ergänzte Figur des charakteristischen Dreiecks (Folie 1.2) :



2.3 Kreisfläche als Summe $f(x) \cdot dx$

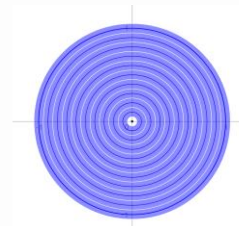


$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

(ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018)

Indivisiblen-Figur aus Folie 1.4 dynamisieren:
- achsenparallele Strecken/ Rechtecke $f(x) \cdot dx$
- Prinzip für kleine ***n*** bzw. große dx verstehen
- Funktion ***f*** veränderbar
- Grenzen ***a*** und ***b*** veränderbar
- Dynamisches ‚Füllen' möglich
- ***n*** (und damit Δx) veränderbar

2.4 Kreisfläche als Summe von Kreislinien

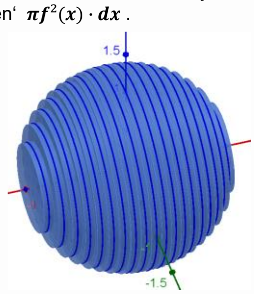


(ELSCHENBROICH & SEEBACH 2018)

Auch gekrümmte Linien sind als Indivisible möglich,
z.B. Kreis aus schlauchartigen konzentrischen Kreislinien.
Idee: Übertragen auf den Ansatz mit achsenparallelen
Strecken/Rechtecken (Kreisringe ‚aufschneiden').

2.5 Kugel als Summe von indivisiblen Zylindern

Aus den Rechtecken $f(x) \cdot dx$ in Figur 2.3 werden
durch Rotation um die x-Achse zylindrische
‚Scheiben' $\pi f^2(x) \cdot dx$.



2.8 Kurvenlänge

- Länge des Graphen von f auf [*a*, *b*] :

$$s = \sum_{omn.} ds = \sum_{omn.} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sum_{omn.} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

- Prozess: Annäherung durch (Sehnen-)Polygonzüge.
Anzahl der Sehnen n und damit Δx veränderbar.

3. Strenge und Intuition

1. **Anfänge der Analysis**
2. **Intuition**
3. **Leibniz und Strenge**

3.1 Die Anfänge der Analysis

Aufkeimen der Analysis: wenig formal, viel intuitiv.
Anfangs eher mystisch und dunkel und anfällig für
Fehler und Paradoxien.
Aber dennoch Motor der Entwicklung über 150 Jahre!

Erst viel später exakte und strenge Basis mit
Grenzwerten durch CAUCHY, WEIERSTRAß und RIEMANN.

Zuerst: Differenziale als Objekte, als Dinge an sich, mit
denen man dann die Steigung/ Ableitung als Quotient
berechnete.

3.2 Intuition

LEIBNIZ, CAVALIERI & Co wussten/ ahnten, was sie zulässigerweise tun konnten und vor allem was nicht!
„Leibniz war sich der Unbestimmtheiten und logischen Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffs und des Umgangs mit ‚unendlich kleinen Größen' sehr wohl bewußt." (WUßING S. 174)

COURANT & ROBBINS sprechen von Mystizismus und Konfusion und schreiben zum Begriff des Differentialquotienten in LEIBNIZ' Zeiten:
„Nur wer den richtigen ‚mathematischen Sinn' besaß, konnte diesen Begriff erfassen." (COURANT & ROBBINS, S. 330)

Ähnlich schrieb TOEPLITZ über CAVALIERI und den korrekten Umgang mit Indivisiblen: „Er blieb auf seinen ‚guten Instinkt' angewiesen." (TOEPLITZ, S. 58)

3.3 LEIBNIZ und Strenge

Das Vorgehen von LEIBNIZ wird heute meist als ‚unstreng' und auf Intuition basierend angesehen.
Es wird vermutet, dass Leibniz seine unterschiedlichen Argumentationen dem jeweiligen Gegenüber anpasste (SONAR, S. 414).

LEIBNIZ wusste aber genau, was er tat, wie sein erst 2016 veröffentlichter Text von 1676 zeigt, in dem er schon die Grundidee der modernen Epsilontik vorwegnahm:
Dass sich der Wert der Rechtecksumme vom Wert des Integrals „um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene"!
(LEIBNIZ, zitiert nach ULLRICH, S. 24, vgl. SONAR S. 414)

4. Heutige Sicht auf Differenziale und Indivisible

1. **Schreibfigur?**
2. **Differenzial und Ableitung**
3. **Indivisible und RIEMANN-Integral**
4. **Didaktisches Potential & Fazit**

4.1 ‚Schreibfigur' ?

Heute wird meist nicht mehr von Differenzialen gesprochen und vor allem dem Differenzialquotienten die Quotienten-Eigenschaft abgesprochen, indem man ihn als *ein* unteilbares Symbol, als bloße Schreibfigur sieht:

„ ...darf dieses Symbol auch nicht als Bruch von zwei reellen Zahlen verstanden werden, sondern ist nur als Ganzes sinnvoll. $\frac{dy}{dx}$ wird auch nicht ‚*dy durch dx*' gelesen, sondern ‚*dy nach dx*'." (KRONFELLNER, S. 81)

Beim Integral ähnlich: $\int \boldsymbol{f(x)}\, \boldsymbol{dx}$ wird meist als *Integral von f nach dx* gelesen.

Das bringt oberflächlich mehr Korrektheit, aber nicht mehr Klarheit und Verständnis.

4.2 Differenzial und Ableitung

Man kann auch heute mit Differenzialen arbeiten (z. B. in der Näherungsrechnung). Man geht von der Ableitung $f'(x)$ aus und erhält aus $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ dann $\boldsymbol{dy = f'(x) \cdot dx}$.

Damit und mit $\boldsymbol{dx} = \Delta\boldsymbol{x}$ darf man $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}$ tatsächlich als Quotienten von Differenzialen ansehen und mit ihnen rechnen. Vgl. Folie 1.1 und 1.2

(MANGOLDT-KNOPP, S. 69, SONAR S.406, BÜCHTER & HENN, S. 203).

4.2 Differenzial und Ableitung

DIFFERENTIALE.

Ist $P(x \mid y)$ ein beliebiger Punkt der Kurve $y = (x)$ (Abb. 74) und wächst x um Δx, so wächst y um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ersetzt man die Kurve durch die Tangente in P, so erhält man statt Δy den Zuwachs dy. Der Einheitlichkeit halber schreibt man in diesem Fall dx statt Δx.

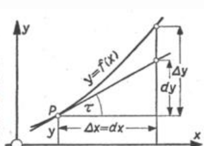


Abb. 74

LAMBACHER-SCHWEIZER: Analysis. Klett 1950, S. 102

4.3 Differenzialoperator in CAS

dy/dx: Klicken Sie auf den Funktions- oder Gleichungsgraphen und dann auf den Punkt (oder geben Sie den entsprechenden Wert ein), an dem die Ableitung berechnet werden soll.

TI-Nspire

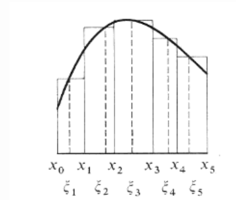
In vielen CAS und Apps (z.B. Photomath) findet man

auch oder nur den Operator $\frac{dy}{dx}$ bzw. $\frac{d}{dx}$ für die Ableitung

anstelle des **'** .

4.4 Indivisible und Riemann-Integral

Die Riemannsche Integral-Definition mit ‚passenden' Zwischenpunkten ξ_i für Zerlegungen Z des Intervalls [a, b]:



Riemannsche Zwischensumme

Walter, S. 203

Spezielle Situation, dass die Zerteilung äquidistant ist und die ξ_i immer in der Mitte des Intervalls sitzen. ‚Mittensummen'.

4.5 Didaktisches Potential & Fazit

Mathematisch ist die Sichtweise und das Denken von Leibniz & Co durch einen ‚sauberen' Grenzwert-Kalkül abgelöst worden. Aber sie hat weiterhin bedeutendes Potential.

1. Sie ist geistesgeschichtlich und mathematikgeschichtlich interessant:
   - Gibt es unteilbare kleinste Objekte (Atomismus)?
   - Woher haben Differenzialrechnung und Differenzialquotient ihren Namen und ihre Schreibweise?
   - Woher kommt die Integral-Schreibweise?
2. Sie ermöglicht einen genetischen, anschaulichen Zugang zu Grundvorstellungen und zentralen Ideen der Analysis.
3. Viele Formeln lassen sich einfach entdecken und herleiten.
4. Die dynamische Visualisierung macht die starren Grafiken lebendig und ermöglicht es, Grenzwertprozesse (ansatzweise) zu erleben und zu verstehen.

5. Literatur

- Büchter, A. & Henn, W. (2010): Elementare Analysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- Colerus, E. (1934): Vom Einmaleins zum Integral. Paul Szolnay Verlag, Berlin-Wien-Leipzig
- Courant, R. & Robbins, H. (1967): Was ist Mathematik? Zweite Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, Velber
- Kronfellner, M (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien
- Lambacher, T. & Schweizer, W. (1950): Lambacher-Schweizer Teil III/I, Analysis. Klett, Stuttgart
- v. Mangoldt, H. & Knopp, K. (1968): Eine Einführung in die höhere Mathematik. Zweiter Band. 13. Auflage. Hirzel, Stuttgart
- Sonar, T. (2016): 3000 Jahre Analysis. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, Springer Spektrum
- Toeplitz, O (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Erster Band. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- Ullrich, P. (2017): Das Manuskript von Leibniz aus dem Jahre 1676 über Infinitesimalrechnung. In: Der Mathematikunterricht Heft 3/ 2017. Friedrich Verlag, Velber
- Walter, W. (2004): Analysis 1. 7. Auflage, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- Wußing, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften