Engerl und Bengerl - mathematisch betrachtet

Im Advent wird in vielen Schulklassen Engerl-Bengerl gespielt.
Jeder zieht ein „Bengerl" und wird dessen „Engerl". Das Bengerl darf sich im Advent über heimliche Geschenke seines Engerls freuen. Wenn jemand sich selbst zieht, werden die Zetterl wieder zurückgelegt, neu durchmischt und es erfolgt eine neue Ziehung.

Folgende mathematische Fragestellungen kann man unter anderem betrachten:

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es bei einer Ziehung in einer bestimmten Gruppe mit z.B. 2, 3 oder 4 bzw. gar 25 Personen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass neu gezogen werden muss? Anders gesagt, wie häufig kommt es vor, dass jemand sich selbst zieht?
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass zufällig lauter Zweierpärchen gebildet werden, also dass von jeder Schülerin ihr Engerl gleichzeitig auch ihr Bengerl ist?
d) Wie häufig tritt es auf, dass ein „vollständiger Kreis" gebildet wird? So ein Fall wäre z.B bei 4 Mitspielern: (ACBD), d.h. (A zieht C, C zieht B, B zieht D, D zieht wieder A). Beim Überreichen der Geschenke bekommt also der erste Schüler sein Geschenk erst ganz zum Schluss.

Überlegungen:

- Bei 2 Mitspielern gibt es nur 2 Möglichkeiten:
    - (AB), d.h. (A zieht B, B zieht A)
    - oder der Fall, wo jeder sich selber zieht: (A)(B).

  Bei 3 Mitspielern sind es schon 6 Möglichkeiten:
    - (A)(B)(C) – dh. jeder zieht sich selber
    - (AB)(C) – dh. A zieht B, B zieht A und C zieht sich selber, sowie
    - (AC)(B)
    - (A)(BC)
    - (ABC)
    - und (ACB)

  Bei 4 Spielern sind es bereits 24 Möglichkeiten. Je größer die Gruppe, umso schneller steigt die Anzahl verschiedener Ziehungen.
  Bei 25 Schülern ist die Anzahl der Möglichkeiten schon unvorstellbar groß. Es sind insgesamt 25! = 25 ·24 ·23 ·… ·3 ·2 ·1 = 15 511 210 043 330 985 984 000 000, also etwa 15,5 Quadrillionen Möglichkeiten.
  Allgemein: Bei n Mitspielern gibt es $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots\cdot3\cdot2\cdot1$ Möglichkeiten.

- Von allen Möglichkeiten fallen jene aus, wo jemand sich selber zieht. Dann muss neu gemischt und gezogen werden.
  Bei 2 Mitspielern ist nur eine der beiden möglichen Ziehungen gültig. Die Wahrscheinlichkeit, neu mischen zu müssen beträgt also 50%.
  Bei 3 Mitspielern sind von den 6 Möglichkeiten nur 2 gültig (ABC) und (ACB). In den anderen 4 Fällen hat entweder jeder sich selbst gezogen (A)(B)(C) oder aber eine Person sich selbst, während die restlichen beiden sich gegenseitig gezogen haben (3 Fälle: (A)(BC) und (B)(AC) bzw. (C)(AB)). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ziehung ungültig ist, beträgt also 4/6= 66,67%, die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehung passt beträgt 2/6=33,33%
  Wie sieht die Sachlage bei einer größeren Gruppe aus? Wird es immer unwahrscheinlicher, dass man nochmals ziehen muss?

Für einen einzelnen Mitspieler wird es in einer großen Gruppe tatsächlich immer unwahrscheinlicher, dass diese Person sich selber zieht.
Aber wenn man untersucht, ob irgendjemand sich selber zieht, dann ist diese Wahrscheinlichkeit bei jeder größeren Gruppe (ab 7 Personen) praktisch gleich. Sie beträgt rund 63,21%. Genau genommen nähert sich die Wahrscheinlichkeit dem Wert 1-1/e (Euler'sche Zahl e = 2,71828…).
Anders gesagt: Es ist fast „normal", dass die erste Ziehung wiederholt werden muss. Von 3 Ziehungen sind im Schnitt fast 2 ungültig. Nur zu einer Wahrscheinlichkeit von 36,79% tritt eine gültige Ziehung auf.
Bei einer Klasse mit 25 Schülerinnen treten von den 15,5 Quadrillionen möglichen Ziehungen etwa 5,7 Quadrillionen gültige Ziehungen auf, also ziemlich exakt 100/e Prozent.

Allgemein: Eine Permutation, bei der kein Element seine Ausgangsposition beibehält, nennt man fixpunktfreie Permutationen. Dies entspricht beim „Engerl-Bengerl-Spiel" der Tatsache, dass niemand sich selber zieht.

Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n: $d_n = !n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Anteil der fixpunktfreien Permutation in S_n: $p_n = \frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

- Lauter Zweierpärchen können nur bei einer geraden Mitgliederanzahl auftreten. Bei einer ungeraden Klassengröße würde bei Zweierpärchen immer ein Schüler „übrigbleiben".
  Bei größeren Klassen ist es tatsächlich so, dass es immer unwahrscheinlicher wird, lauter Zweierpärchen zu erhalten. Bei einer Gruppengröße von 6 Personen gibt es nur 15 von 235 gültigen Ziehungen, wo lauter Zweierpärchen auftreten, d.h. etwa 5,7%.
  In einer Klasse mit 24 Schülerinnen beträgt die Wahrscheinlichkeit gerade mal 0,00000000014% (das entspricht etwa der Wahrscheinlichkeit 1 zu 722 Milliarden) aller gültigen Ziehungen, bei denen lauter Zweierpärchen auftreten.

- Ein „vollständiger Kreis" hingegen ist gar nicht unwahrscheinlich.
  Bei 2 Mitspielern besteht die einzige gültige Ziehung aus einem „vollständigen Kreis" (AB).
  Auch bei 3 Mitspielern sind die beiden gültigen Ziehungen „vollständige Kreise": (ABC) bzw. (ACB).
  Bei 4 Mitspielern gibt es sowohl die gültige Möglichkeit, dass sich zwei Zweierpärchen bilden, zum Beispiel (AB)(CD) oder ein vollständiger Kreis, zum Beispiel (ADCB), wobei die Wahrscheinlichkeit für den Kreis (66,67%) doppelt so hoch ist wie für die Zweierpärchen (33,33%).
  Bei 5 Mitspielern wird es schon interessanter. Bei gültigen Ziehungen können zum Beispiel einer von 24 möglichen 5-er-Kreisen auftreten (z.B. (ABDCE)). Insgesamt gibt es 44 gültige Ziehungen. Die Wahrscheinlichkeit für einen vollständigen Kreis beträgt also 24/44=54,4%.
  Je größer die Gruppe, umso unwahrscheinlicher wird es, einen vollständigen Kreis bei der Ziehung zu erhalten. Bei 13 Schülerinnen sind es etwas mehr als 20%, also bei ungefähr jeder fünften gültigen Ziehung.
  Betrachtet man eine Klasse mit 25 Schülern, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, einen vollständigen Kreis zu erhalten immerhin noch 10,9%. Das sind 620 Trilliarden Fälle von den insgesamt 5,7 Quadrillionen gültigen Fällen.

---

https://de.wikipedia.org/wiki/Permutation
https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktfreie_Permutation
https://de.wikipedia.org/wiki/Zyklische_Permutation

Matthias Haslauer