Pythagoras meets Heron

Pythagoras von Samos [570 – 510 v.u.Z] und Heron von Alexandria [etwa 1. Jhd. n.u.Z.] begegnen den Schülerinnen und Schülern täglich im Mathematikunterricht. Während Pythagoras mit dem berühmten Satz verbunden wird, taucht Heron in einem Iterationsverfahren zur Quadratwurzel auf. Allerdings geht auch die geometrische Konstruktion der „göttlichen Teilung" (s. Abb.4) auf Heron zurück.

Wenn in der Schule oder in Quizshows nach dem Satz des Pythagoras gefragt wird, so erinnern sich die meisten daran und antworten fast mechanisch: *„A-quadrat plus B-quadrat gleich C-quadrat!"* Das ist einerseits löblich, – wenn auch mathematisch bedenklich, da die Rechtwinkligkeit als Voraussetzung unterschlagen wird – denn Erinnerungen an Mathematik ist für viele noch ein Graus, andererseits jedoch auch traurig, denn

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gleichung 1

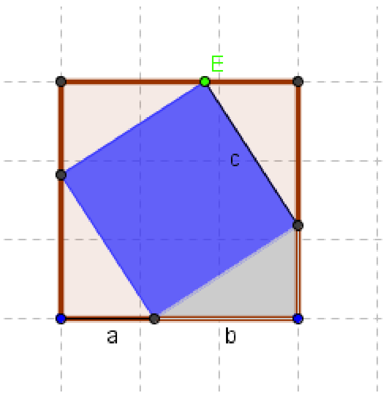

Abbildung 1

außer der Erinnerung an diesen Satz ist kaum eine Erkenntnis damit verbunden. „Die Gestalt" dieser Gleichung – einschließlich der notwendigen Rechtwinkligkeit, in der Gleichung nicht erkennbar – ist nicht erlernt oder gespeichert worden. Die rein algebraische Formulierung dieses Satzes (explizit der Rechtwinkligkeit) ist auch kein Problem und so besteht auch keine Schwierigkeit Gleichung 1 an die Tafel zu schreiben:
Die Frage nach einer „geometrischen Anschauung" führt zu Achselzucken und erzeugt ein gewisses Unbehagen [erwartet wurde hier das Erkennen der Quadrate als Summanden und Summe]. In einer Unterrichtseinheit zur Einführung von Beweisen wurde das Arbeitsblatt 1 vorgelegt, das die Abbildung 1 enthielt. Die abgebildete Figur (Abb. 1) sollte zunächst in einer „Ich-Phase" beschrieben und nach einer Möglichkeit der Flächenberechnung dieser Figur gesucht werden. Als Voraussetzung wurde gesagt, dass die Strecken a und b bekannt sein sollten. Hier zeigten sich schon Schwächen, denn die Aufgabenstellung erforderte in dieser Formulierung natürlich Kenntnisse der Algebra. Als Hilfe wurde den Studierenden gesagt, dass sie sich zur Lösung auf die Gleichungen zur Flächenberechnung von Dreiecken und Quadraten beschränken können. Als Hinweis wurde ferner erwähnt, dass es sich bei den Vierecken um Quadrate handelt. In dieser Arbeitsphase traten Schwächen bei Termumformungen auf, die auf Defizite im Bereich Algebra hinwiesen. Es war einigen Studierenden unklar, dass der Buchstab „a" auch eine Zahl ist. In diesem Fall wurde noch einmal auf die Verwendung arabischer Symbole in der Stellenwerttabelle hingewiesen, z.B. das

das Zahlwort „vierzig" symbolisch 4*10 bedeutet, was dann als 40 geschrieben wird. Andererseits gab es immer wieder die Verwechslung (Unwissenheit?), zwischen $a \cdot a = a^2$ als $a \cdot a = 2a$. Dieses Problem wurde mit dem Vergleich von Strecken (Additionsaufforderung) und Flächen (Multiplikationsauforderung) erläutert.
Trotz der Probleme einiger Studierenden, führte diese dann verlängerte „Ich – Phase" zu den gewünschten Gleichungen 2 und 3:

$$A = (a+b)^2$$

Gleichung 2

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

Gleichung 3

Die schon erwähnten Unsicherheiten im Umgang mit Termen machte es erforderlich, dass Gleichung drei in einem Unterrichtsgespräch weiter vereinfacht werden musst, was auch noch einmal Defizite in der Bruchrechnung aufzeigte aber schließlich für Verständnis der Form von Gleichung 4 führte.

$$A = c^2 + 2ab$$

Gleichung 4

Als nächstes sollte nun in der „Du – Phase" jeweils ein „Entdecker" der Gleichung 3 und ein „Entdecker" der Gleichung 2 zusammenarbeiten und die Gleichheit überprüfen.

In den Gruppen fand eine rege Aktivität statt und es wurden zunächst Zahlenbeispiele gewählt, die alle zu richtigen Ergebnissen führten. In Erinnerung an Gleichungssysteme, die im Semester zuvor behandelt wurden setzten einige Studierende[A] dann die Gleichungen 2 und 4 gleich und erhielten nach einiger Zeit den Satz des Pythagoras in der Form von Gleichung 1. In der „Wir – Phase" sollte nun nach einer geometrischen Interpretation dieser Gleichung gesucht werden, was schließlich zu Abbildung 2 führte.

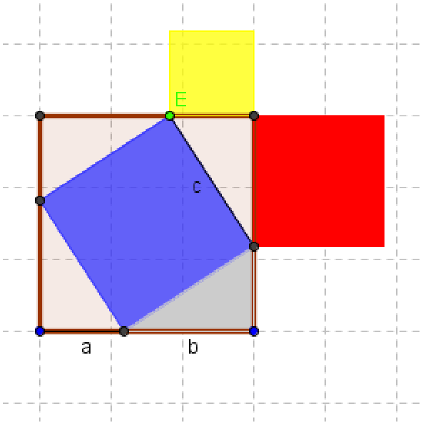

Abbildung 2

Um zu testen, ob nun der Satz des Pythagoras eine „Gestalt" bekommen hatte, sollte eine Übertragung auf ein unbekanntes Problem erfolgen. Da das Verhältnis des goldenen Schnittes in der Architektur eine Rolle spielte und unter den Studierenden Bauzeichner und Landschaftsbauer waren, wurde der goldene Schnitt ausgewählt, der auch vom Namen bei einigen Studierenden bekannt war. Es wurde nun in anteiliger Gruppenarbeit das Verhältnis des goldenen Schnitts bearbeitet und zur Vorbereitung eine Strecke wie in Abbildung 3 mit GeoGebra dargestellt, sowie die Definition des goldenen Schnitts in Form von Gleichung 5 vorgestellt.

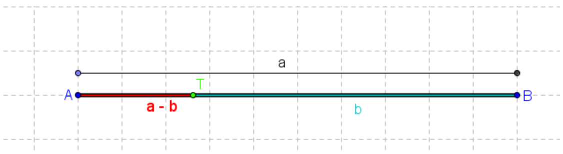

Abbildung 3

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Gleichung 5

Es galt zu begründen, warum die Konstruktion des Teilungspunktes von Heron eine gegebene Strecke wirklich im

Verhältnis des goldenen Schnittes teilt. (Abb. 4)

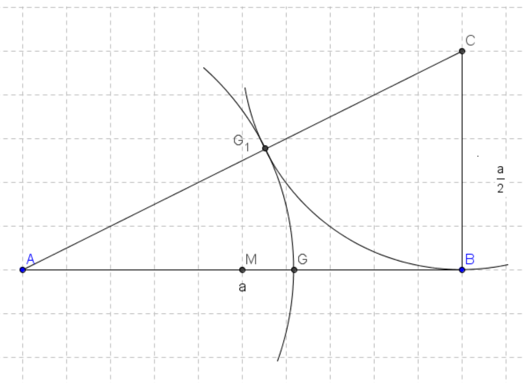

Abbildung 4

Die Gruppen lösten dieses Problem zur Hälfte. Die fehlenden Bezeichnungen der Strecken AG1 und G1C bereitete den Studierenden große Probleme, aber es entstand vielfach die Gleichung 6.

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (c+d)^2$$

Gleichung 6

Im gelenkten Unterrichtsgespräch konnte erarbeitet werden, dass man c und d so ersetzt, dass man Gleichung 7 erhält.

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$$

Gleichung 7

Die Frage, was nun Gleichung 7 mit dem goldenen Schnitt zu tun habe, erzeugte zunächst Ratlosigkeit führte aber zu der zögerlichen Frage: „Kann man vielleicht Gleichung 5 so umformen, dass man Gleichung 7 erhält?“ Die Frage wurde an der Tafel fixiert und die Beantwortung wieder in die Gruppen gegeben, die sich jetzt zu zwei Vierergruppen formierten.

Die o.g. Defizite im Bereich des formalen Rechnens in Verbindung mit den Defiziten in der Bruchrechnung machten es erforderlich, dass die Gruppen immer wieder Hilfen einforderten. Dennoch schafften es die Gruppen trotz dieser Probleme folgende Gleichungsumformungen zu realisieren, wie sie in Gleichung 8 dargestellt ist.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \quad \Big|\cdot b$$

$$a = \frac{b^2}{a-b} \quad \Big|\cdot(a-b)$$

$$a^2 - ab = b^2$$

Gleichung 8

Da es auf die Streckenlänge b ankommt, war die Umformung zu $a^2 = b^2 + ab$ auch noch möglich, aber die Anwendung der quadratischen Ergänzung musste vorgegeben und gemeinsam durchgeführt werden, um schließlich die Gleichung 9 zu erhalten[B].

$$a^2 - ab = b^2 \quad \Big| + ab$$

$$a^2 = b^2 + ab \quad \Big| + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + ab + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$$

Gleichung 9

Dass am Ende von Gleichung 9 nun der Satz des Pythagoras stand, erstaunt die meisten Studierenden sehr, aber sie erkannten dann doch die Struktur wieder, dass die Summe aus zwei Quadraten wieder ein Quadrat ist.

In einer solchen Lerneinheit wird Geometrie und Algebra zu den zwei Seiten einer Medaille, die Anschauung und Abstraktheit verbindet. Um Nachhaltiges Lernen zu fördern, muss die Kompetenz des mathematischen Umganges mit Problemen vermittelt werden, sowie das Herausarbeiten wiederkehrender Strukturen. Dabei ist es unerlässlich sprachsensibel auf Wörter und mathematische Objekt einzugehen. Der Exponent ist keine Schikane, sondern das Symbol für eine quadratische Fläche. Die Verwendung von Bild und Symbol macht Erkenntnis aus.

A „Studierende“ ist der Terminus Technicus für Absolventen des zweiten Bildungsweges. Die Lerngruppe dieser Einheit ist in der so genannten Einführungsphase des Abendgymnasiums, die auf den Eintritt in die Hauptphase zur Erlang ung des Abiturs vorbereitet. Die E-Phase dauert zwei Semester. Daran schließt sich eine viersemestrige Hauptphase an.

B Der Satz des Pythagoras war Inhalt des 1. Semesters und das Lösen von quadratischen Gleichungen war Thema davor. Dabei wurde der SdP durch Schneiden und Legen eingeführt. Eine algebraische Struktur wurde nur bei der Einführung des p-q-Terms verwendet, bzw. bei der Berechnung von Modellen in der allgemeinen Form $a^2+b^2 = c^2$, wobei jedoch die Variablen dem Problem angepasst werden mussten.

A

B