Semipæne polynomier.

Definition. Semipæne polynomier.

Ved et har semipænt polynomium forstås et polynomium med lige grad, som har tre heltallige rødder og tre heltallige ekstremumspunkter. Forkortelse (SP).

Forord.

Semipæne polynomier er gode tasteopgaver på gymnasieniveau eftersom facit kommer ud som 'pæne hele tal'. I dette skrift indgår nogle forskellige opgaver, som er tiltænkt det gymnasiale niveau.

I arbejdet med de semipæne polynomier dukkede en – i hvert fald for mig – ganske overraskende og fascinerende sammenhæng op mellem sådanne polynomier og pythagoræiske tripler. Desuden viste det sig, at en nærliggende generalisering af sætninger om parametriseringer af SP med grad 4 og 6 til vilkårligt høje grader lå lige for, heller ikke hvad man lige kunne forvente.

Dette skrift, og særligt eksemplerne med SP som tillige har heltallige vendepunkter, ville jeg ikke kunne have gennemført uden hjælp af CAS-værktøjer, som viser sig meget brugbare.

Gentofte 28-01-2024.

Heine Strømdahl. Heine Strømdahl

Sætning 1.

Betragt polynomiet $f(x)$ med grad $2n$, som er givet ved nedenstående betingelser A og B og ved forskriften

$$f(x) = 2n \int x^{2n-3}(x-u)(x-v)dx$$

A: $f(0) = 0$.

B: u og v er parametriseret således

$$u = s(\pm(2n-1)(m^2+t^2) + 2mt(2n^2-2n+1))$$

$$v = 4smt(n^2-n)$$

$$(m,s,t)\epsilon\mathbb{Z}^3, |m| \neq |n|, mts \neq 0, n\epsilon\ \mathbb{N}, n > 1.$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium.

Bevis: Generalisering af metoden som anvendes i sætning 2, se side 12.

Sætning 2.

Parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier (SP).

For $(m,n,s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mn \neq 0$, $s \neq 0$ og $s \equiv 0\ (Mod\ 2)$ er fjerdegradspolynomierne med dobbeltrod i nul og rødder

$\binom{r_1}{r_2} = \binom{2s(3mn+m^2)}{2s(3mn+n^2)}$ hhv. $\binom{r_1}{r_2} = \binom{s(2m^2-n^2+mn)}{s(2m^2-n^2-mn)}$

semipæne fjerdegradspolynomier.

Bevis: Side 5.

Bemærkning.

Heltallige translationer af SP af formen $g(x-m), m \in \mathbb{Z}$, er trivielt også SP.

Sætning 3.

Parametrisering af semipæne polynomier (SP) med grad 2n.

Antag at $(n,m,t,s) \in \mathbb{Z}^4$ med $mts \neq 0, |m| \neq |t|, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$\binom{r_1}{r_2} = \binom{s(2n(2n-1)mt+2nm^2)}{s(2n(2n-1)mt+2nt^2)}$ og $f(x) = x^{2n-2}(x-r_1)(x-r_2)$

$f(x)$ er et semipænt polynomium.

Conjecture.

1: For ethvert n findes der små værdier af m og t hvor $f(x)$ tillige har to heltallige vendepunkter. Nedenfor er der 6 eksempler herpå for $n = 2 \dots 7$.

2: For ethvert n findes der uendeligt mange SP med $s = 1$ hvor $f(x)$ tillige har to heltallige vendepunkter.

Punkt to er bevist af talteoretikere i tilfældet hvor $n = 2$. [i]

Bevis sætning 3.

Indtaster man polynomiet i et CAS-værktøj og løser ligningen $f'(x) = 0$ får man

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4m^2pqs - 4mpqs \vee x = 4m^2pqs + 2mp^2s + 2mq^2s - 4mpqs - p^2s - q^2s + 2pqs$

Sætningen er i øvrigt en nærliggende generalisering af formlen i sætning og 2 betragtet sammen med en tilsvarende formel for semipæne sjettegradspolynomier, som kan udledes på næsten 100% identisk vis med beviset for sætning 2:

Parametrisering af semipæne sjettegradspolynomier (SP).

Antag at $(m, t, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mts \neq 0, |m| \neq |t|$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(30mt+6m^2) \\ s(30mt+6nt^2) \end{pmatrix} \text{ og } f(x) = x^4(x - r_1)(x - r_2)$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium. [ii]

Beviset for sætning 3 kan formentlig også udledes på ligefrem vis ud fra resultatet i sætning 1.
QED.

Eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier med relativt små koefficienter.

$f(x)$

$x^4 + 28x^3 + 160x^2 = x^2(x + 8)(x + 20)$	$x^4 - 4x^3 - 4896x^2 = x^2(x + 68)(x - 72)$
$x^4 + 24x^3 + 82x^2 - 240x + 133$	$x^4 + 12x^3 - 80x^2 - 192x + 1024$
$x^4 + 8x^3 - 110x^2 + 1125$	$x^4 - 134x^2 + 504x + 637$
$x^4 - 56x^3 + 720x^2$	$x^4 - 60x^3 + 894x^2 - 1612x + 777$

Elevopgaver til gymnasialt niveau.

1A: Vis med hjælp af CAS-værktøj at $f(x) = x^2(x - 308)(x - 360)$ er et semipænt fjerdegradspolynomium med to heltallige vendepunkter.

1B-1: Antag nu at u er et vilkårligt helt tal, som ikke er nul.

Bevis med og uden CAS-værktøj at $f(x) = x^2(x - 308u)(x - 360u)$ er er et semipænt fjerdegradspolynomium med to heltallige vendepunkter.

1B-2:

Undersøge betingelser for hvornår $f(x) = x^3(x - u)$, $f(x) = x^2(x - u)^2$, $f(x) = x(x - u)^3$ måtte være pæne fjerdegradspolynomier i den forstand at både første og anden afledede har heltallige rødder.

2: Bevis med hjælp af CAS at heltallige translationer af formen $g(x - m), m \in \mathbb{Z}$ af

$f(x) = x^2(x + 8)(x + 20)$ er et SP.

Bevis mere generelt med hjælp af CAS at heltallige translationer af ovenstående form af vilkårlige SP også er SP.

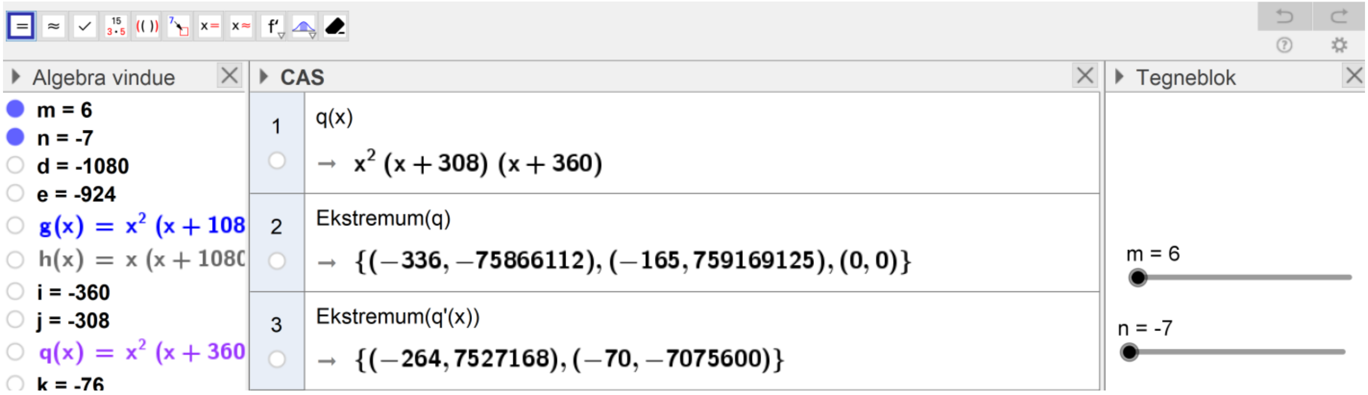
3: Bevis med CAS-værktøj at polynomierne i sætning 3 er SP.

Eksempler på SP med to heltallige vendepunkter. ↓

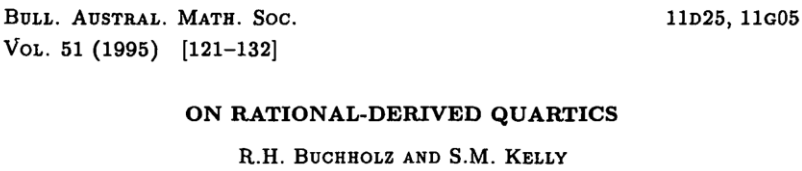
Eksempler på SP med to heltallige vendepunkter. ↓

n=2.

Et eksempel på ovenstående fremkommer allerede ved små tal for m og n i parametriserings-formlen i sætningen. I skærmklippet er det $q(x)$ på linje et, det er beregnet med hjælp af skydere i GeoGebra-programmet.



Tre andre eksempler på sådanne polynomier kan tilgås i linket til ”[On rational-derived quartics](#)”, de er også medtaget i et skærmklip i slutnoter.[iii]

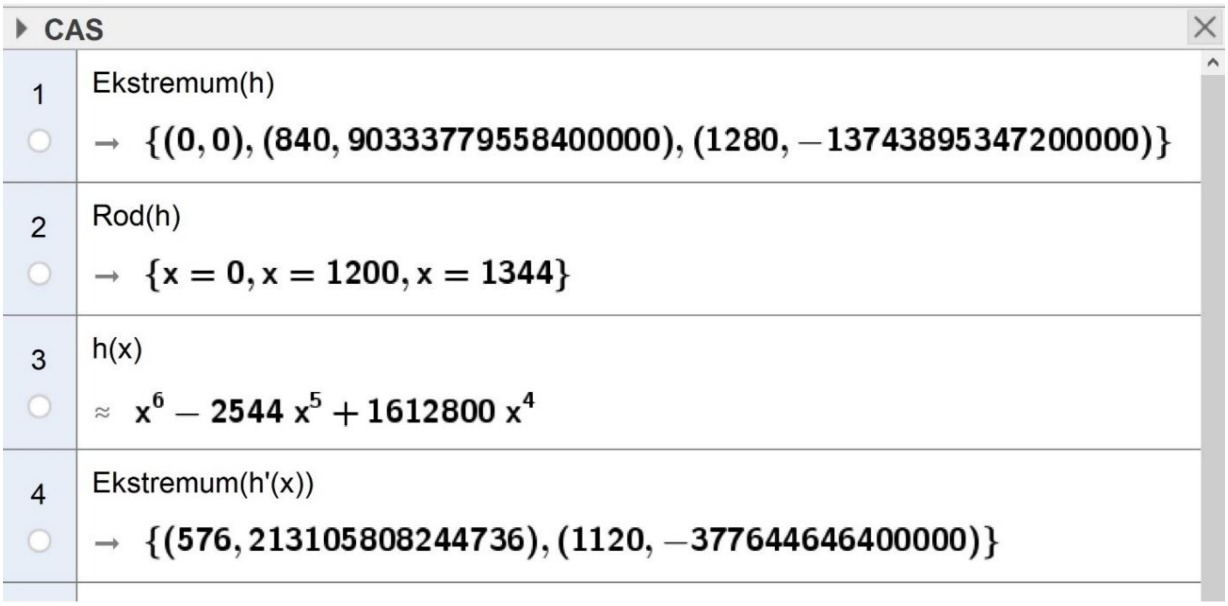


BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 11D25, 11G05
VOL. 51 (1995) [121–132]

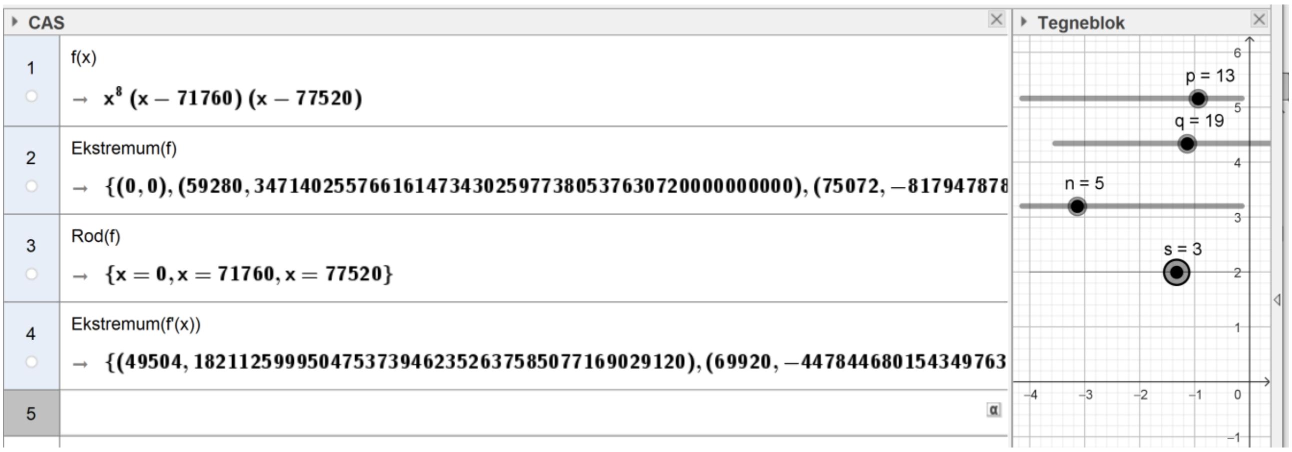
ON RATIONAL-DERIVED QUARTICS

R.H. BUCHHOLZ AND S.M. KELLY

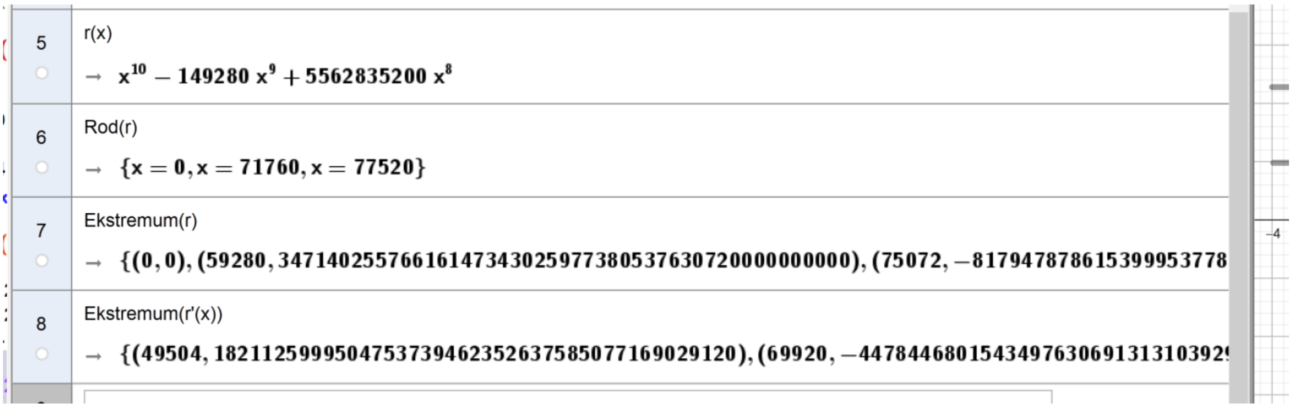
n=3.



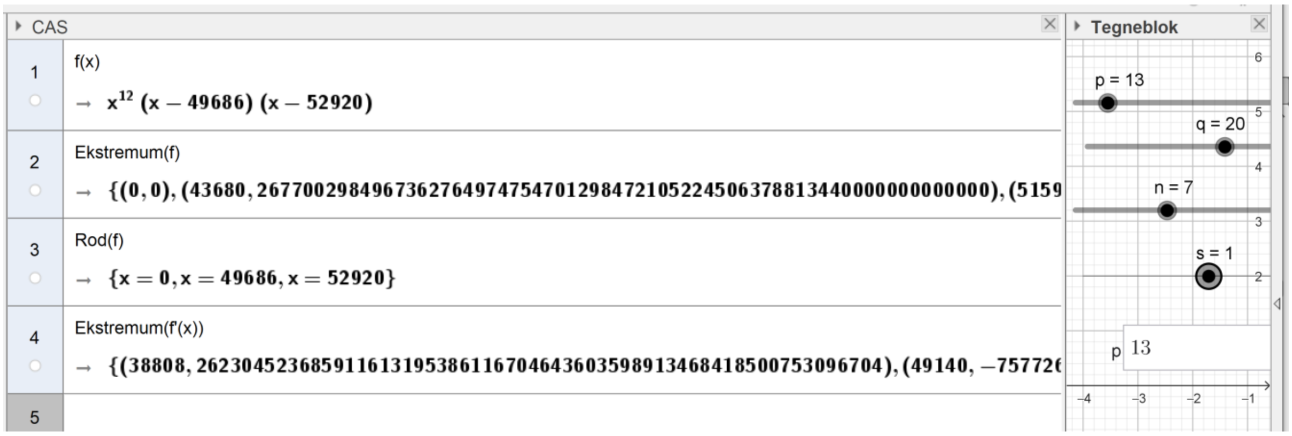
n=4


CAS
1
f(x)
→ x^8 (x − 71760) (x − 77520)
2
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (59280, 347140255766161473430259773805376307200000000000), (75072, −81794787
3
Rod(f)
→ {x = 0, x = 71760, x = 77520}
4
Ekstremum(f'(x))
→ {(49504, 18211259995047537394623526375850771690291 20), (69920, −447844680154349763
5
Tegneblok
p = 13
q = 19
n = 5
s = 3

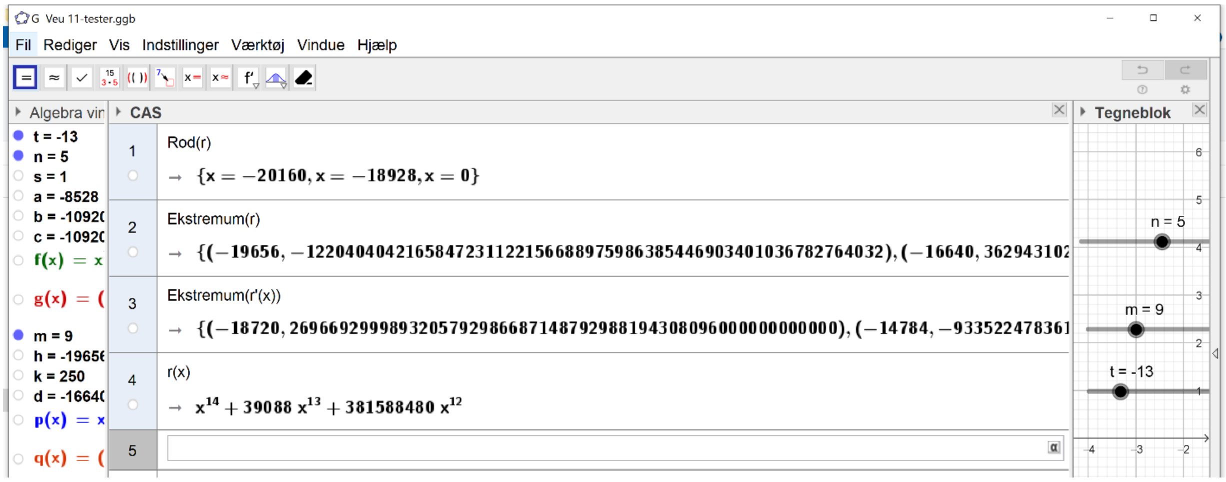
n=5.


5
r(x)
→ x^10 − 149280 x^9 + 5562835200 x^8
6
Rod(r)
→ {x = 0, x = 71760, x = 77520}
7
Ekstremum(r)
→ {(0, 0), (59280, 347140255766161473430259773805376307200000000000), (75072, −817947878615399953778
8
Ekstremum(r'(x))
→ {(49504, 182112599950475373946235263758507716902 9120), (69920, −447844680154349763069131310392

n=6


CAS
1
f(x)
→ x^12 (x − 49686) (x − 52920)
2
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (43680, 267700298496736276497475470129847210522450637881344000000000000000), (5159
3
Rod(f)
→ {x = 0, x = 49686, x = 52920}
4
Ekstremum(f'(x))
→ {(38808, 262304523685911613195386116704643603598913468418500753096704), (49140, −75772
5
Tegneblok
p = 13
q = 20
n = 7
s = 1
p 13

n=7



Pæne og semipæne fjerdegradspolynomier. Pythagoræiske tripler. ↓

Næste side

Pæne og semipæne fjerdegradspolynomier. Pythagoræiske tripler.

Definition.

Ved et semipænt fjerdegradspolynomium forstås et fjerdegradspolynomium, som har præcis tre forskellige heltallige rødder og tre heltallige ekstremumspunkter. Ifølge algebraens fundamentalsætning må en af rødderne nødvendigvis være en dobbeltrod.

I dette indlæg gennemføres en simpel udledning af en parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier. Det viser sig, at der er en afbildning fra mængden af pythagoræiske tripler ind i mængden af semipæne fjerdegradspolynomier.

Det uafklarede eksistensspørgsmål om pæne fjerdegradspolynomier.

Talteoretikere beviste i anden halvdel af det 20. århundrede, at der findes uendeligt mange semipæne fjerdegradspolynomier hvor den anden afledede har to heltallige ekstrema[iv], fire eksempler herpå medtages i dette dokument. Det vides ikke om der eksisterer et 'rigtigt pænt' fjerdegradspolynomium med hele fire forskellige heltallige rødder og hhv. tre og to heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Sætning.

Parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier (SP).

For $(m, n, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mn \neq 0$, $s \neq 0$ og $s \equiv 0\ (Mod\ 2)$ er fjerdegradspolynomierne med dobbeltrod i nul og rødder

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s(3mn+m^2) \\ 2s(3mn+n^2) \end{pmatrix}$ hhv. $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(2m^2-n^2+mn) \\ s(2m^2-n^2-mn) \end{pmatrix}$

semipæne fjerdegradspolynomier.

Bemærkning. Heltallige translationer af SP af formen $g(x-m), m \in \mathbb{Z}$, er trivielt også SP.

Eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier med relativt små koefficienter.

$f(x)$

$x^4 + 28x^3 + 160x^2 = x^2\,(x+8)\,(x+20)$	$x^4 - 4x^3 - 4896x^2 = x^2\,(x+68)\,(x-72)$
$x^4 + 24x^3 + 82x^2 - 240x + 133$	$x^4 + 12x^3 - 80x^2 - 192x + 1024$
$x^4 + 8x^3 - 110x^2 + 1125$	$x^4 - 134x^2 + 504x + 637$
$x^4 - 56x^3 + 720x^2$	$x^4 - 60x^3 + 894x^2 - 1612x + 777$

Bevis.

Se næste side ↓

1: Ligningsløsning med GeoGebras CAS.

1	(x-u)(x-v)x $\rightarrow\ x\,(-u+x)\,(-v+x)$
2	$1 Integral: $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}u\,x^3-\frac{1}{3}v\,x^3+\frac{1}{2}u\,v\,x^2+c_1$
3	12*(1 / 4 x⁴ - 1 / 3 u x³ - 1 / 3 v x³ + 1 / 2 u v x²) $\rightarrow\ 3x^4-4u\,x^3-4v\,x^3+6u\,v\,x^2$
4	3x⁴ - 4u x³ - 4v x³ + 6u v x²=0 Beregn: $\left\{x=\frac{2u+2v-\sqrt{2u^2-5u\,v+2v^2}\,\sqrt{2}}{3},\ x=\frac{2u+2v+\sqrt{2u^2-5u\,v+2v^2}\,\sqrt{2}}{3},\ x=0\right\}$
5	Beregn(2u² - 5u v + 2v² = 2p², u) $\rightarrow\ \left\{u=\frac{5v-\sqrt{16p^2+9v^2}}{4},\ u=\frac{5v+\sqrt{16p^2+9v^2}}{4}\right\}$

2-1: Antag nu, at $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0,0,0\}$ således at $(|x|,|y|,|z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2+y^2=z^2$. Betragt $p=3x$, $v=4y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

$$16p^2+9v^2=16\cdot(3x)^2+9\cdot(4y)^2=16\cdot 9\cdot(x^2+y^2)=144(x^2+y^2)$$

Det følger af resultatet i skærmbilledet at

$$u=\frac{\left(5v+\sqrt[2]{16p^2+9v^2}\right)}{4}=\frac{\left(5\cdot 4y+12\sqrt[2]{y^2+x^2}\right)}{4}=5y+3\sqrt[2]{x^2+y^2}$$

Rødderne findes:

$$r_1=\frac{\left(2u+2v+\sqrt[2]{2}\sqrt[2]{2u^2-5u\,v+2v^2}\right)}{3}$$

$$r_1=\frac{(2u+2v+2p)}{3}$$ (jf. linje 5 i skærmbilledet)

$$r_1 = \frac{\left(2 \cdot (5y\ +\ 3\sqrt[2]{x^2 +\ y^2})\ +\ 2 \cdot 4y\ +\ 2 \cdot 3x\right)}{3}$$

$$r_1 = \frac{\left(10y + 3\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} +\ 8y\ +\ 6x\right)}{3}$$

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} + 2x$$

Og dermed

$$r_2 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} - 2x$$

$$r_3 = 0$$

Bemærkning.

I tilfældet hvor x er et lige tal fremgår det ved ganske simple betragtninger at de to substitutioner kan halveres, dvs. $p = 3x$, $v = 4y$. Det fremgår tillige at udtrykket for rødderne i dette tilfælde halveres.

Man kan gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

> remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:
>
> $$a = k \cdot (m^2 - n^2),\ \ b = k \cdot (2mn),\ \ c = k \cdot (m^2 + n^2)$$
>
> where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at $x\ og\ y$ kan være negative. Man får derfor to substitutioner

1: $x = s(m^2 - n^2), y = 2smn.$ 2: $y = s(m^2 - n^2), x = 2smn, (m, n, s)\epsilon\mathbb{Z}^3, m \neq n, mns \neq 0.$

1:

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} + 2x$$

$$r_1 = 6 \cdot 2smn + 2\sqrt[2]{\left(s(m^2 - n^2)\right)^2 +\ (2smn)^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{m^4 + n^4 - 2m^2n^2 +\ 4m^2n^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{m^4 + n^4 + 2m^2n^2} + 2s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 12smn + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} + 2s(m^2 - n^2) = 12smn + 4sm^2 \text{ og da}$$

$$r_2 = 12smn + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} - 2s(m^2 - n^2) = 12smn + 4sn^2$$

2:

$$r_1 = 6 \cdot s(m^2 - n^2) + 2s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} + 2 \cdot 2smn$$

$$r_1 = 8sm^2 - 4sn^2 + 4smn \quad \text{og dermed}$$

$$r_s = 8sm^2 - 4sn^2 - 4smn.$$

Som omtalt ovenfor kan dette udtryk halveres:

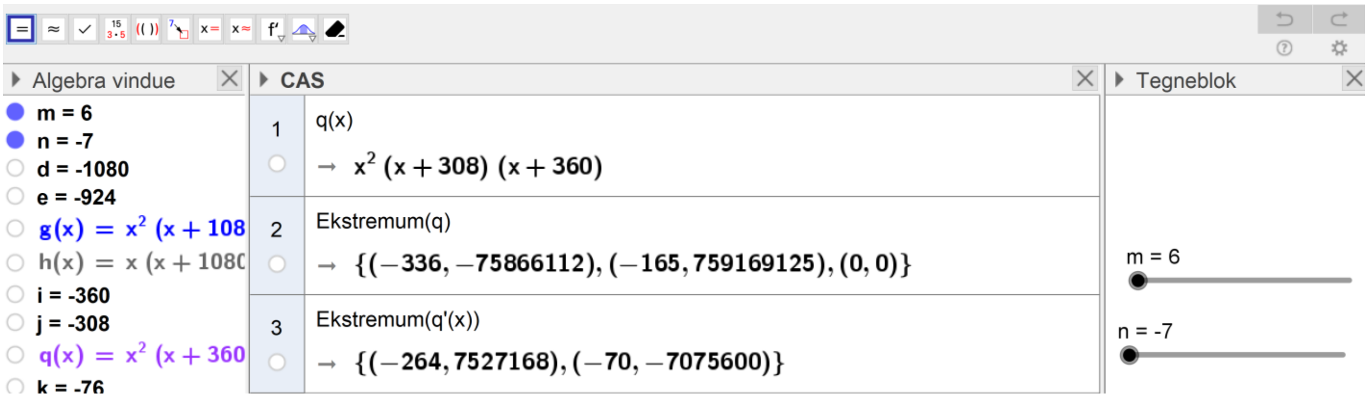
$$r_1 = 4sm^2 - 2sn^2 + 2smn \quad \text{og dermed}$$

$$r_s = 4sm^2 - 2sn^2 - 2smn.$$

QED.

Fjerdegradspolynomier med tre forskellige heltallige rødder og heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Et eksempel på ovenstående fremkommer allerede ved små tal for m og n i parametriserings-formlen i sætningen. I skærmklippet er det $q(x)$ på linje et, det er beregnet med hjælp af skydere i GeoGebra-programmet.



Tre andre eksempler på sådanne polynomier kan tilgås i linket til "On rational-derived quartics", de er også medtaget i et skærmklip i slutnoter.[v]

BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 11D25, 11G05
VOL. 51 (1995) [121–132]

ON RATIONAL-DERIVED QUARTICS

R.H. BUCHHOLZ AND S.M. KELLY

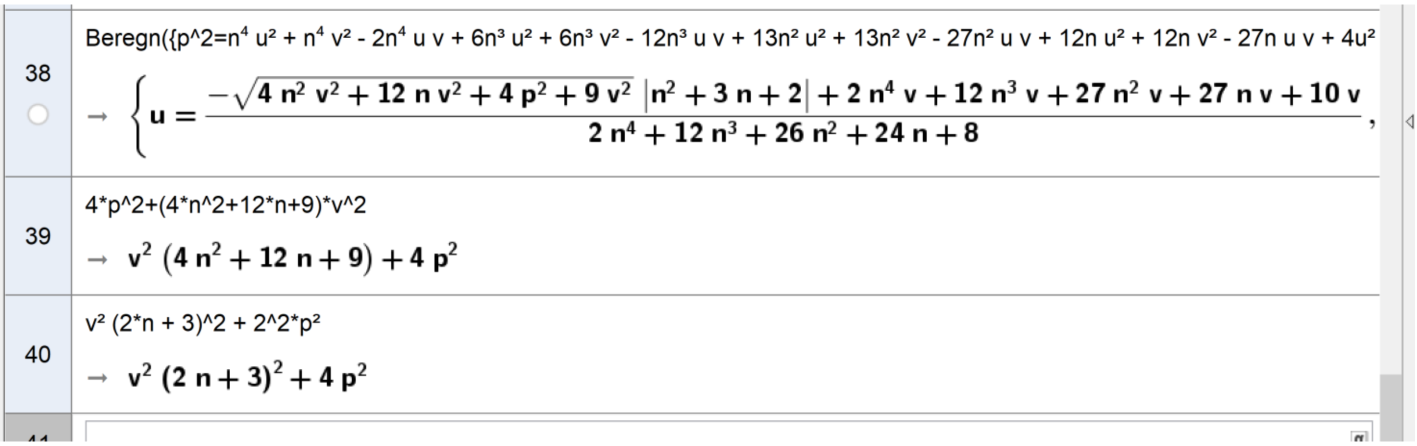
Bevis for sætning 1.

Metoden er den samme som i tilfældet n=0:

Grad 2n +4.

1: Ligningsløsning med GeoGebras CAS.

Bilag: [vi]



Antag nu, at $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0{,}0{,}0\}$ således at $(|x|, |y|, |z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2 + y^2 = z^2$.

Betragt $p = (2n+3)(n^2+3n+2)x \;\; og \; v = 2(n^2+3n+2)y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

A:

$$4p^2 + (2n+3)^2v^2 = 4(2n+3)^2(n^2+3n+2)^2x^2 + (2n+3)^2 2^2 (n^2+3n+2)^2 y^2$$

$$= 4(2n+3)^2(n^2+3n+2)^2(x^2+y^2)$$

B: $(n^2+3n+2)^2 = n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$ (halvdelen af nævneren i brøken i billedet ovenfor)

C: $\frac{2n^4v+12n^3v+27n^2v+27nv+10v}{2n^4+12n^3+26n^2+24n+8} = \frac{2n^2v+6nv+5v}{2n^2+6n+4}$ Man får

D:

$$u = \frac{\pm(n^2+3n+2)\sqrt[2]{4n^2v^2+12n\,v^2+4p^2+9v^2} + 2n^4v+12n^3v+27n^2v+27nv+10v}{2n^4+12n^3+26n^2+24n+8}$$

$$u = \frac{\pm 2(2n+3)(n^2+3n+2)\sqrt[2]{x^2+y^2}}{2(n^2+3n+2)^2} + \frac{2n^2v+6nv+5v}{2n^2+6n+4}$$

Ved substitution med $v = 2(n^2+3n+2)y$ får man

$$u = 2n^2y + 6ny + 5y \pm (2n+3)\sqrt[2]{x^2+y^2}$$ [vii]

$u = 2n^2y + 6ny + 5y \pm (2n+3)\sqrt[2]{x^2+y^2},$

$v = 2(n^2 + 3n + 2)y$

Man kan gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

> remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:
>
> $$a = k\cdot(m^2 - n^2),\ \ b = k\cdot(2mn),\ \ c = k\cdot(m^2 + n^2)$$
>
> where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at $x\ og\ y$ kan være negative. Man får derfor to substitutioner

Substitution 1.

$x = s(m^2 - t^2), y = 2smt.$ 2: $y = s(m^2 - t^2), x = 2smt, (t, n, s)\epsilon\mathbb{Z}^3, t \neq n, tns \neq 0.$

$u = 2n^2y + 6ny + 5y \pm (2n+3)\sqrt[2]{x^2+y^2}$

$u = 2n^2(2smt) + 6n(2smt) + 5(2smt) \pm (2n+3)\sqrt[2]{(s(m^2 - t^2))^2 + (2smt)^2}$ [viii]

$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)\sqrt[2]{(m^2 - t^2)^2 + (2mt)^2}$

$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)(m^2 + t^2)$

Og

$v = 2(n^2 + 3n + 2)y = 2(n^2 + 3n + 2)2smtv = 4smt(n^2 + 3n + 2)$

Ved substitutionen $2n + 4 = 2z$, $n \to z \to n$ fås formuleringen i sætningen idet

$2n + 4 = 2z \Leftrightarrow n = z - 2$, $2n + 4 = 2z \Leftrightarrow 2n + 3 = 2z - 1$

Trin A: $n \to z$

$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)(m^2 + t^2)$

$v = 4smt(n^2 + 3n + 2)$

$\to n \to z$

$u = 4(z-2)^2smt + 12s(z-2)mt + 10smt \pm s(2z-1)(m^2 + t^2)$

$v = 4smt((z-2)^2 + 3(z-2) + 2)$

Trin B: $z \to n.$

$u = 4(n-2)^2smt + 12s(n-2)mt + 10smt \pm s(2n-1)(m^2 + t^2)$

$u = s(\pm(2n-1)(m^2+t^2) + 2mt(2n^2-2n+1))$

$v = 4smt((n-2)^2 + 3(n-2) + 2) = 4smt(n^2 + 4 - 4n + 3n - 6 + 2)$

$v = 4smt(n^2 - n)$

QED.

Særlige polynomier.

3X54 polynomiet. Et unikt pænt tredjegradspolynomium?

Det følgende særprægede tredjegradspolynomium med 3X54 er 'pænt', dvs. det har tre forskellige rødder og heltallige ekstrema for både første og anden afledede. Det dukkede i mit regneark. Måske er det unikt?

$$f(x) = x^3 - 54x^2 + 540x + 5400$$

Polynomier af hhv. 4. og 3. grad, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

1: [ix]

$f(x) = x\,(x - 264)(x - 840)$

$g(x) = x^2(x-264)(x-840)$

2:

$f(x) = x\,(x - m264)\,(x - m840)$

$g(x) = x^2\,(x - m264)\,(x - m840), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

Polynomier af hhv. 6. og 3. grad, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

1:

$f(x) = x(x - 1224)\,(x - 2184)$

$g(x) = x^4\,(x - 1224)\,(x - 2184)$

2:

$f(x) = x(x - m1224)\,(x - m2184)$

$g(x) = x^4\,(x - m1224)\,(x - m2184), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

1	f(x) $\rightarrow\ x^2\,(x+27599616)\,(x+87816960)$
2	g(x) $\rightarrow\ x\,(x+27599616)\,(x+87816960)$

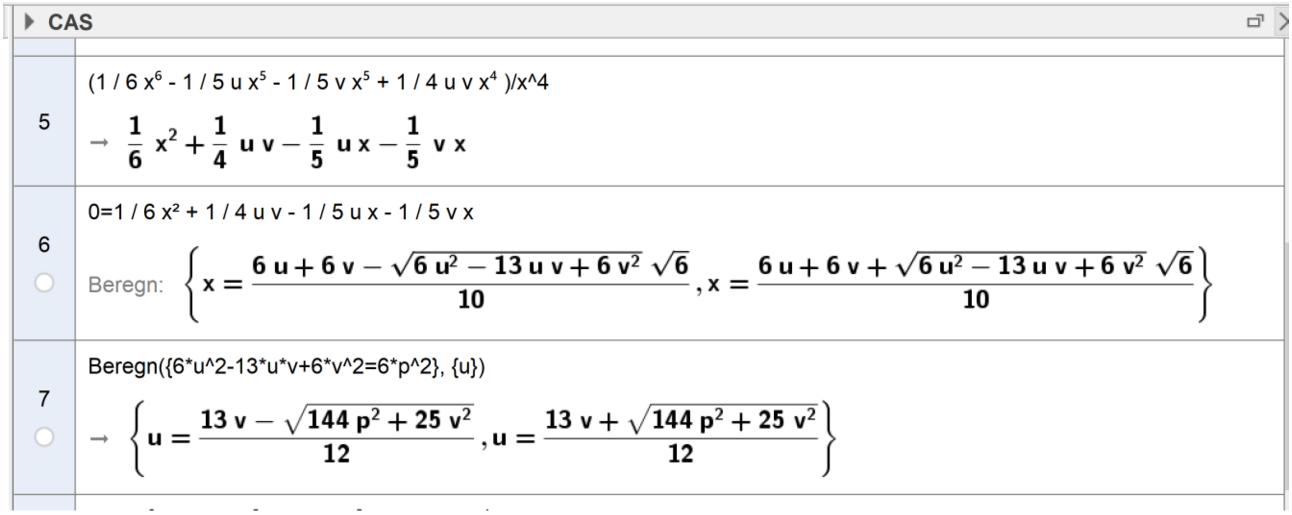
1	f(x) $\rightarrow\ x^2\,(x+27599616)\,(x+87816960)$
2	Ekstremum(f) $\rightarrow\ \{(-68999040, -3708958835743556958607638528000), (-17563392, 2174981266876836126030016020048), (0,0)\}$
3	g(x) $\rightarrow\ x\,(x+27599616)\,(x+87816960)$
4	Ekstremum(g) $\rightarrow\ \{(-64399104, 55496900997698354675712), (-12545280, -14215874243591562854400)\}$
5	Ekstremum(g'(x)) $\rightarrow\ \{(-38472192, -2016614297567232)\}$

......

---

i https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/F53FA5F1C063B911213083F8F44CCC50/S0004972700013940a.pdf/div-class-title-on-rational-derived-quartics-div.pdf

[ii] Semipæne sjettegradspolynomier.



2: Antag nu, at $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0,0,0\}$ således at $(|x|, |y|, |z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2 + y^2 = z^2$. Betragt $p = 5x$, $v = 12y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

$$144p^2 + 25v^2 = 12^2 \cdot (5x)^2 + 5^2 \cdot (12y)^2 = 60^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

Det følger af resultatet i skærmbilledet at

$$u = \frac{\left(13v \pm \sqrt[2]{144p^2 + 25v^2}\right)}{12} = \frac{\left(13 \cdot 12y \pm 60\sqrt[2]{y^2 + x^2}\right)}{12} = 13y \pm 5\sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

Rødderne findes:

$$r_1 = \frac{\left(6u + 6v + \sqrt[2]{6}\sqrt[2]{6u^2 - 13u\,v + 6v^2}\right)}{10}$$

$$r_1 = \frac{(6u + 6v + 6p)}{10} \quad \text{(jf. linje 5 i skærmbilledet)}$$

$$r_1 = \frac{\left(6 \cdot (13y + 5\sqrt[2]{x^2 + y^2}) + 6 \cdot 12y + 6 \cdot 5x\right)}{10}$$

$$r_1 = \frac{\left(78y + 30\sqrt[2]{x^2 + y^2} + 72y + 30x\right)}{10} =$$

$$r_1 = 15y + 3\sqrt[2]{x^2 + y^2} + 3x$$

Og dermed

$$r_2 = 15y + 3\sqrt[2]{x^2 + y^2} - 3x$$

Man kan igen gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

> remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:
>
> $$a = k \cdot (m^2 - n^2),\ \ b = k \cdot (2mn),\ \ c = k \cdot (m^2 + n^2)$$
>
> where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at $x\ og\ y$ kan være negative. Man får derfor to substitutioner

1: $x = s(m^2 - n^2), y = 2smn.$ 2: $y = s(m^2 - n^2), x = 2smn, (m, n, s)\epsilon\mathbb{Z}^3, m \neq n, mns \neq 0.$

1:

$$r_1 = 15y + 3\sqrt[2]{x^2 + \ y^2} + 3x$$

$$r_1 = 15 \cdot 2smn + 3\sqrt[2]{\left(s(m^2 - n^2)\right)^2 + \ (2smn)^2} + 3s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 30smn + 3s\sqrt[2]{m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + \ 4m^2n^2} + 3s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 30smn + 3s\sqrt[2]{m^4 + n^4 + 2m^2n^2} + 3s(m^2 - n^2)$$

$$r_1 = 30smn + 3s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} + 3s(m^2 - n^2) = 30smn + 6sm^2 \quad \text{og}$$

$$r_2 = 30smn + 3s\sqrt[2]{((m^2 + n^2))^2} - 3s(m^2 - n^2) = 30smn + 6sn^2$$

---

iii

n	$n(75,405)$	a	non-zero roots of IDQ
1	(75,405)	90/77	308,360
2	$\left(\frac{5329}{100}, -\frac{129283}{1000}\right)$	$\frac{167167}{497610}$	668668, 1990440
3	$\left(\frac{2447877675}{4713241}, -\frac{116043549439635}{10232446211}\right)$	$-\frac{128665027260}{69283212011}$	-514660109040, 277132848044
4	$\left(\frac{978328360054081}{6685637635600}, \frac{25593591021206391940079}{17286785808865496000}\right)$	$\frac{7010366636418797651}{4173952380480465660}$	16695809521921862640, 28041466545675190604

iv 'Nice' Quartic Polynomials -The Sequel. On rational-derived quartics (archive.org) , On rational-derived quartics (cambridge.org)

v

n	$n(75,405)$	a	non-zero roots of IDQ
1	(75,405)	90/77	308,360
2	$\left(\frac{5329}{100}, -\frac{129283}{1000}\right)$	$\frac{167167}{497610}$	668668, 1990440
3	$\left(\frac{2447877675}{4713241}, -\frac{116043549439635}{10232446211}\right)$	$-\frac{128665027260}{69283212011}$	-514660109040, 277132848044
4	$\left(\frac{978328360054081}{6685637635600}, \frac{25593591021206391940079}{17286785808865496000}\right)$	$\frac{7010366636418797651}{4173952380480465660}$	16695809521921862640, 28041466545675190604

vi

1	x^(2*n+1)(x-u)(x-v) $\rightarrow\ x^{2n+1}\,(-u+x)\,(-v+x)$
2	\$1 $\approx\ u\,v\,x^{2n+1} - u\,x\,x^{2n+1} - v\,x\,x^{2n+1} + x^2\,x^{2n+1}$
3	\$2 Integral: $x^3 \cdot \frac{e^{\ln(x)+2n\ln(x)}}{2n+4} + u\,v\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - u\,x^2 \cdot \frac{e^{\ln(x)+2n\ln(x)}}{2n+3} - v\,x^2 \cdot \frac{e^{\ln(x)+2n\ln(x)}}{2n+3} + c_1$

4	u v x^(2n + 1) Integral: $u\,v\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + c_2$
5	- u x x^(2n + 1) $\rightarrow\ -u\,x^{1+2n+1}$
6	\$5 Integral: $-u\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + c_3$
7	- v x x^(2n + 1) $\rightarrow\ -v\,x^{1+2n+1}$
	\$7

8

$7

Integral: $-v \, \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + c_4$

9

$x^2 \, x^{(2n + 1)}$

$\rightarrow \; x^{2+2n+1}$

10

$9

Integral: $\frac{x^{2n+4}}{2n+4} + c_5$

11

u v x^(2n + 2) / (2n + 2) -u x^(2n + 3) / (2n + 3) -v x^(2n + 3) / (2n + 3) + x^(2n + 4) / (2n + 4)

$\rightarrow \; u\,v\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - u\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3} - v\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+4}}{2n+4}$

8

$7

Integral: $-v \, \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + c_4$

9

$x^2 \, x^{(2n + 1)}$

$\rightarrow \; x^{2+2n+1}$

10

$9

Integral: $\frac{x^{2n+4}}{2n+4} + c_5$

11

u v x^(2n + 2) / (2n + 2) -u x^(2n + 3) / (2n + 3) -v x^(2n + 3) / (2n + 3) + x^(2n + 4) / (2n + 4)

$\rightarrow \; u\,v\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - u\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3} - v\,\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+4}}{2n+4}$

12

u v x^(2) / (2n + 2) - u x^(3) / (2n + 3) - v x^(3) / (2n + 3) + x^(4) / (2*n + 4) = 0

Beregn: $\left\{ x = \frac{n^2 u + n^2 v + 3 n u + 3 n v + 2 u + 2 v - \sqrt{n^4 u^2 - 2 n^4 u v + n^4 v^2 + 6 n^3 u^2 - 12 n^3 u v + 6 n^3 v^2 + 13 n^2 u^2 - \dots}}{2 n^2 + 5 n + 3} \right.$

13

$(n^4 u^2 - 2n^4 u v + n^4 v^2 + 6n^3 u^2 - 12n^3 u v + 6n^3 v^2 + 13n^2 u^2 - 27n^2 u v + 13n^2 v^2 + 12n u^2 - 27n u v + 12n v^2 + 4u^2 - 10u v + 4v^2)$

$\rightarrow \; n^4 u^2 + n^4 v^2 - 2 n^4 u v + 6 n^3 u^2 + 6 n^3 v^2 - 12 n^3 u v + 13 n^2 u^2 + 13 n^2 v^2 - 27 n^2 u v + 12 n u^2 + 12 n v^2 - 27 n u v + 4 \dots$

14

Beregn({$n^4 u^2 + n^4 v^2 - 2n^4 u v + 6n^3 u^2 + 6n^3 v^2 - 12n^3 u v + 13n^2 u^2 + 13n^2 v^2 - 27n^2 u v + 12n u^2 + 12n v^2 - 27n u v + 4u^2 + 4v^2 - 10u v$=p^2}, {u})

$\rightarrow \; \left\{ u = \frac{-\sqrt{4 n^2 v^2 + 12 n v^2 + 4 p^2 + 9 v^2} \, \left| n^2 + 3 n + 2 \right| + 2 n^4 v + 12 n^3 v + 27 n^2 v + 27 n v + 10 v}{2 n^4 + 12 n^3 + 26 n^2 + 24 n + 8}, u = \frac{\sqrt{4 n^2 v^2 + 12 n \dots}}{} \right.$

vii

13 (2n^2 (2(n^2+3n+2)^1 y) + 6n (2(n^2+3n+2)^1 y) + 5(2(n^2+3n+2)^1 y))/(2n^2+ 6n + 4)

$\approx \ 2\,n^2\,y + 6\,n\,y + 5\,y$

viii GeoGebra $u = 2n^2(2smt) + 6n(2smt) + 5(2smt) \pm (2n+3)\left(\left(s(m^2 - t^2)\right)^2 + (2smt)^2\right)^{0.5}$

ix

10 Beregn({3s* (t² + 2t w) = 4z (p² + 3p q), 3s *(w² + 2t w) = 4z*(q² + 3p q)}, {p,q,z})

$\rightarrow \left\{\left\{p = p, q = \left(-3\,t^2 + 3\,w^2 - \sqrt{9\,t^4 + 8\,t^3\,w + 2\,t^2\,w^2 + 8\,t\,w^3 + 9\,w^4}\right) \cdot \frac{p}{2\,t^2 + 4\,t\,w}, z = \left(21\,t^2 - 1\right.\right.\right.$

10 $, z = \left(21\,t^2 - 12\,t\,w - 27\,w^2 - 9\,\sqrt{9\,t^4 + 8\,t^3\,w + 2\,t^2\,w^2 + 8\,t\,w^3 + 9\,w^4}\right) \cdot \frac{s}{64\,p^2}\Big\}, \Big\{$