Funktionen mit Parameter

Hilfsmittelfreies Beispiel

Im Folgenden untersuchen Sie die Funktionsschar

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

a) *Begründen Sie, warum $a \neq 0$ gelten muss!*

b) *Berechnen Sie $f_2(3)$.*

c) *Die Funktion g, mit $g(x) = -\frac{2}{3}\,x^2 + 4\,x - \frac{9}{2}$ ist eine Funktion der Schar. Bestimmen Sie den Parameter a.*

d) *Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar bei $x = a$ eine Nullstelle besitzt.*

e) Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$ und $B(2|1)$

   (1) *Zeigen Sie, dass der Punkt $A(1|1)$ auf keinem Graphen der Schar liegt.*

   (2) *Bestimmen Sie die zwei Funktionen der Schar, auf deren Graphen der Punkt B liegt.*

f) Zeigen Sie, dass die Funktionen der Schar für a > 0 bei $\mathrm{HP}(2\mathrm{a}|\mathrm{a})$ einen Hochpunkt besitzen.

Hilfsmittelbeispiel

Das Algenwachstum in Seen wird durch das Einbringen von Düngemitteln aus der Landwirtschaft beeinflusst.

Die Algenmenge in einem See ist begrenzt. Diese maximale Algenmenge wird hier auf 100% gesetzt.

Die Funktionsschar d_k modelliert das Algenwachstum für die Monate von März (t=3) bis Oktober (t=10). Dabei misst der Parameter k die Menge an Dünger im See in $\frac{mg}{Liter}$.

Ab November sterben die Algen wieder ab und das Modell verliert seine Gültigkeit.

$$d_k(t) \;= \frac{100}{99\,e^{-k\,(t-3)} + 1}, k > 0, 3 \leq t \leq 10$$

Die Funktionsschar d_k ordnet für jede Düngermenge k jedem Zeitpunkt t in Monaten die Algenmenge $d_k(t)$ in Prozent der maximal möglichen Algenmenge zu.

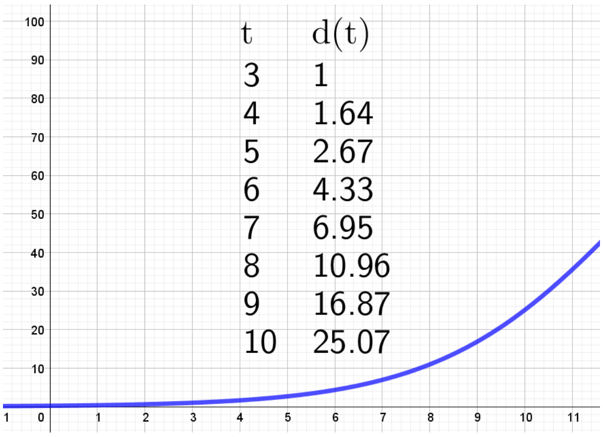
a) Berechnen Sie $d_{0,1}(10)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

b) Berechnen Sie $d_k(3)$.

   (1) Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

   (2) Erklären Sie, von welcher Annahme das mathematische Modell ausgeht.

c) Rechts sehen Sie einen zeitlichen Verlauf des Algenwachstums in einem See.
Bestimmen Sie rechnerisch die Düngermenge k.



t	d(t)
3	1
4	1.64
5	2.67
6	4.33
7	6.95
8	10.96
9	16.87
10	25.07

d) Wenn die Algen bis Oktober über 20% wachsen, kann es im See zu ökologischen Problemen kommen.
Bestimmen Sie die maximale mögliche Düngermenge in einem See, so dass es nicht zu ökologischen Problemen kommt.

e) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wert von 100% für die Algenmenge niemals erreicht wird.

f) In einem See wurde durch Überdüngung der benachbarten Felder ein Menge von $k = 1{,}5\,\frac{mg}{Liter}$ an Dünger eingebracht.

(1) Geben Sie die maximale Menge an Algen im Modellzeitraum in Prozent an.

(2) Bestimmen Sie rechnerisch den maximalen Anstieg der Algenmenge und geben Sie den Zeitpunkt des maximalen Anstiegs an.