Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 23 - plano perpendicular a otros dos y que pasa por un punto conocido

1. Sean los planos:

$\Pi_1 : x+4y-z=-8$

$\Pi_2 : -x+y+z=1$

Y el punto A(-1, 4, 0).

Obtener la ecuación general del plano que corta a Π_1 y Π_2 de manera perpendicular y pasa por el punto A.

El plano que estamos buscando es perpendicular tanto a Π_1 como a Π_2 .

Por lo tanto, el vector normal a Π_1 está contenido en el plano que estamos buscando.

Y el vector normal a Π_2 está también contenido en el plano que estamos buscando.

Es decir, los vectores característicos a Π_1 y a Π_2 son paralelos al vector que buscamos.

$\vec{u}_1=(1,4,-1)$

$\vec{u}_2=(-1,1,1)$

Ambos vectores son linealmente independientes, ya que es fácil comprobar que:

$$\frac{1}{-1}\neq\frac{4}{1}\neq\frac{-1}{1}$$

Con estos dos vectores paralelos al plano y con el punto A, podemos escribir la ecuación paramétrica del plano. O incluso, hacer el producto vectorial de ambos vectores para obtener el vector normal al plano. Es decir:

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_1=\vec{u}_\Pi \quad\rightarrow\quad (1,4,-1)\times(-1,1,1)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} \quad\rightarrow\quad \vec{u}_\Pi=(5,0,5)$$

Las componentes del vector normal son los coeficientes A, B, C de la ecuación general del plano.

$\Pi : 5x+5z+D=0$

El parámetro D lo obtenemos con la condición de contorno de que el plano pasa por el punto A(-1, 4, 0).

$5(-1)+5\cdot 0+D=0 \quad\rightarrow\quad D=5 \quad\rightarrow\quad \Pi : 5x+5z+5=0$

Simplificamos dividiendo entre 5:

$\Pi : x+z+1=0$