# Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales
# Ecuación de Difusión

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales juegan un rol fundamental en Ingeniería y Física. Permiten determinar funciones de varias variables a partir de ciertas condiciones iniciales y/o de contorno. Como ejemplo típico podemos mencionar: la **ecuación de difusión,** que en una dimensión es de la forma:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Esta ecuación, de segundo orden en x y primer orden en t, permite determinar, por ejemplo, la temperatura U(x; t) de una barra conductora de calor de longitud L en función de la posición x y el tiempo t, si se conocen la distribución inicial de temperatura U(x; 0) y las temperaturas en los bordes U(0; t) y U(L; t) (se asume que la barra está térmicamente aislada salvo en los extremos). En este caso es una constante positiva que depende de la conductividad térmica, el calor específico y la densidad del material.

Problema con condiciones iniciales:

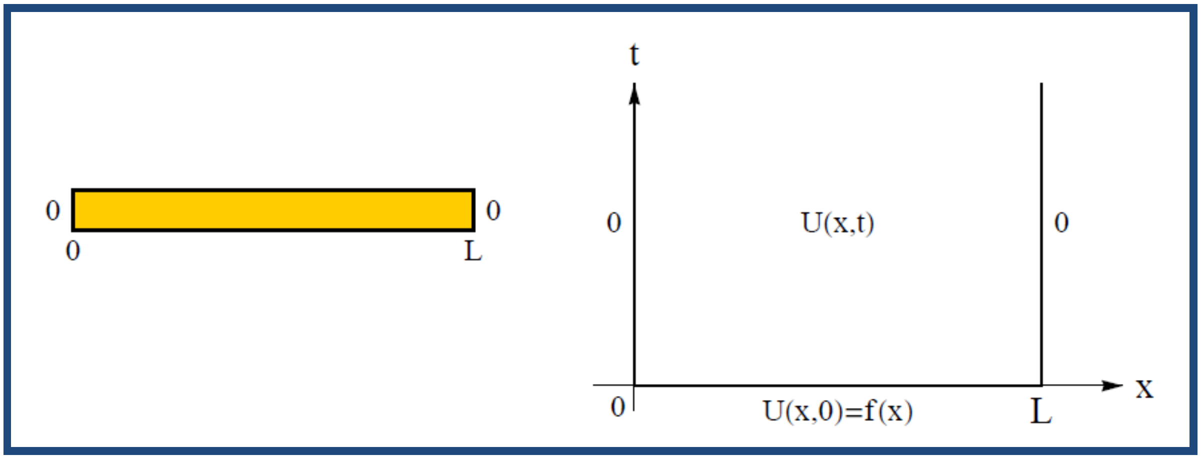
$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad \begin{array}{c} 0 < x < L \\ t > 0 \end{array}$$

con $\alpha > 0$, junto con las *condiciones de contorno*

$$U(0,t) = 0, \quad U(L,t) = 0\,, \quad t > 0$$

y la *condición inicial*

$$U(x,0) = f(x)\,, \quad 0 < x < L$$




La función U(x; t) puede representar, por ejemplo, la temperatura en función de la posición y el tiempo de una barra metálica de longitud L cuyos bordes están a cero grados centigrados (por ejemplo en contacto con hielo) y está lateralmente aislada, teniendo inicialmente (t = 0) una distribución de temperatura dada por f(x). Si la barra está inicialmente a mayor temperatura, se enfriará al aumentar t, tendiendo su temperatura a 0 para tiempos sucientemente grandes. La ecuación describe con todo detalle este proceso de enfriamiento.

La solución analítica U(x,t) que satisface el problema anterior es por el Método de separación de variables y solución por serie de Fourier:

$$\boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x/L)}$$

$$\boxed{B_n \;=\; \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)dx\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$