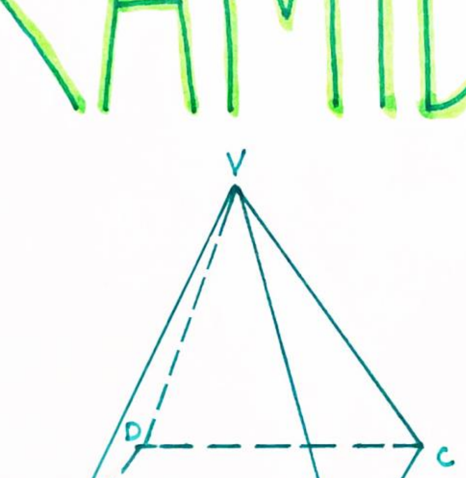
POLIEDRI I ROTACIJSKA TIJELA

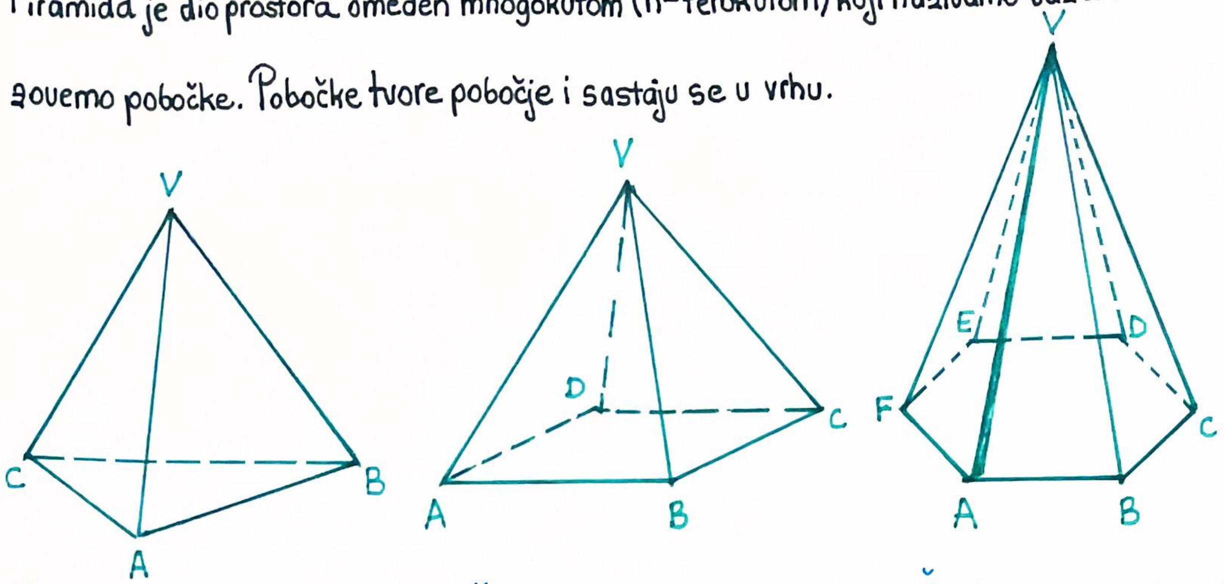
PIRAMIDA



Lucija Ajduković i Lorena Štancl, 2.c

1. Definicija piramide

Piramida je dio prostora omeđen mnogokutom (n-terokutom) koji nazivamo baza i n trokuta koje zovemo pobočke. Pobočke tvore pobočje i sastaju se u vrhu.



Trostrana piramida   Četverostrana piramida   Šesterostrana piramida

2. Imenovanje piramida

Piramide imenujemo prema vrsti mnogokuta koji je baza.

Baza trokut → trostrana piramida
Baza četverokut → četverostrana piramida
} primjeri

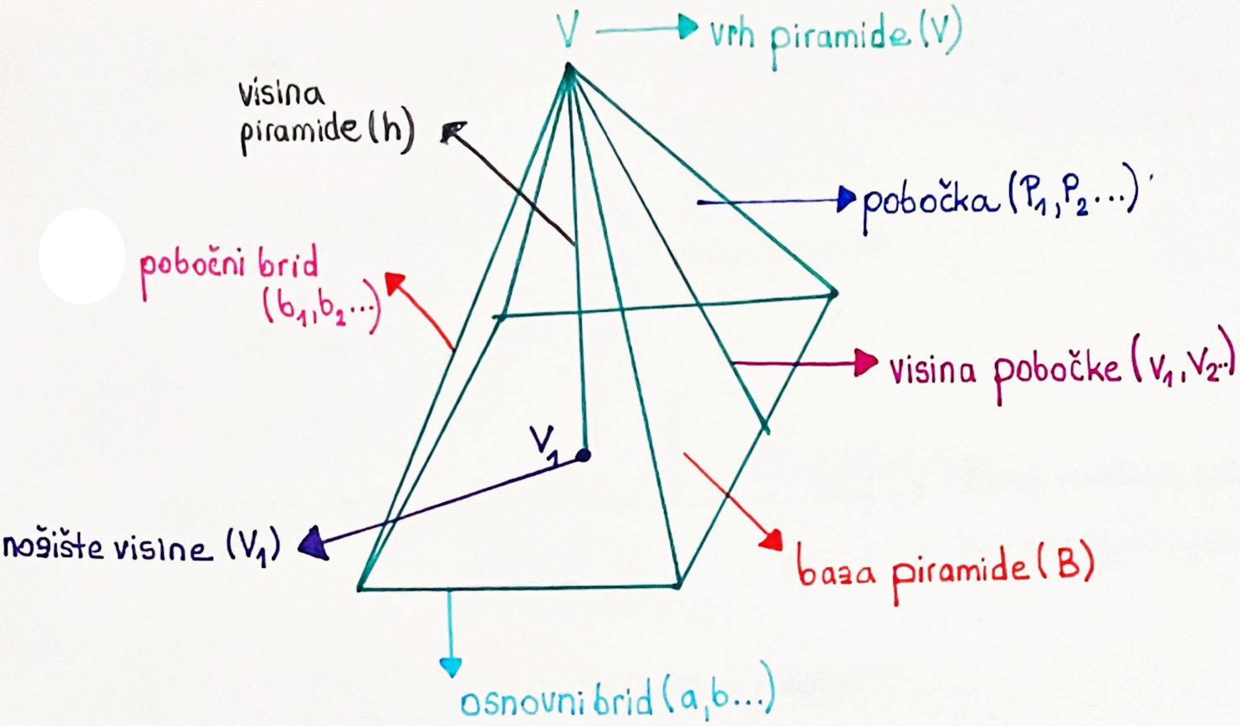
Općenita oznaka je izraz n-terostrana piramida (znači da je baza n-terokut, odnosno mnogokut s n vrhova.

Broj pobočki podudara se s brojem stranica mnogokuta. (Baza trokut → piramida ima tri pobočke)

Kada možemo reći da je piramida pravilna? Piramida je pravilna ako joj je baza pravilan mnogokut, a sve pobočke međusobno sukladni jednakokračni trokuti.

Kada možemo reći da je piramida uspravna? Piramida je uspravna kada se njenoj bazi može opisati kružnica i nožište visine joj pada u središte te kružnice.

3. Dijelovi piramide



Vrh piramide: točka van mnogokuta s kojom ga spajamo

Bočni brid: dužina koja spaja vrh mnogokuta s vrhom piramide

Osnovni brid: stranice mnogokuta

Visina piramide: udaljenost od vrha piramide do njene baze

Visina pobočke: visina trokuta koji je pobočka piramide

Pobočka: strana piramida koja sadržava vrh piramide

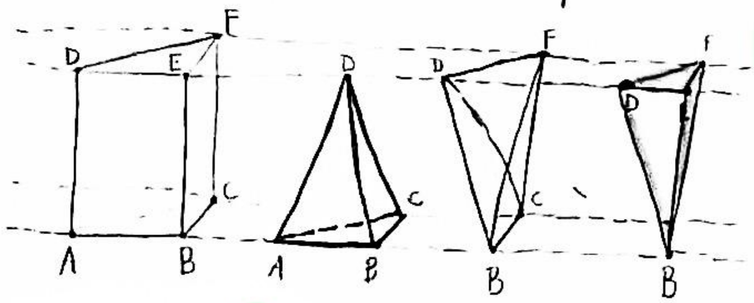
Baza piramide: n-terokut, strana piramide koja ne sadržava vrh piramide

Nožište visine: ortogonalna projekcija vrha piramide (V) na ravninu baze

4. ~ Usporedba piramide i prizme ~

1) Usporedba volumena piramide i volumena prizme

$V_{Lj} = V_{Ž} = V_P = \frac{1}{3} V_{prizme}$



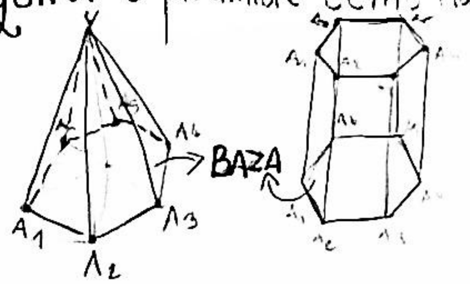
$V_{piramide} = \frac{1}{3} V_{prizme}$

$V = \frac{1}{3} B v$

B → Površina osnovke (baze)

v → visina

2) Mnogokut u piramidi ćemo kao i kod prizme zvati baza.



3) Broj vrhova, bridova i stranica

	Piramida	Prizma
broj vrhova	$n+1$	$2n$
broj bridova	$2n$	$3n$
broj strana	$n+1$	$n+2$

5. Formule i Cavalierijev princip

OBUJAM PIRAMIDE: → $V(piramide) = \frac{1}{3} V(prizme) \Longrightarrow$
$V(piramide) = \frac{1}{3} B \cdot h$; $V(prizme) = B \cdot h$
Volumen jest mjera prostora koju zauzima to tijelo.

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

Volumen

Baza

visina piramide

OPLOŠJE PIRAMIDE: → Zbroj površina svih strana (likova) koje omeđuju to tijelo.

$$O = B + P$$

Oplošje

Baza

površina pobočja

→ CAVALIERIJEV PRINCIP:

Ako se dva geometrijska nalaze između dviju paralelnih ravnina i svaka ravnina paralelna tim ravninama siječe tijela tako da presjeci imaju istu površinu, tada tijela imaju jednaka volumene.

→ HOMOTETIJA:

preslikavanje koje svakoj točki ravnine T pridružuje točku T' te iste ravnine

Zbog svojstva HOMOTETIJE i prema CAVALIERIJEVU PRINCIPU dvije piramide koje imaju osnovke jednakih površina i jednake visine imaju jednake volumen

EULEROVA FORMULA: → vrijedi za pravilne poliedre

$$\underbrace{S}_{\text{strane}} - \underbrace{B}_{\text{bridovi}} + \underbrace{V}_{\text{vrhovi}} = 2$$

6. Primjeri zadataka

Zadatci: Udžbenik Matematika 2, 2. dio, str. 124

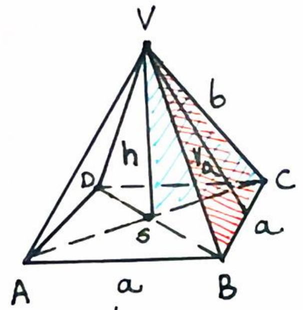
14. $P_{osnovka} = 484\ cm^2$ → četverostrana → četverokut

pravilna → pravilni četverokut → osnovka je KVADRAT

$O = 2684\ cm^2$

$V = ?$

Skica:



$V = \frac{1}{3} B \cdot h$ → $h = ?$

→ Bazu znamo, ako je baza pravilni četverokut (kvadrat), onda znamo (možemo saznati) duljinu osnovnog brida (a).

$a = ?$

baza kvadrat

$P_\square = 484$

$P_\square = a^2$

$484 = a^2$

$a = \sqrt{484}$

$a = 22$

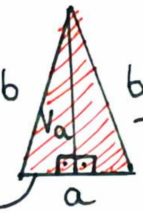
1. Preko podatka za oplošje i formule za oplošje, doći ćemo do površine jedne pobočke (to smijemo, zato što kada je baza piramide pravilni mnogokut, pobočke su sukladni jednakokračni trokuti)

$O = B + P \ (P = 4 \cdot P_\Delta)$

$4P_\Delta = O - B \ /:4$

$P_\Delta = 550$ → površina jedne pobočke

2. S obzirom da su pobočke jednakokračni trokuti, možemo primjeniti formulu za površinu trokuta preko visine da izračunamo visinu pobočke, s tim podatkom, moći ćemo izračunati bočni brid (b). – koji će nam bit potreban za izračunavanje visine piramide (h).



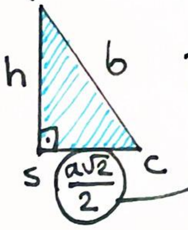
$\frac{a}{2}$

$P_\Delta = \frac{a \cdot V_a}{2} \Rightarrow V_a = \frac{2P_\Delta}{a} = 50$

→ PITAGORA

$b = \sqrt{V_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 51{,}19$

3. Sada kada imamo podatak za bočni brid, promatranjem drugog pravokutnog trokuta možemo doći do podatka o visini piramide.



$\frac{a\sqrt{2}}{2}$ → pola plošne dijagonale kvadrata

PITAGORA

$b^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$h = 48{,}769$

4. Uvrstimo podatke o površini osnovke (zadano) i visini piramide (dobiveno) da dobijemo traženi obujam.

izračunato

$V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 484 \cdot 48{,}769 \Rightarrow V \approx 7869\ cm^3$

17. $a = 12$ cm (osnovka piramide $\longrightarrow$ jednakostraničan trokut $\longrightarrow$ sve stranice jednake duljine)

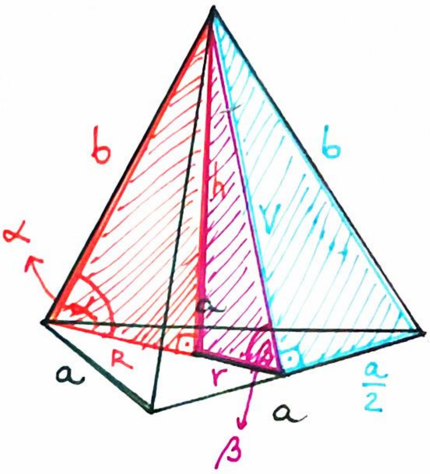
$b = 13$ cm

TROSTRANA PIRAMIDA

α (prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke) = ?

β (prikloni kut bočnih strana prema osnovci) = ?

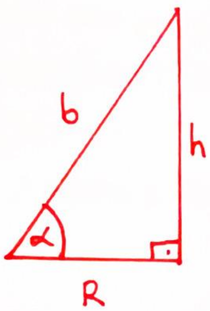
Skica:



R – polumjer opisane kružnice jednakostraničnom trokutu stranice a

r – polumjer upisane kružnice jednakostraničnom trokutu stranice a

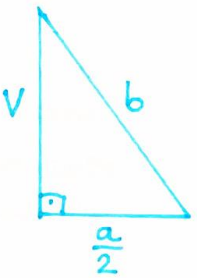
1. Promatrat ćemo pravokutni trokut sa stranicama b (bočni brid), R (radijus opisane kružnice jednakostraničnog trokuta) i h (visina piramide). Koristeći formulu za polumjer opisane kružnice jednakostraničnog trokuta, podatak o duljini bočnog brida i trigonometriju možemo doći do veličine priklonog kuta bočnog brida prema ravnini osnovke (α).



$$\cos\alpha = \frac{R}{b} = \frac{\frac{12\sqrt{3}}{3}}{13} = 0{,}5329$$

$$\alpha = 57°47'$$

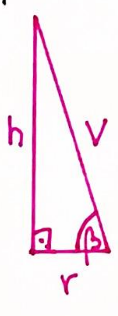
2. Sada promatramo trokut sa stranicama V (visina pobočke), $\frac{a}{2}$ (pola osnovnog brida) i b (bočni brid). Koristeći Pitagorin poučak, doći ćemo do duljine stranice V.



$$V = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$V = 11{,}53 \text{ cm}$$

3. Na kraju, promatramo pravokutni trokut sa stranicama h (visina piramide), r (polumjer upisane kružnice jednakostraničnog trokuta) i v (visina pobočke). Koristeći formulu za upisanu kružnicu jednakostraničnog trokuta, izračunati podatak o visini pobočke i trigonometriju, doći ćemo do veličine priklonih kutova bočnih strana prema osnovci.



$$\cos\beta = \frac{r}{V} = \frac{\frac{12\sqrt{3}}{6}}{11{,}53} = 0{,}3004$$

$$\beta = 72°31'$$

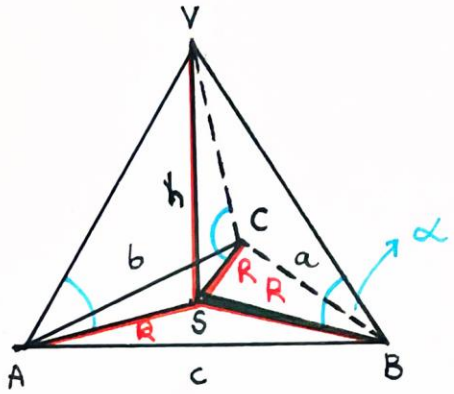
(18.) $a = 15$ cm
$b = 16$ cm
$c = 17$ cm
$\alpha = 45°$

$\left.\begin{matrix} a = 15\text{ cm} \\ b = 16\text{ cm} \\ c = 17\text{ cm}\end{matrix}\right\}$ osnovka je raznostraničan trokut $\longrightarrow$ TROSTRANA PIRAMIDA

$V = ?$

$V = \frac{1}{3} B \cdot h$

Skica:



1. Sa skice vidimo osnovne bridove a, b i c te kutove α koji su nam zadani u zadatku. Gledanjem skice ovog zadatka možemo zaključiti sljedeće:

$|AB| = c = 17$ cm $\quad \angle SBV = \angle SCV = \angle SAV = 45°$

$|BC| = a = 15$ cm $\quad |AS| = |BS| = |CS| = R \rightarrow$ polumjer opisane kružnice

$|CA| = b = 16$ cm $\quad |VS| = h$

2. Uočili smo pravokutne trokute na skici, zaključili smo da su trokuti također i jednakokračni. To nas dovodi do ovih zaključaka:

$\Delta ASV = \Delta BSV = \Delta CSV$ = pravokutni trokuti

$\downarrow$

zašto su jednakokračni?

$\left.\begin{matrix} \angle SAV = \angle SVA = 45° \\ \angle SBV = \angle SVB = 45° \\ \angle SCV = \angle SVC = 45° \end{matrix}\right\}$ što nam to govori? $\nearrow$ to znači da je visina piramide (h) jednaka polumjeru opisane kružnice trokuta ABC $\Longrightarrow$ $h = R$

3. Sada možemo izračunati volumen ove piramide. Koristit ćemo formulu za površinu trokuta koja uključuje radijus opisane kružnice te umjesto visine piramide uvrstit izraz za radijus u formulu za volumen.

$P_\Delta = B$

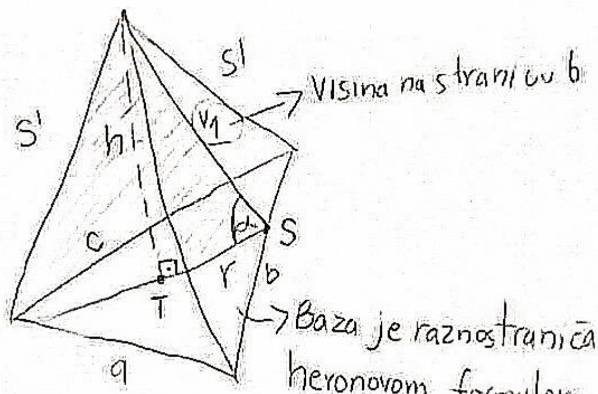
$B = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4B}$

$\left.\begin{matrix} R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4B}, R = h \\ V = \frac{1}{3} B \cdot h \end{matrix}\right\}$ $V = \frac{1}{3} \cancel{B} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4\cancel{B}} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{4} \Rightarrow V = \frac{a \cdot b \cdot c}{12}$

$V = 340 \text{ cm}^3$

20. $a = 13$
$b = 20$
$c = 21$
$\alpha = 30°$

$V = ?$



→ visina na strani v_1 b

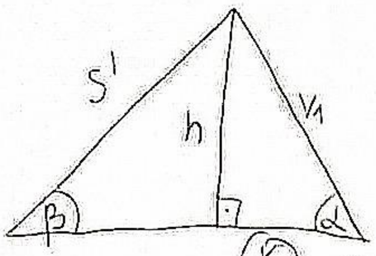
→ Baza je raznostraničan trokut, računamo površinu baze heronovom formulom

heronova formula

$P_\Delta = B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \frac{a+b+c}{2} = 27$

$B = 126 cm^2$



r → udaljenost od težišta do sredine pobočke

$B = r \cdot s$

$r = \frac{B}{s}$

$r = 4.67$

$h = ?$

$tg(30°) = \frac{h}{r} / \cdot r$

$r\,tg(30°) = h$

$h = 2.7$

$V = \frac{B \cdot h}{3}$

$\boxed{V = 113.24 cm^3}$

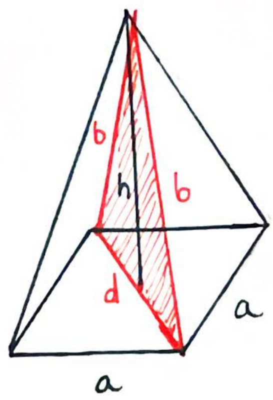
24. $h = 18\ cm$
$P_D = 378\ cm^2$ } → pravilna četverostrana piramida; baza kvadrat

---

$V = ?$

$V = \frac{1}{3} B \cdot h$

Skica:



1. Pomoću zadanog podatka o površini dijagonalnog presjeka, formulom za površinu pravokutnog trokuta možemo doći do duljine plošne dijagonale baze (d).

$P_D = \frac{d \cdot h}{2} \Rightarrow d = \frac{2P_D}{h} = \frac{2 \cdot 378}{18} = 42 \Rightarrow d = 42$

2. Sada kada imamo podatak o duljini dijagonale, možemo izračunati duljinu osnovnog brida (a) pomoću formule.

$d = a\sqrt{2}$

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{42}{\sqrt{2}} = 21\sqrt{2}$

3. Sada na kraju, možemo izračunati volumen

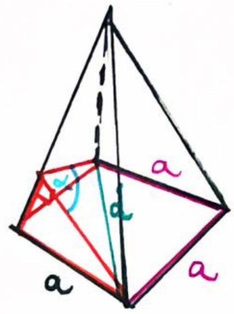
$V = \frac{a^2 \cdot h}{3} = 5292\ cm^3$

27. $a = 4\,cm$, $\alpha = 120°$ → pravilna četverostrana piramida ; baza je kvadrat

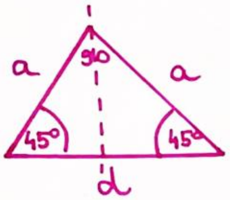
---

$P = ?$

Skica:



1. Prvo gledamo trokut u bazi te iz njega dobijemo duljinu plošne dijagonale baze. To sve možemo i na lakši način, koristeći gotovu formulu.

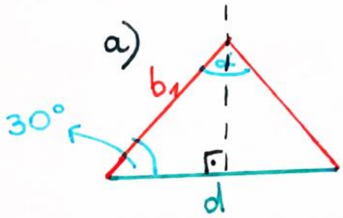


$\cos 45° = \frac{\frac{d}{2}}{a} \Rightarrow \frac{d}{2} = \cos 45° \cdot a$

$d = 4\sqrt{2}$ ILI $d = a\sqrt{2}$
$d = 4\sqrt{2}$

2. Zatim, obratit ćemo pažnju na trokute koji sijeku pobočke. Pomoću prvog trokuta dobit ćemo isječak koji ćemo nazvati b_1 - on će nam biti ključan u drugom promatranom trokutu za izračun kuta.

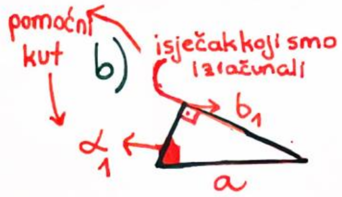
a)



$\cos 30° = \frac{\frac{d}{2}}{b_1}$

$b_1 = \frac{\frac{d}{2}}{\cos 30°} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

b)



$\sin \alpha_1 = \frac{b_1}{a} = \frac{\frac{\cancel{4}\sqrt{2}}{3}}{\cancel{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\alpha_1 \approx 54{,}74°$

3. Sada promatramo jednakokračan trokut-pobočku. Pomoću tog trokuta doći ćemo do podatka za visinu pobočke.

$\beta = 90° - \alpha_1$

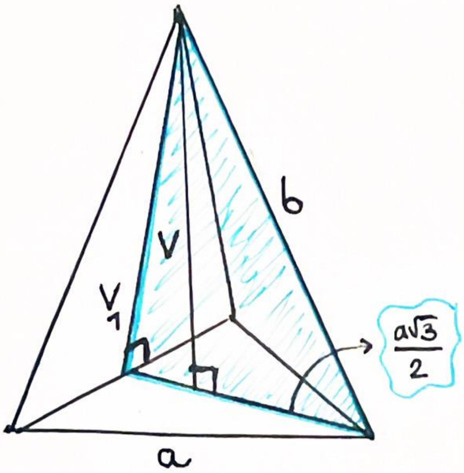
$\tan\beta = \frac{\frac{a}{2}}{V} \Rightarrow V = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\beta} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

4. Na kraju, pomoću dobivenih i izračunatih podataka računamo površinu pobočja

$P_1 = \frac{a \cdot V}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$P = 4 \cdot P_1 = 16\sqrt{2}$

7. Pravilna trostrana, četverostrana i šesterostrana piramida



OPLOŠJE I OBUJAM

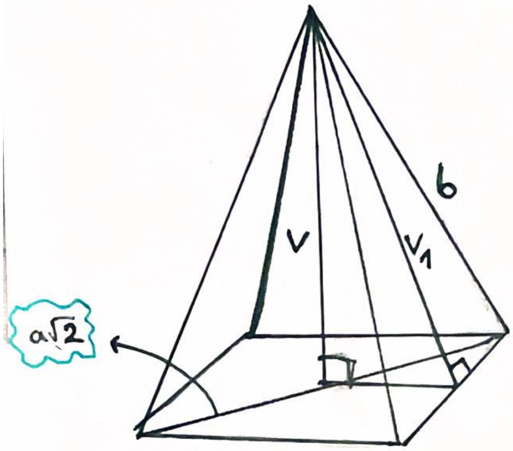
$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av_1}{2} \; ; \; V = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot v}{12}$$

DRUGE FORMULE

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$



OPLOŠJE I OBUJAM

$$O = a^2 + 2av_1 \; ; \; V = \frac{a^2 v}{3}$$

POVRŠINA DIJAGONALNOG PRESJEKA

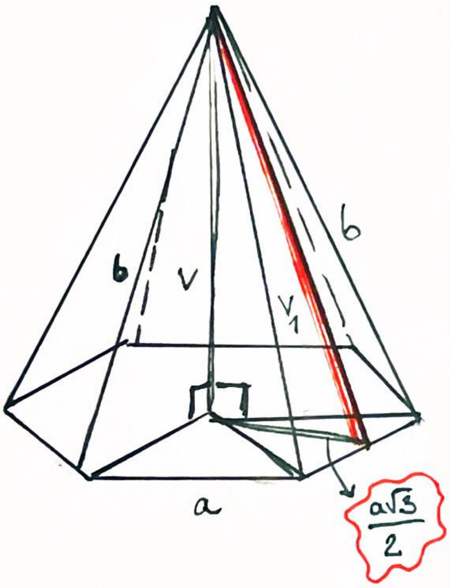
$$D = \frac{a\sqrt{2}\cdot v}{2}$$

DRUGE FORMULE

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$



OPLOŠJE I OBUJAM

$$O = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3av_1 \; ; \; V = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot v}{2}$$

POVRŠINA VEĆEG DIJAGONALNOG PRESJEKA

$$D = a\cdot v$$

DRUGE FORMULE

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$b^2 = v^2 + a^2$$