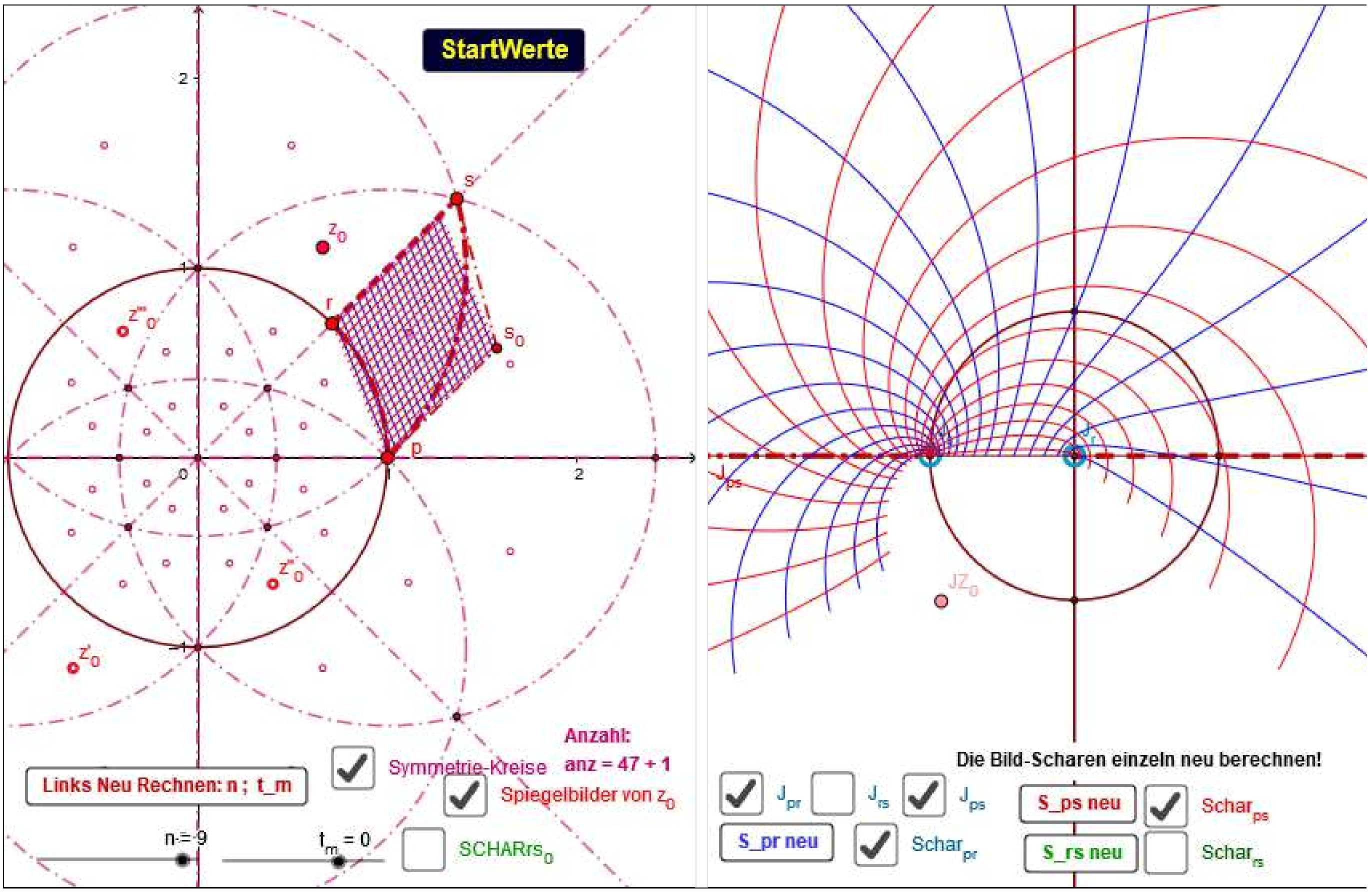
J -Funktion



Diese Seite ist Teil des ***GeoGebra-Books*** Moebiusebene. **(16.10. 2019)**
Kapitel: "***Spezielle komplexe Funktionen***"

Die Wirkung der Schalter erfolgt meist sehr verzögert!

Die ***absolute Invariante*** $\mathcal{J}$ von 4 verschiedenen Punkten $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - identisch mit der ***absoluten Invariante*** von ***elliptischen Differentialgleichungen*** des Typs
$(w')^2 = (w - e_1) \cdot (w - e_2) \cdot (w - e_3) \cdot (w - e_4)$ - führt auf eine interessante konforme, also komplex-differenzierbare Funktion, die wir im Applet oben versuchen darzustellen.

Die Lage von 4 ***Punkten*** $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ in der **GAUSS**schen Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist - unter Berücksichtigung der ***Reihenfolge*** - eindeutig festgelegt durch ihr ***komplexes Doppelverhältnis***
$d = Dv\,(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$.
D.h.: Stimmen für 2 Punkte-Quadrupel die ***Doppelverhältnisse*** überein, so gibt es genau eine gleichsinnige ***Möbius-Transformation***, welche die Punkte aufeinander abbildet - unter Beibehaltung der Reihenfolge!
Bei Umsortieren der 4 Punkte treten als Doppelverhältnis folgende Werte auf:
$d, \dfrac{1}{d}, 1 - d, \dfrac{1}{1-d}, \dfrac{d}{1-d}, \dfrac{1-d}{d}$.
Die absolute Invariante von 4 ***Punkten*** berechnet sich aus dem ***Doppelverhältnis***:
$J = \dfrac{1}{27} \cdot \left(\dfrac{d+1}{d-1}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{d-2}{d}\right)^2 \cdot (2d-1)^2$.
4 Punkte lassen sich nur dann durch eine ***Möbiustransformation*** auf ***4 andere Punkte*** abbilden, wenn deren ***absolute Invarianten*** übereinstimmen! Siehe dazu das ***book-Kapitel*** ↪ "Lage von 4 Punkten".

Zu ***4 verschiedenen Punkten*** gibt es ein ↪ ***euklidisches KOS***, in welchem die Punkte durch $f, \dfrac{1}{f}, -f, -\dfrac{1}{f}; f \in \mathbb{C}$ dargestellt werden; wir nennen dies: ***Darstellung in Normalform***! Die ***4 Punkte*** besitzen damit das ***Doppelverhältnis*** $d = \dfrac{4 \cdot f^2}{(1 + f^2)^2}$.

Wir untersuchen das ***Doppelverhältnis*** d und die ***Absolute Invariante*** $\mathcal{J}$ als ***komplexe Funktion*** von

– Walter Füchte

Die komplex-differenzierbare Funktion $z \mapsto \mathcal{J}(z)$ wird als Quotient zweier Polynome von ziemlich hoher Ordnung natürlich nur mit ziemlich großem Rechenaufwand darstellbar sein; daher ist im Applet oben vorgesehen, dass die Eigenschaften in Abhängigkeit von den Parametern nur schrittweise zu erkunden sind!

Einige Eigenschaften von $z \mapsto \mathcal{J}(z)$:

- Die Funktion $\mathcal{J}$ ist invariant unter der ***OKTAEDER-Gruppe***: man betrachte die ***Symmetrie-Kreise***! Die ***OKTAEDER-Gruppe*** besteht aus 24 ***Kreis-Spiegelungen*** und 24 gleichsinnigen ***Möbiustransformationen***; ein Punkt z_0 besitzt in der Regel 47 Bilder! Für alle diese Punkte ${z'}_0$ gilt: $\mathcal{J}({z'}_0) = \mathcal{J}(z_0)$ oder $\mathcal{J}({z'}_0) = \overline{\mathcal{J}(z_0)}$.
- Die Funktion $\mathcal{J}$ bildet das Innere des ***Kreis-Dreiecks*** **prs** auf die ***obere Halbebene*** $y > 0$ ab. Der ***Rand des Dreiecks*** wird abschnittsweise auf die *reelle Achse* abgebildet!
- Die Funktion $\mathcal{J}$ beschreibt die Lage der ***4 Punkte*** $z, -z, \frac{1}{z}, -\frac{1}{z};\ z \neq 1$: ist $\mathcal{J}$ reell und ≥ 0, so liegen die ***Punkte*** auf dem *Einheitskreis* oder den *Achsen*; also allgemein: ist die ***absolute Invariante*** eine nicht-negative reelle Zahl, so sind die ***4 Punkte konzyklisch***! Ist die ***Absolute Invariante*** negativ, so liegen die ***4 Punkte spiegelbildlich auf 2 orthogonalen Kreisen***. <u>*Sonderfall*</u> $\mathcal{J} = -1$: Die ***4 Punkte*** sind ***möbiusgeometrisch*** die Ecken eines ***Tetraeders***.
- <u>*Sonderfall*</u> $\mathcal{J} = 0$: Sind die ***Punkte*** verschieden, so besitzen sie ***harmonische Lage***! Sie sind sowohl ***konzyklisch***, als auch liegen sie ***spiegelbildlich auf zwei orthogonalen Kreisen***!

Durch den ***Punkt*** **I** ist im linken Fenster die ***Ursprungsgerade*** und der ***konzentrische Kreis*** um den Ursprung gelegt. Die Bilder unter $\mathcal{J}$ sind als ***Ortskurven*** im rechten Fenster definiert.