

MathCon

The Mathematics Firm

Matrices

Definiciones básicas de matrices

www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2009



Contenido

1. Matrices	3
1.1. Matrices cuadradas	5
1.2. Matriz transpuesta	5
1.3. Elementos de una matriz	6
1.4. Matriz identidad	6
1.5. Matriz nula	7
1.6. Matriz diagonal	7
1.7. Matriz triángular	7
1.8. Matrices binarias	8
2. Operaciones entre matrices	10
2.1. Suma entre matrices	10
2.2. Producto por un escalar	11
2.3. Producto de matrices	12

1

Matrices

Definición 1 Una matriz real es una función A de $[1, \dots, n] \times [1, \dots, m]$, al conjunto de los números reales \mathbb{R} , y decimos que A tiene orden $n \times m$

Una matriz A se representa con todos sus valores de manera usual como un arreglo de n filas y m columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

También la podemos representar como $A = (a_{ij})$, donde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Ejemplos de matrices:

1. Ejemplo de una matriz 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Como función la matriz anterior se escribe $A : [1, \dots, n] \times [1, \dots, m] \rightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\mapsto a_{11} \\ (1, 2) &\mapsto a_{12} \\ (2, 1) &\mapsto a_{21} \\ (2, 2) &\mapsto a_{22} \end{aligned}$$

2. Ejemplo de una matriz 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Como función se escribe $A : [1, \dots, 3] \times [1, \dots, 3]$, donde:

$$\begin{aligned} (11) &\mapsto a_{11} \\ (12) &\mapsto a_{12} \\ (13) &\mapsto a_{13} \\ (21) &\mapsto a_{21} \\ (22) &\mapsto a_{22} \\ (23) &\mapsto a_{23} \\ (31) &\mapsto a_{31} \\ (32) &\mapsto a_{32} \\ (33) &\mapsto a_{33} \end{aligned}$$

3. Ejemplo de una matriz 3×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

4. Ejemplo de una matriz 2×3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

5. Ejemplo de una matriz 1×3 : $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$

6. Ejemplo de una matriz 3×1 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Igualdad de matrices:

Definición 2 Dos matrices A, B del mismo orden $n \times m$ son iguales si y sólo si, son iguales como funciones. Es decir si son iguales entrada por entrada:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

1.1. Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas son aquellas que tienen el mismo número de filas que de columnas. Éste conjunto de matrices suele escribirse como M_n . Las matrices cuadradas tienen propiedades particulares.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.2. Matriz transpuesta

Dada una matriz A se define la matriz transpuesta A^T (la transpuesta), como aquella que cambia las filas por columnas, o las columnas por filas, es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } A^T = (a_{ji})$$

Para una matriz en M_3 :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:

1. $(A^T)^T = A$, la transpuesta de una transpuesta es igual a la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A^T)^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $(rA)^T = rA^T$, la transpuesta de un producto escalar es el producto escalar de la transpuesta.
3. Si $A = A^T$, la matriz se llama simétrica.
4. Si $A^T = -A$, la matriz se llama antisimétrica.

1.3. Elementos de una matriz

1. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada decimos que los elementos a_{11}, a_{22}, \dots conforman la diagonal principal de una matriz. Por ejemplo en M_3 ,

$$N_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in M_n$ una matriz cuadrada definimos a la traza de la matriz A como

$$tr(a) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

1.4. Matriz identidad

En M_n existe la matriz identidad, que consiste en una matriz con unos en la diagonal (es decir donde $i = j$) y ceros en otro lugar (o sea donde $i \neq j$).

Por ejemplo en M_3 ,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.5. Matriz nula

En M_n existe la matriz nula N , que consiste en una matriz donde todos sus elementos a_{ij} son cero.

Por ejemplo en M_3 ,

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6. Matriz diagonal

La matriz es diagonal si tiene valores cero fuera de la diagonal. En la diagonal es posible tener ceros o no.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.7. Matriz triángular

Una matriz es triángular superior, si tiene valores cero abajo de la.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i > j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es triángular inferior, si tiene valores cero arriba de la diagonal.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ con } i < j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz es no negativa si todas sus entradas no son negativas.

$$\text{Si } a_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

Una matriz simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, es decir si $A = A^T$

$$\text{Si } a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.8. Matrices binarias

Una matriz es binaria, si sus entradas toman sólo dos valores diferentes, podemos tomar los valores de 0, 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices binarias tienen varias aplicaciones, los valores 0, 1 representan elementos de un campo finito de dos elementos, esto quiere decir que los elementos 0, 1 se pueden multiplicar y sumar, y en ambos casos forman un grupo Abelian.

Es decir:

$$+ : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\begin{array}{l} 0 + 0 \mapsto 0 \\ 0 + 1 \mapsto 1 \\ 1 + 0 \mapsto 1 \\ 1 + 1 \mapsto 0 \end{array}$$

Para esta suma:

1. La suma es conmutativa.
2. La suma es asociativa.

3. Existe el neutro aditivo, 0.
4. Existe el inverso aditivo, $-a$.

$$\cdot : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\begin{array}{lcl} 0 \cdot 0 & \mapsto & 0 \\ 0 \cdot 1 & \mapsto & 0 \\ 1 \cdot 0 & \mapsto & 0 \\ 1 \cdot 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Para este producto:

1. El producto es conmutativo.
2. El producto es asociativo.
3. Existe el neutro multiplicativo, 1.
4. Existe el inverso multiplicativo, a^{-1} .

2

Operaciones entre matrices

2.1. Suma entre matrices

La suma está definida sólo para matrices del mismo orden, es decir, sólo se puede sumar una matriz de orden $n \times m$ con otra de orden $n \times m$. La suma se realiza entrada por entrada, es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ y } B = (b_{ij}), \text{ entonces } A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplos de suma de matrices:

1. Una matriz de orden 2×2 más otra del mismo orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) + (-1) & (2) + (0) \\ (3) + (2) & (4) + (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz de orden 3×2 más otra del mismo orden 3×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz de orden 1×3 más otra del mismo orden 1×3 .

$$(2 \ 0 \ 5) + (6 \ -2 \ 1) = (8 \ -2 \ 6)$$

4. Una matriz de orden 3×1 más otra del mismo orden 3×1 .

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz 3×3 sumada con otra del mismo orden 3×3 .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Las matrices con la suma forman un grupo Abeliano, es decir:

1. La suma de matrices es conmutativa, $A + B = B + A$.
2. La suma de matrices es asociativa, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Existe la matriz (neutro aditivo) cero, tal que $A + 0 = 0 + A = A$.
4. Para toda matriz A , existe (inverso aditivo) la matriz $-A$.

2.2. Producto por un escalar

El producto de un escalar (número real) r por una matriz rA , se define de la forma natural, es decir, multiplicar cada entrada de A por el número r . El orden de A puede ser cualquiera.

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } rA = (ra_{ij})$$

Ejemplos

1. Una matriz 2×2 por $r = 3$.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 3×2 por $r = 2$.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 3×3 por r .

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$$

2.3. Producto de matrices

El producto de matrices está definido, entre A , matriz de orden $n \times p$, por B de orden $p \times m$. Dando como resultado C de orden $n \times m$

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ y } B = (b_{ij}), \text{ entonces } C = (c_{ij}) \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik})(b_{kj}).$$

Ejemplos de producto de matrices:

1. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (3)(2) \\ (1)(3) + (2)(4) & (0)(3) + (3)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

El proceso es el siguiente:

- a) Se multiplica la primera fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

b) Se avanza de fila y se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & - \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & - \end{pmatrix}$$

c) De manera similar se multiplica la primera fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ (1)(3) + (2)(4) & - \end{pmatrix}$$

d) Avanzando de fila finalmente, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (0)(1) + (3)(2) \\ (1)(3) + (2)(4) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-3) + (-1)(5) & (3)(-3) + (4)(5) \\ (-2)(1) + (-1)(2) & (3)(1) + (4)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Una matriz 2×2 por otra de orden 2×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1) + (1)(1) & (2)(1) + (1/2)(1) \\ (-1)(2) + (1)(-1) & (2)(2) + (1/2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz 2×3 por otra de orden 3×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)(1) + (0)(3) + (3)(5) & (1)(1) + (1/2)(3) + (-2)(5) \\ (-1)(2) + (0)(4) + (3)(6) & (1)(2) + (1/2)(4) + (-2)(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -15/2 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz A , 3×3 por otra B de orden 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Resumiendo:

1. La suma de matrices forma un grupo Abelian, es decir, es conmutativa, es asociativa, existe la matriz cero 0 , y para toda matriz A , existe la matriz inversa aditiva $-A$.
2. Para el producto de matrices: éste NO es conmutativo, si es asociativo, existe la matriz neutra I (para matrices cuadradas), y NO para toda matriz A , existe su matriz inversa multiplicativa A^{-1} .

Propiedades de la matriz transpuesta y operación entre matrices:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$, la transpuesta de una suma, es la suma de las transpuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A+B} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A+B)^T} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. $(AB)^T = B^T A^T$, la transpuesta de un producto es el producto conmutado de las transpuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(AB)^T} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{A^T} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, B \xrightarrow{B^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 20 & 18 \end{pmatrix}$$