<u>Forme standard des polynômes de Lagrange</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ points (x_0, y_0), (x_1, y_1)... (x_{n-1}, y_{n-1}), les x_i distincts deux à deux.

Alors l'unique polynôme L satisfaisant :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \tilde{L}(x_i) = y_i \text{ et} \deg(L) \leq n-1$$

Est :

$$L(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^{n-1} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Posons :

$$P_{n,j} = \prod_{i=0, i \neq j}^{n-1} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$$

Alors, par relation de Chasles pour les produits :

$$P_{n,j} = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(\left(\prod_{i=0}^{j-1} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right) \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right) \right)$$

Par changements d'indice $i - 1 \to i$ et $i + j \to i$ dans les produits :

$$L(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(\left(\prod_{i=1}^{j} \frac{X - x_{i-1}}{x_j - x_{i-1}} \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1-j} \frac{X - x_{i+j}}{x_j - x_{i+j}} \right) \right)$$

D'une part :

$$\prod_{i=1}^{j} \frac{X - x_{i-1}}{x_j - x_{i-1}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{j} (x_j - x_{i-1})} \cdot \prod_{i=1}^{j} (X - x_{i-1})$$

D'autre part :

$$\prod_{i=1}^{n-1-j} \frac{X - x_{i+j}}{x_j - x_{i+j}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1-j} (x_j - x_{i+j})} \cdot \prod_{i=1}^{n-1-j} (X - x_{i+j})$$

Or, d'après une étude combinatoire du binôme de Newton :

$$\prod_{i=1}^{n}(X+Y_i)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(Y_1,\dots,Y_n)\cdot X^{n-k}$$

Où σ_k désignent les polynômes symétriques élémentaires.

Donc d'une part :

$$\prod_{i=1}^{j}(X-x_{i-1})=\sum_{k=0}^{j}\tilde{\sigma}_k(-x_0,\dots,-x_{j-1})\cdot X^{j-k}$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{j}\frac{X-x_{i-1}}{x_j-x_{i-1}}=\sum_{k=0}^{j}\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_0,\dots,-x_{j-1})}{\prod_{i=1}^{j}(x_j-x_{i-1})}\cdot X^{j-k}$$

D'autre part :

$$\prod_{i=1}^{n-1-j}(X-x_{i+j})=\sum_{k=0}^{n-1-j}\tilde{\sigma}_k(-x_{j+1},\dots,-x_{n-1})\cdot X^{n-1-j-k}$$

Soit :

$$\prod_{i=1}^{n-1-j}\frac{X-x_{i+j}}{x_j-x_{i+j}}=\sum_{k=0}^{n-1-j}\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_{j+1},\dots,-x_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1-j}(x_j-x_{i+j})}\cdot X^{n-1-j-k}$$

Ainsi :

$$P_{n,j}=\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_0,\dots,-x_{j-1})}{\prod_{i=1}^{j}(x_j-x_{i-1})}\cdot X^{j-k}\right)\left(\sum_{k'=0}^{n-1-j}\frac{\tilde{\sigma}_{k'}(-x_{j+1},\dots,-x_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1-j}(x_j-x_{i+j})}\cdot X^{n-1-j-k'}\right)$$

Or, par produit de deux sommes :

$$P_{n,j}=\sum_{k=0}^{j}\sum_{k'=0}^{n-1-j}\left(\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_0,\dots,-x_{j-1})}{\prod_{i=1}^{j}(x_j-x_{i-1})}\cdot X^{j-k}\cdot\frac{\tilde{\sigma}_{k'}(-x_{j+1},\dots,-x_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1-j}(x_j-x_{i+j})}\cdot X^{n-1-j-k'}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_{n,j}=\sum_{k=0}^{j}\sum_{k'=0}^{n-1-j}\left(\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_0,\dots,-x_{j-1})}{\prod_{i=1}^{j}(x_j-x_{i-1})}\cdot\frac{\tilde{\sigma}_{k'}(-x_{j+1},\dots,-x_{n-1})}{\prod_{i=1}^{n-1-j}(x_j-x_{i+j})}\cdot X^{n-1-k'-k}\right)$$

Par changements d'indices $i\to i-1$ et $i\to i+j$ dans les produits au dénominateur, on peut synthétiser l'écriture de ces produits par :

$$P_{n,j} = \sum_{k=0}^{j} \sum_{k'=0}^{n-1-j} \left(\frac{\tilde{\sigma}_k(-x_0, \dots, -x_{j-1}) \cdot \tilde{\sigma}_{k'}(-x_{j+1}, \dots, -x_{n-1})}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x_j - x_i)} \cdot X^{n-1-k'-k} \right)$$

Par linéarité de l'opérateur Σ :

$$P_{n,j} = \frac{\sum_{k=0}^{j} \sum_{k'=0}^{n-1-j} \left(\tilde{\sigma}_k(-x_0, \dots, -x_{j-1}) \cdot \tilde{\sigma}_{k'}(-x_{j+1}, \dots, -x_{n-1}) \cdot X^{n-1-k'-k}\right)}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x_j - x_i)}$$

Écrivons $P_{n,j}$ sous la forme :

$$P_{n,j} = \frac{\sum_{k''=0}^{n-1} g(n, j, k'') \cdot X^{k''}}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x_j - x_i)}$$

En identifiant les couples (k, k') que l'on somme pour récupérer les coefficients de $X^{k''}$:

k''	$\{(k, k')\}$
$n - 1$	(0,0)
$n - 2$	(1,0), (0,1)
$n - 3$	(2,0), (1,1), (0,2)
$\vdots$	$\vdots$

Il s'agit des couples (k, k') tels que $k + k' = n - 1 - k''$, soit $k' = n - 1 - k'' - k$.

Ainsi, en posant :

$$g \colon (n, j, k'') \mapsto \sum_{l=0}^{n-1-k''} \tilde{\sigma}_l(-x_0, \dots, -x_{j-1}) \cdot \tilde{\sigma}_{n-1-k''-l}(-x_{j+1}, \dots, -x_{n-1})$$

On obtient :

$$P_{n,j} = \sum_{k''=0}^{n-1} \left(\frac{g(n, j, k'')}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x_j - x_i)} \right) \cdot X^{k''} \Leftrightarrow P_{n,j} = \sum_{k=0}^{n-1} f(n, j, k) \cdot X^k$$

Avec :

$$f \colon (n, j, k) \mapsto \frac{\sum_{l=0}^{n-1-k} \tilde{\sigma}_l(-x_0, \dots, -x_{j-1}) \cdot \tilde{\sigma}_{n-1-k-l}(-x_{j+1}, \dots, -x_{n-1})}{\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1}(x_j - x_i)}$$

✍ <u>Conclusion</u>

$$L(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j P_{n,j}$$

$$\Leftrightarrow L(X) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(n,j,k) \cdot X^k \right)$$

$$\Leftrightarrow L(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot f(n,j,k) \right) \cdot X^k$$

Ainsi :

$$\boxed{L(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_L(n,k) \cdot X^k}$$

Avec :

$$c_L \colon (n,k) \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot f(n,j,k)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_L \colon (n,k) \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{y_j}{\prod_{i=0, i \neq j}^{n-1} (x_j - x_i)} \sum_{l=0}^{n-1-k} \tilde{\sigma}_l(-x_0, \dots, -x_{j-1}) \cdot \tilde{\sigma}_{n-1-k-l}(-x_{j+1}, \dots, -x_{n-1}) \right)}$$