

# Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

[www.karelappeltans.be](http://www.karelappeltans.be)

September 15, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>De rechte, veeltermfunctie van graad 1</b>	<b>2</b>
1.1	vergelijking opstellen . . . . .	2
1.2	bespreking rechte als functie . . . . .	2
<b>2</b>	<b>De parabool, veeltermfunctie van graad 2</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>De functie <math>f(x) = x^3</math>, veeltermfunctie van graad 3</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Willekeurige veeltermfunctie</b>	<b>4</b>
4.1	voorbeelden . . . . .	4
4.2	domein en gedrag bij de grenzen van het domein . . . . .	4
4.3	symmetrie . . . . .	5
4.4	nulwaarden, nulpunten, wortels, snijpunten met de x-as . . . . .	5
4.4.1	stappenplan . . . . .	5
4.4.2	abc-formule . . . . .	6
4.4.3	werken met som en product . . . . .	6
4.4.4	merkwaardige producten . . . . .	7
4.4.5	Horner . . . . .	7
4.4.6	Voorbeelden: . . . . .	8
4.5	tekentabel . . . . .	8
4.5.1	ongelijkheden . . . . .	8
4.6	productvorm . . . . .	9
4.6.1	Hoofdstelling van de algebra . . . . .	9
4.6.2	Ontbinding van een drieterm . . . . .	9
4.6.3	ontbinding willekeurige veelterm . . . . .	9
4.6.4	van somvorm naar productvorm: ontbinding in factoren . . . . .	10
<b>5</b>	<b>twee veeltermfuncties</b>	<b>10</b>
5.1	snijpunten zoeken . . . . .	10
5.2	Euclidische deling . . . . .	10
5.3	methode onbepaalde coëfficiënten . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Functievoorschriften opstellen</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Toepassingen</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Transformaties</b>	<b>13</b>
<b>9</b>	<b>Absolute waarde</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>14</b>
<b>11</b>	<b>taak</b>	<b>19</b>

# 1 De rechte, veeltermfunctie van graad 1

## 1.1 vergelijking opstellen

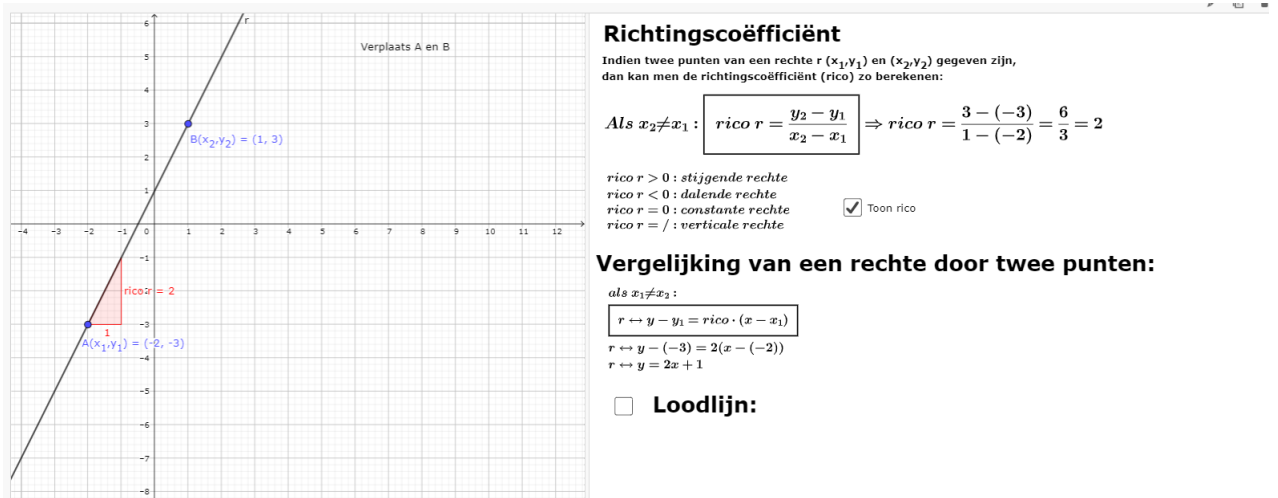


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP>

## 1.2 bespreking rechte als functie

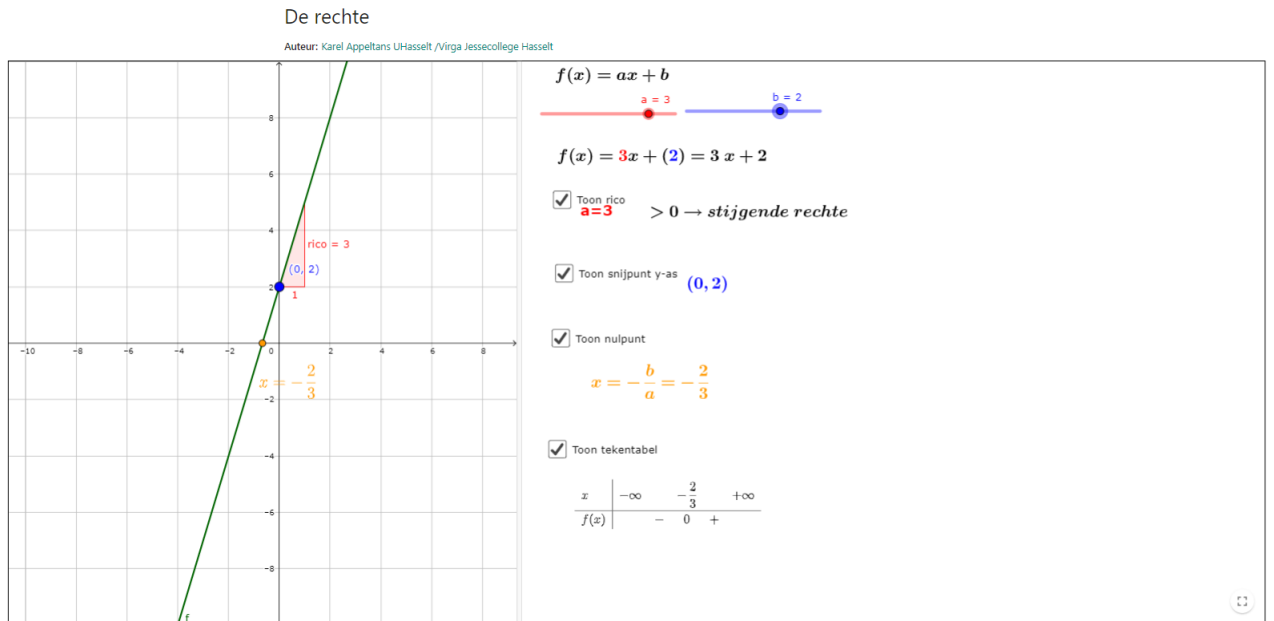


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2>

## 2 De parabool, veeltermfunctie van graad 2

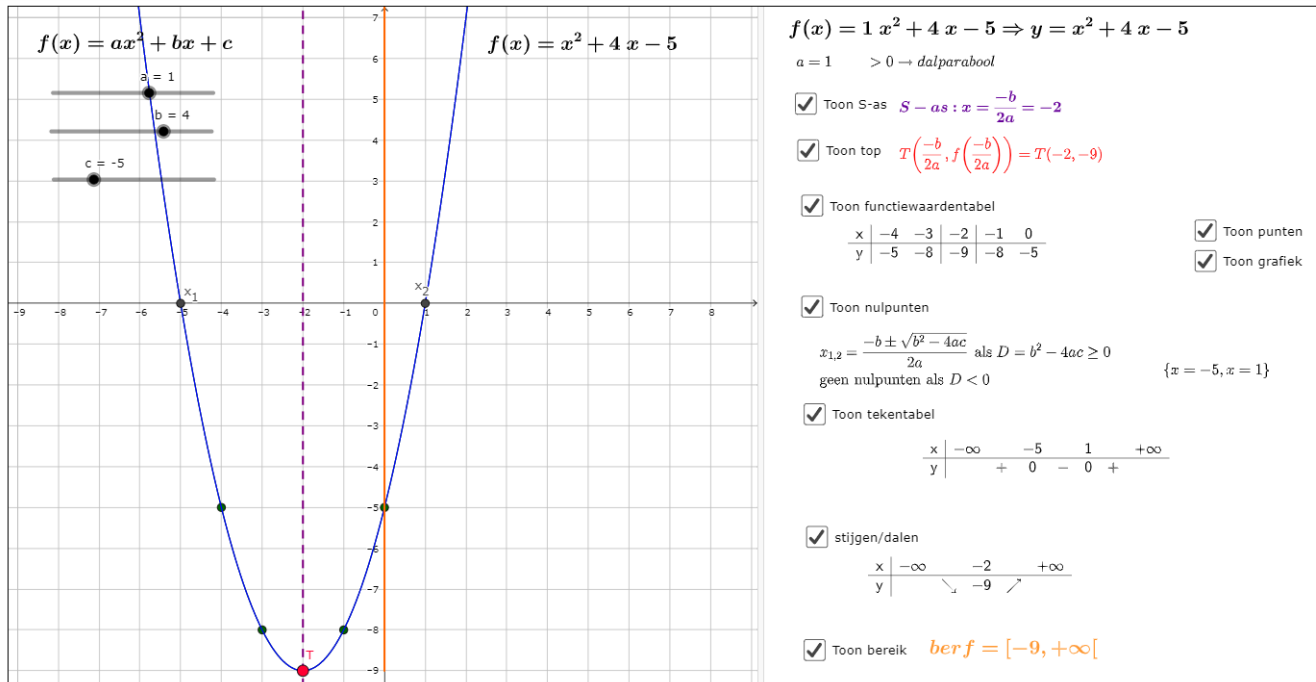


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

## 3 De functie $f(x) = x^3$ , veeltermfunctie van graad 3

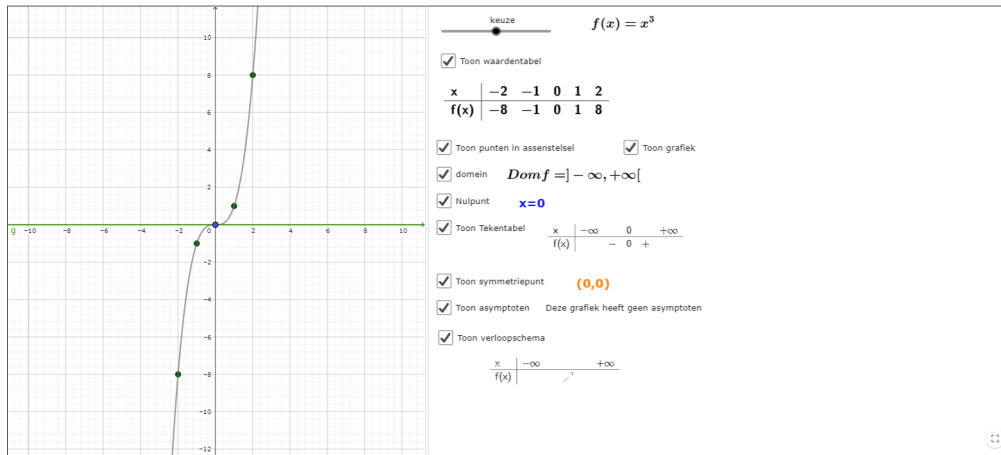


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk>

## 4 Willekeurige veeltermfunctie

### 4.1 voorbeelden

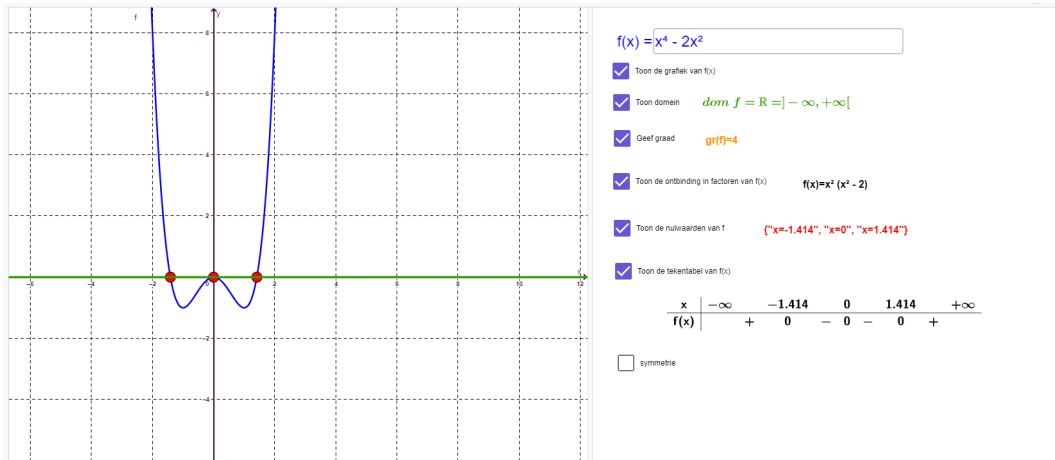


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

### 4.2 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd  $dom f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{hoogste graadsterm}$$

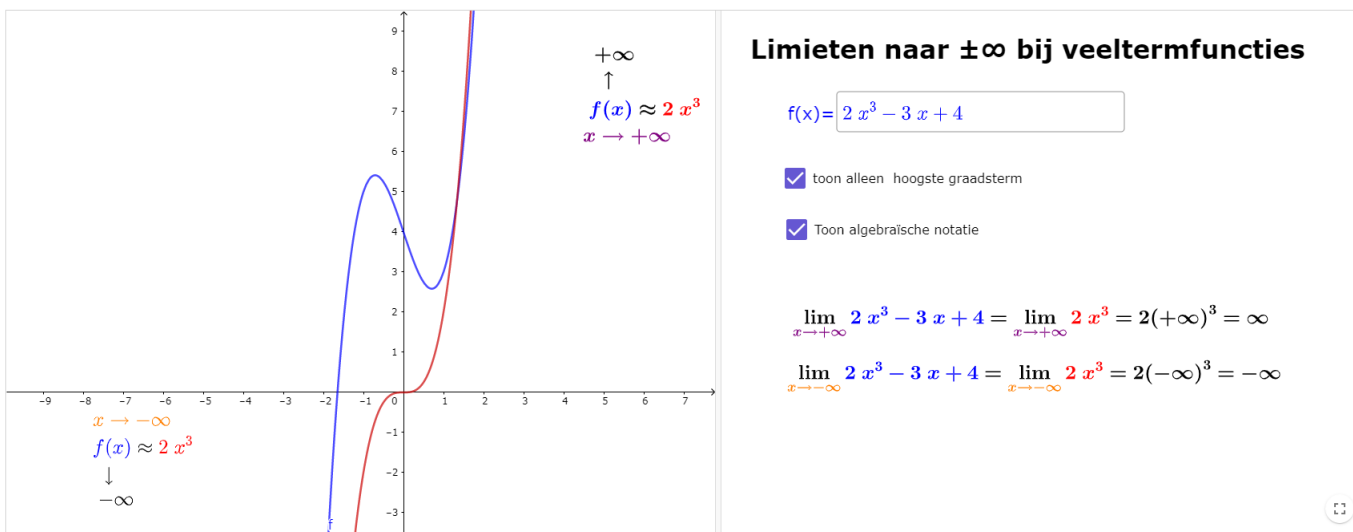


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

## 4.3 symmetrie

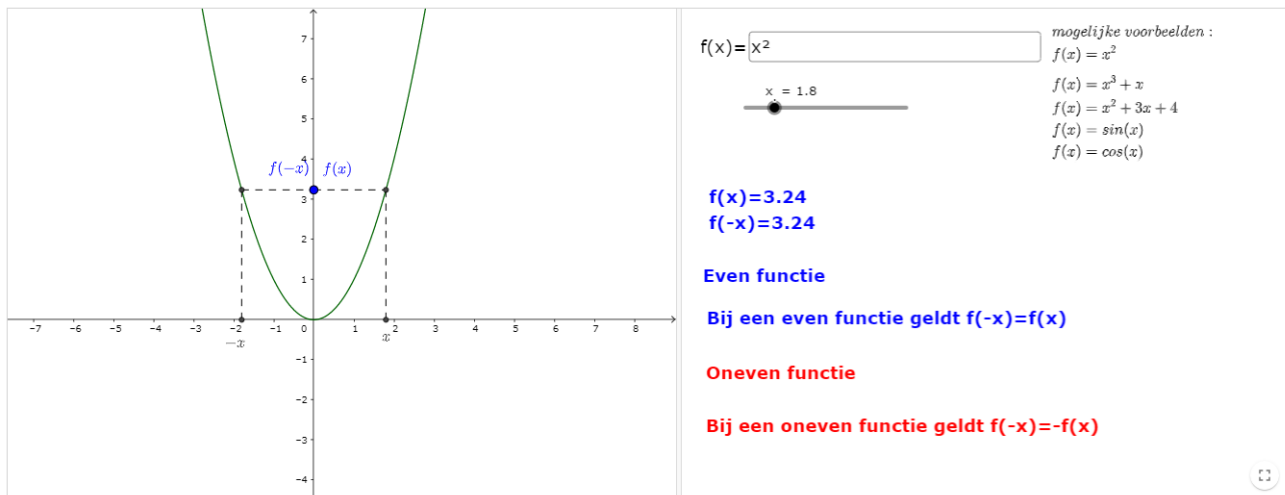


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

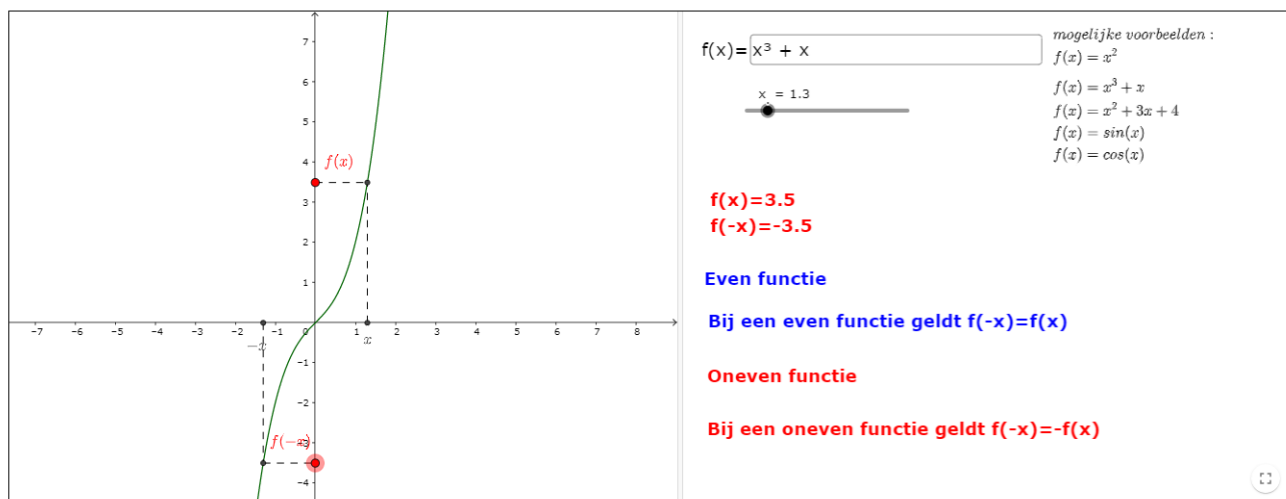


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

## 4.4 nulwaarden, nulpunten, wortels, snijpunten met de x-as

### 4.4.1 stappenplan

#### Stappenplan

stap 1: herschrijf de vergelijking naar  $\dots = 0$

stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen

stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen

stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men

stap 4a: een merkwaardig product gebruiken:

stap 4b: de abc-formule gebruiken

stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men

stap 5a: een merkwaardig product gebruiken

stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.4.2 abc-formule

stap 4b: de abc-formule

Nieuwe vergelijking

Toon exacte oplossing (als  $D > 0$ , of  $D = 0$ )

$3x^2 - 15x - 15 = 0$

Gebruik de abc-formule om de oplossingen van deze vierkantsvergelijkingen te bekomen. Vereenvoudig zo ver mogelijk

$D = b^2 - 4ac$

Als  $D \geq 0$  dan  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als  $D < 0$  geen reële oplossingen

Je kan hiernaast jouw oplossingen achteraf controleren!

$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.4.3 werken met som en product

Nulpunten/oplossingen/wortels kwadratische vergelijking m.b.v. som en product van wortels

Vb : los op :  $x^2 + 5x + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

dit geeft hier:  $s = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$

$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$

Zoek twee getallen waarvan het product 4 is en de som -5 is

dit geeft :

$x_1 = -1$  en  $x_2 = -4$

want  $(-1) \cdot (-4) = 4$  en  $(-1) + (-4) = -5$

Los op:  $x^2 + 7x + 10 =$  Nieuwe opgave

tip 1     tip 2

$p = \frac{c}{a} = 10, \quad (-2) \cdot (-5) = 10 \text{ en } (-2) + (-5) = -7.$

$s = -\frac{b}{a} = -7.$

antwoord

$x_1 = -5 \quad \vee \quad x_2 = -2$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

uitbreiding

**Som en product van de wortels bij een polynoom van graad n**

$\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
$s = \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$	$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$s = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
$p = \prod_{k=1}^n x_k = x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$	$p = x_1 \cdot x_2 = (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$	$p = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^3 \frac{d}{a} = -\frac{d}{a}$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.4.4 merkwaardige producten

Stap 4a&5a: een merkwaardig product gebruiken

**Ontbinding in factoren:**

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

**Nieuwe opgave**      $25x^2 - 16$

**Toon oplossing**      $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.4.5 Horner

Stap 3

### Regel van Horner

als strategie bij ontbinding in factoren met factor  $x-a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$

**Voorbeeld:**  
 bepaal de ontbinding in factoren van  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$   
**Bekijk de delers van de constante term: -4**  
**delers -4 = {+1, -1, +2, -2, +4, -4}**  
 Zoek een deler die 0 als beeld heeft,  
 $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -2 \neq 0$   
 $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$   
 $P(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x - 4$       $d(x) = x - (1)$

1	3	0	-4
	+	+	+
1	(1) · 1 = 1	(1) · (-4) = 4	(1) · 4 = 4
1	4	4	0

$Q(x) = 1x^2 + 4x + 4$   
 $r(x) = 0$   
 $P(x) = d(x) \cdot q(x) + r$   
 $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

Q(x) kan eventueel via opnieuw Horner of via andere strategieën verder ontbonden worden

**Willekeurig:**  
 Vul in:  $P(x) = x^2 + 1$

**Delers van 1 zijn {1, -1}**  
**Zoek een deler die 0 als beeld heeft:**  
 $P(-1) = 0$      **-1 is een juiste kandidaat!**

-1	1	0	0	1
	-1	1	-1	
1	-1	1	0	

$Quotiënt Q(x) = x^2 - x + 1$   
 $rest r = 0$   
 $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.4.6 Voorbeelden:

$x^2 + 5x + 7 = x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ (stap 1)}$ $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \text{ (stap 4a)}$ $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \text{ (2}\times\text{)}$ $4x^3 - 108 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \text{ via horner}$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } (x + 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = -2$ $(2 - x)(1 + x)^2 x = 0$ $\Leftrightarrow 2 - x = 0 \text{ of } 1 + x = 0 \text{ (2}\times\text{) of } x = 0$ $\Leftrightarrow x = 2 \text{ of } x = -1 \text{ (2}\times\text{) } x = 0$	$12x^5 - 26x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2(6x^3 - 13x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ of } 6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{2} = 0!$ $x = \pm\sqrt{0} = 0 \text{ (2}\times\text{)}$ $\text{of } (x - 2)(6x^2 - x - 1) = 0 \text{ (via Horner)}$ $x - 2 = 0 \text{ of } 6x^2 - x - 1 = 0$ $x = 2$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$
---	--	---

Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

#### 4.5 tekentabel

**Algemene regel:**

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$+\infty$
f(x)	0	0	...	0	teken a	

← afwisselend teken behalve als np even keer voorkomt

teken a: teken van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm

**Voorbeelden:**

keuze = 1

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \{x = -2, \text{"2"} \times, x = 1\}$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f(x)	-	0	-	+

**a = 1 > 0**  toon

Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz>

#### 4.5.1 ongelijkheden

Werkwijze

stap1: Herschrijf de ongelijkheid zodat in het rechterlid altijd 0 staat

stap2: Beschouw het linkerlid als een functie waarvan men de tekentabel of grafiek maakt

stap3: Geef uw antwoord in functie van x

Linkerzijde:

Rechterzijde:

< ≤ > ≥

●

$-x^2 + 3x - 4 > -2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 > 0$   Toon

Toon Oplossing

{1 < x < 2}

Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdKN>



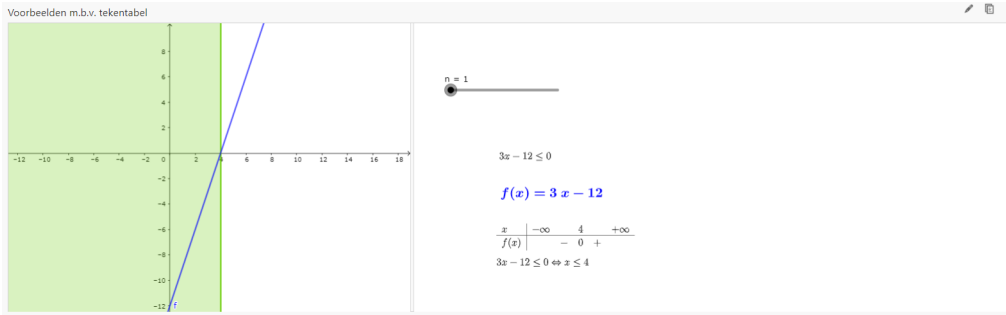


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdKk>

## 4.6 productvorm

### 4.6.1 Hoofdstelling van de algebra

Elke veelterm(functie) kan ontbonden worden in factoren van de 1ste graad en/of factoren van de tweede graad met een negatieve discriminant.

### 4.6.2 Ontbinding van een drieterm

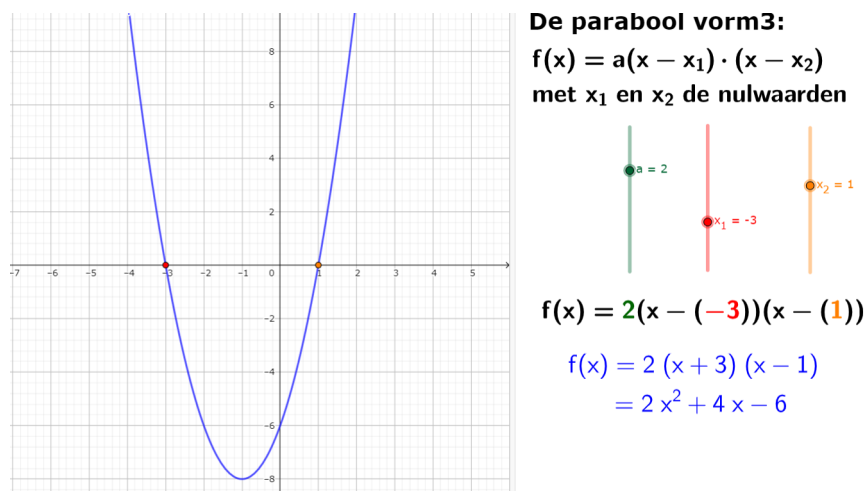


Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

### 4.6.3 ontbinding willekeurige veelterm

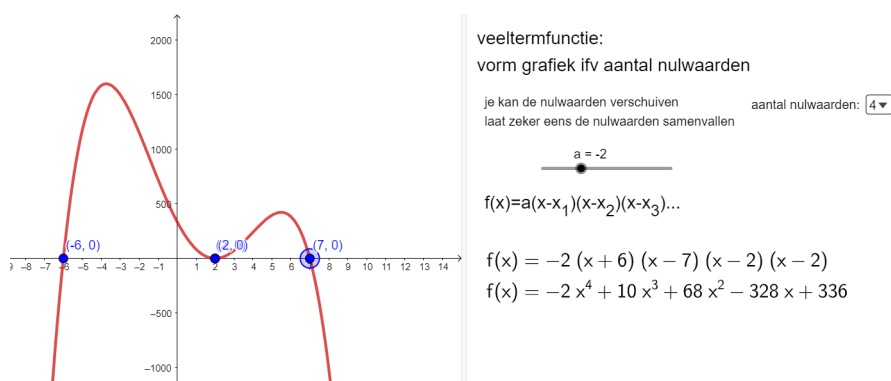


Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

#### 4.6.4 van somvorm naar productvorm: ontbinding in factoren

### Werkwijze

Bij ontbinding in factoren wil men een veelterm schrijven als product van meerdere factoren

stap 1: gemeenschappelijke factoren afzonderen

stap 2: bij tweede graad

stap 2a:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

stap 2b: merkwaardig product

stap 3: bij graad 3 en hoger: Horner

Probeer altijd elke term zover mogelijk te ontbinden!

Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

Meestal is het gemakkelijker om te werken met de veelterm in productvorm!

## 5 twee veeltermfuncties

### 5.1 snijpunten zoeken

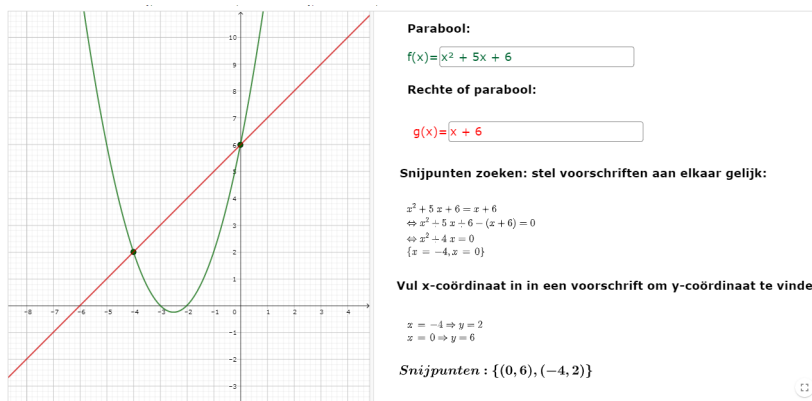


Figure 22: <https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSq>

### 5.2 Euclidische deling

Deling van 2 veeltermen

$  \begin{array}{r}  3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 \quad \left  \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 4x + 10 \end{array} \right. \\  \underline{-(3x^4 - 9x^3 + 3x^2)} \\  4x^3 - 2x^2 - 7x \\  \underline{-(4x^3 - 12x^2 + 4x)} \\  10x^2 - 11x + 3 \\  \underline{-(10x^2 - 30x + 10)} \\  19x - 7  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  x^3 + 3x^2 - 4 \quad \left  \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline x^2 + 4x + 4 \end{array} \right. \\  \underline{-(x^3 - x^2)} \\  4x^2 \\  \underline{-(4x^2 - 4x)} \\  4x - 4 \\  \underline{-(4x - 4)} \\  0  \end{array}  $
$q(x) = 3x^2 + 4x + 10$ $r(x) = 19x - 7$ $3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 = (x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 4x + 10) + (19x - 7)$	$q(x) = x^2 + 4x + 4$ $r(x) = 0$ $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$
$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ met $gr(r(x)) < gr(d(x))$	

⏪ ⏩ 26 / 26
2 s
🔍

Figure 23: <https://www.geogebra.org/m/ZPAsVtSe>

### Reststelling

$$\begin{array}{r}
 -3x^3 + 3x^2 + 5x - 6 \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline -3x^2 + 6x - 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-(-3x^3 - 3x^2)} \\
 6x^2 + 5x \\
 \underline{-(6x^2 + 6x)} \\
 -x - 6 \\
 \underline{-(-x - 1)} \\
 -5
 \end{array}$$

$$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \\
 -3x^3 + 3x^2 + 5x - 6 = (x + 1)(-3x^2 + 6x - 1) - 5$$

$$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 5x - 6$$

$$f(-1) = -3(-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) - 6 \\
 +3 + 3 - 5 - 6 = -5$$

Reststelling:

Bij deling van een veelterm  $f(x)$  door een veelterm van de vorm  $(x - a)$  is de getalwaarde  $f(a)$  gelijk aan de rest van de deling.

Bewijs:

$$f(x) = (x - a)q(x) + r$$

$$f(a) = (a - a)q(a) + r$$

$$f(a) = r$$

Figure 24: <https://www.geogebra.org/m/ZPAsVtSe>

## 5.3 methode onbepaalde coëfficiënten

### Methode onbepaalde coëfficiënten

Bepaal de waarden van de letters a en b zodat

$$A(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 + x - 6 \text{ deelbaar is door } B(x) = x^2 + x + 3$$

### Euclidische deling

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + x - 6 = (x^2 + x + 3)(1x^2 + cx - 2) + 0$$

$$\begin{array}{r} x^4 + cx^3 - 2x^2 \\ x^3 + cx^2 - 2x \\ \hline 3x^2 + 3cx - 6 \end{array}$$

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + x - 6 = x^4 + (c+1)x^3 + (c+1)x^2 + (3c-2)x - 6$$

$$\begin{array}{l} x^4 : 1 = 1 \\ x^3 : -a = c+1 \quad \Rightarrow a = -2 \\ x^2 : b = c+1 \quad \Rightarrow b = 2 \\ x : 1 = 3c-2 \quad \Rightarrow c = 1 \\ \backslash : -6 = -6 \end{array}$$

Figure 25: <https://www.geogebra.org/m/evrpmusa>

## 6 Functievoorschriften opstellen

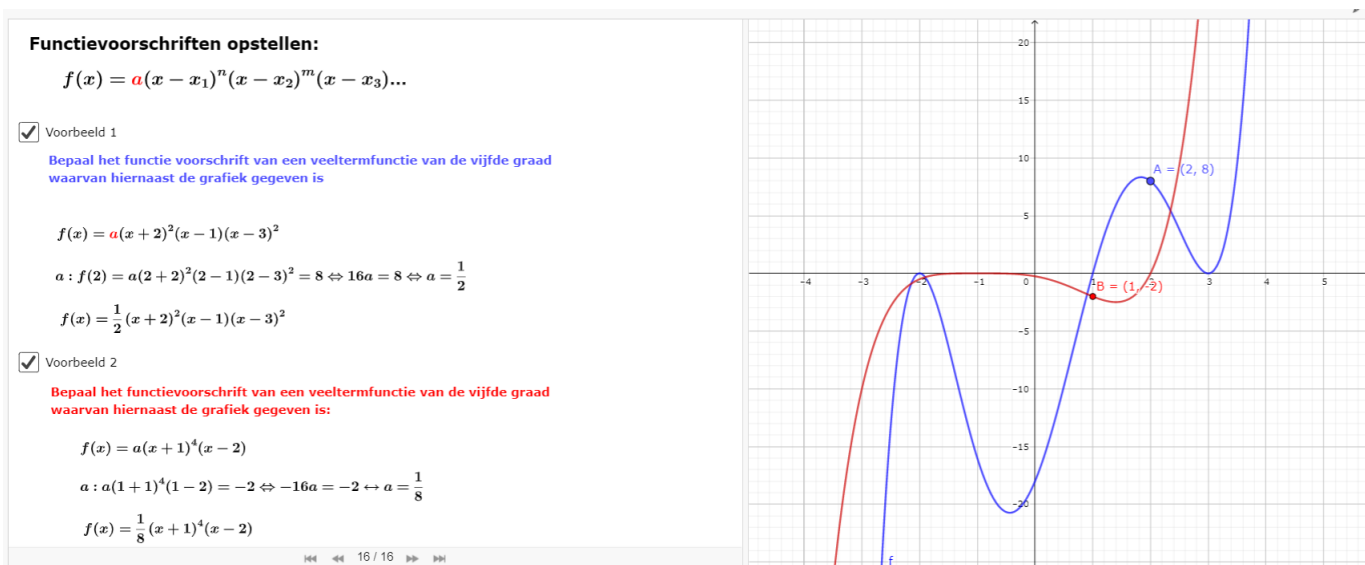


Figure 26: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

# 7 Toepassingen

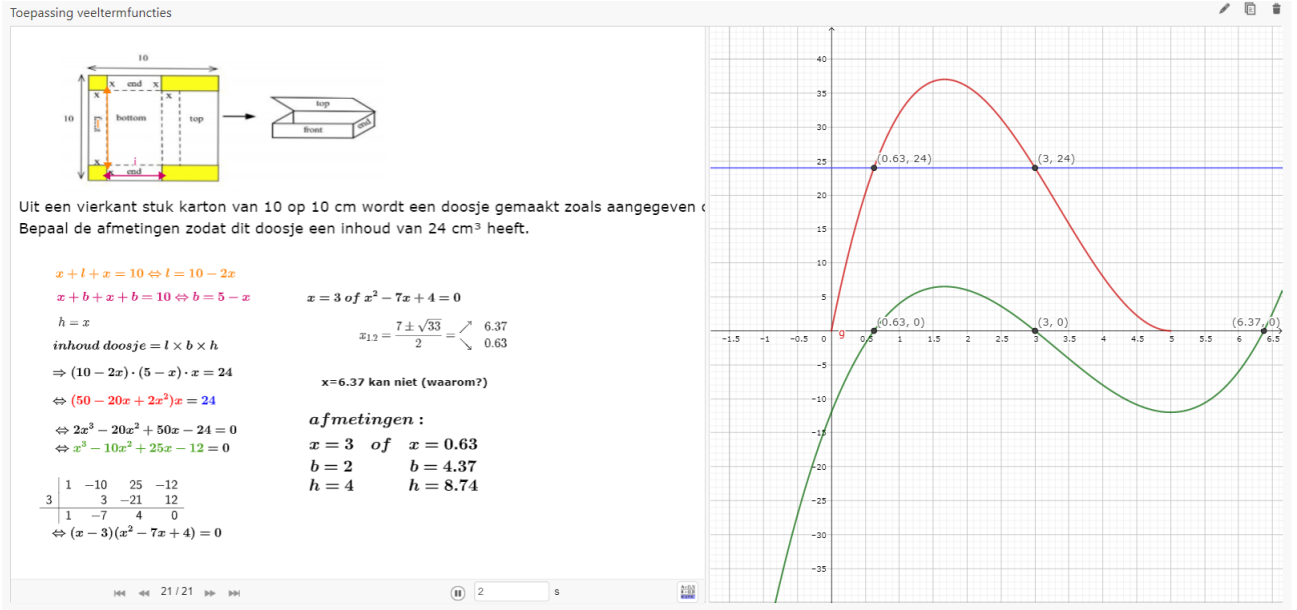


Figure 27: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

# 8 Transformaties

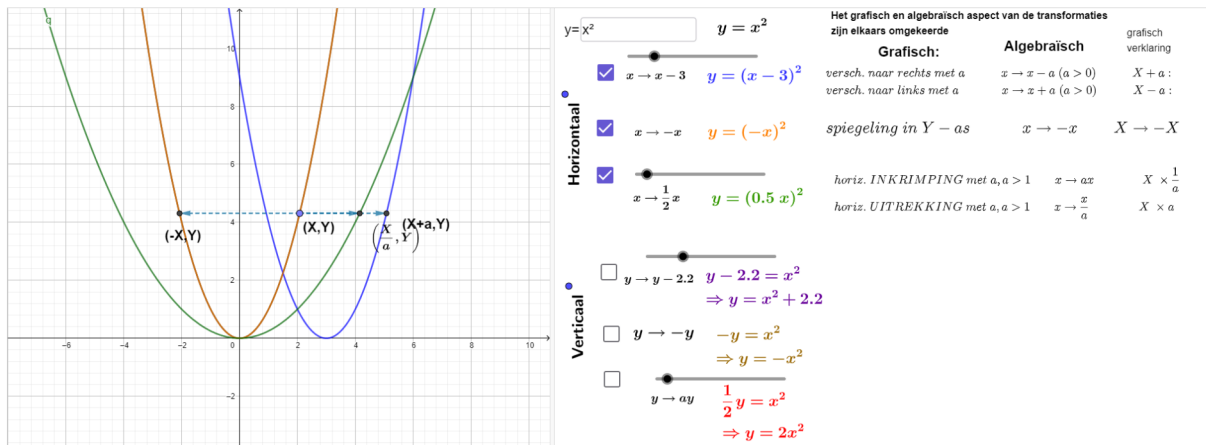


Figure 28: <https://www.geogebra.org/m/mq5zh8t>

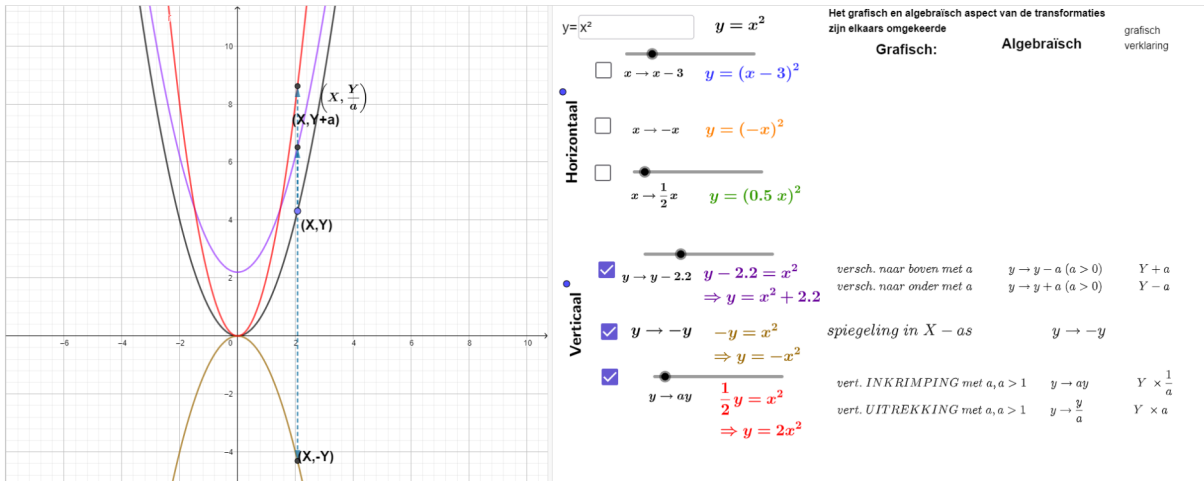


Figure 29: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

## 9 Absolute waarde

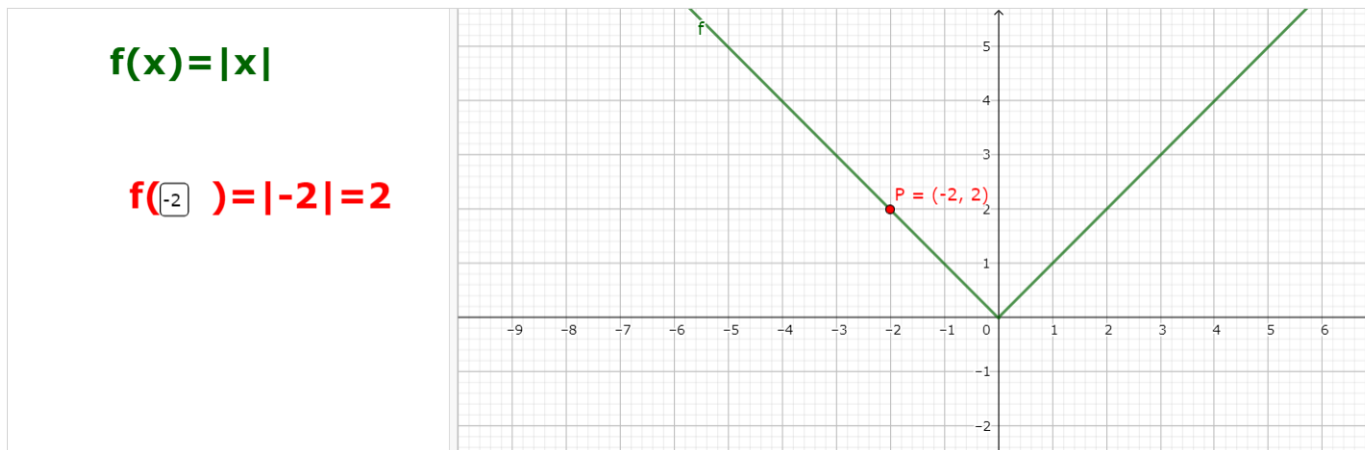
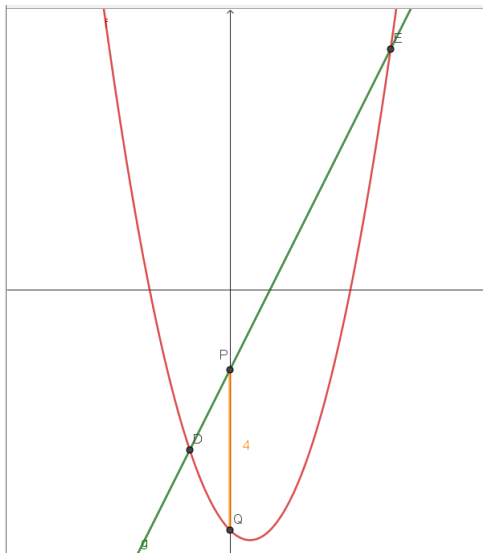


Figure 30: <https://www.geogebra.org/m/bg86qmsa>

## 10 Oefeningen

- Bepaal de vergelijking van de rechte die
  - door het punt  $(-4,3)$  gaat en parallel ligt aan de lijn  $x + 4y = 6$ .
  - door het punt  $(3,3)$  gaat en loodrecht staat op de lijn  $x - 3y = 10$ .
- de functie  $y = f(x) = -x^2 + px - 5$  heeft een maximum voor  $x = 1$ . Bereken  $p$  en de maximale functiewaarde
- De functie  $y = f(x) = px^2 + 4x + p$  heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken  $p$ .
- De parabool  $y = x^2 - 8x + 12$  snijdt de x-as in  $A(a,0)$  en  $B(b,0)$  met  $a < b$ . Hoeveel gehele getallen liggen in het interval  $]a, b[$ ?
- De parabool  $y = 2x^2 - 8x + 6$  snijdt de y-as in  $(0, a)$ , de parabool  $y = x^2 + 4x + 4$  snijdt de x-as in  $(b, 0)$ . Bepaal de waarde van  $a + b$
- Gegeven is de familie parabolen  $x^2 - (1 + m^2)x + \frac{1+m^2+m^4}{2}$ . Toon aan dat  $x_1^2 + x_2^2 = m^2$

7. De functie met voorschrift  $f(x) = 2x^2 + ax + b$  neemt de waarde nul aan voor  $x = \frac{3}{2}$  en  $x = \frac{5}{2}$ . Aan wat is de waarde van  $a$  gelijk? (A.  $a = -8$ )
8. De rechte met als functievoorschrift  $g(x) = 2x - 2$  snijdt de parabool met als voorschrift  $f(x) = ax^2 + bx + c$  in het punt  $D(-1, -4)$ ,  $|PQ| = 4$ .



- (a) Bepaal de waarden van  $a, b$  en  $c$ .
- (b) Bepaal de coördinaten van de top van de parabool.
- (c) Bepaal (het) de interval(len) waar  $f(x) \cdot g(x) \leq 0$
9. ontbinding van een drieterm

stap 2a

**Ontbinding van de drieterm:  $-2x^2 + 3x - 1$**  Nieuwe opgave

toon oplossing  $x_1 = \frac{1}{2}$   $x_2 = 1$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x - (1))$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -(x - 1)(2x - 1)$$

Figure 31: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

10. bespreek het gedrag van volgende veeltermfuncties bij de grenzen van het domein
- (a)  $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - 1$

- (b)  $g(x) = -x^2 + 3x - 2x^6 + 4$   
 (c)  $h(x) = (2x - 3)(-x^2 + 5)(x^7 - 3x^5 + 9x - 1)$

11. Ontbind volgende veeltermen zover mogelijk in factoren

- (a)  $f(x) = 49 - x^2$   
 (b)  $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 8x + 7$   
 (c)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$   
 (d)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$   
 (e)  $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$   
 (f)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$   
 (g)  $f(x) = 2x^2 - 7x + 6 = 0$   
 (h)  $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$   
 (i)  $f(x) = x^4 - 1$   
 (j)  $f(x) = (x - 3)^2 + (x - 1)^2 - 2$   
 (k)  $f(x) = (3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14$   
 (l)  $f(x) = x^3(2x^2 - 4x)^2(x + 2 - x^2)^2$

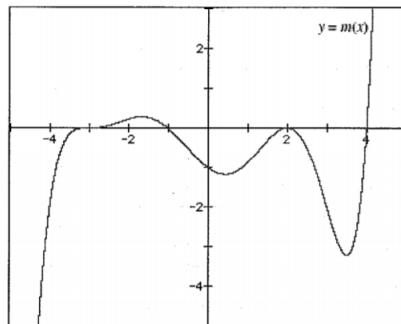
12. Los volgende ongelijkheden op

- (a)  $4x^2 + 2x \leq 20$   
 (b)  $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$   
 (c)  $x^3 - 2x^2 \leq 4x - 8$  (A.  $x \leq -2$  of  $x = 2$ )  
 (d)  $x^3(2x^2 - 4x)^2(x + 2 - x^2)^2 \geq 0$

13. Bepaal de snijpunten van de grafieken van

- (a)  $y = x^2 - 2x$  en  $y = 6 - x$   
 (b)  $y = x^3 - 3x + 2$  en  $y = (x - 1)^2$   
 (c)  $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$  en  $y = (x - 2)(x - 4)^2$   
 (d)  $y = x^2 - 2x$  en  $y = 6 - x$

14. Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie  $m(x)$  van de zevende graad, waarvan de grafiek gegeven is.



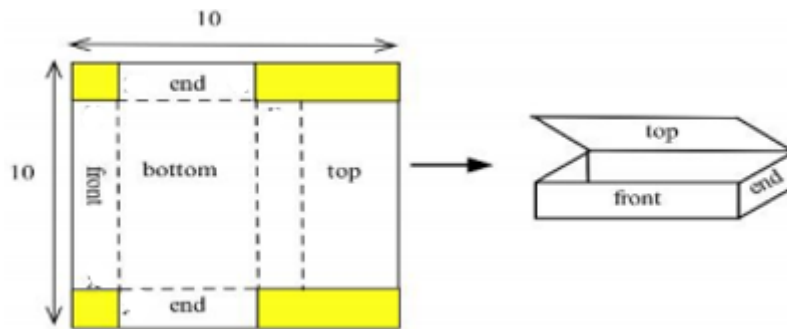
15. gegeven zijn de veeltermen  $p(x) = x^5 - 2x^4$ ,  $q(x) = x^3 - 3x$  en  $r(x) = x - 2$ . Welke van de volgende veeltermen heeft de hoogste graad.

- (a)  $p(q(x) + r(x))$   
 (b)  $q(p(x)r(x))$   
 (c)  $r(p(x)q(x))$   
 (d)  $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$

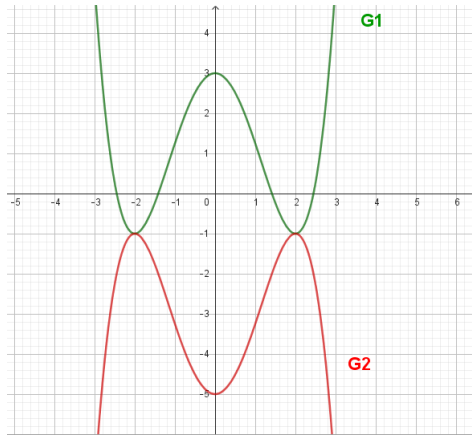


16. Bepaal alle intervallen waar  $f(x) = (x-2)^{2021} \cdot (x-1)^{2022} \cdot (x+1)^{2023} \cdot (x+2)^{2024}$  positief is
17. Gegeven de veeltermfunctie  $f: x \mapsto x^3 + (1-k^2)x + k$  met  $k \in \mathbb{R}$
- Toon aan dat  $-k$  een wortel is.
  - Bepaal de twee andere wortels
  - Bepaal de waarden van  $k$  waarvoor de grafiek van  $f$  slechts één reële wortel heeft
18. Gegeven  $f(x) = x^3 + x^2 - x + k$ . Bepaal de waarde(n) van  $k$  als je weet dat  $x - k$  een deler is (A.  $k = -1, k = 0$ )
19. Toon aan dat de veelterm  $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$  deelbaar is door  $x^2 + x - 6$
20. Bepaal  $p$  en  $q$  zo dat de veelterm  $x^3 + px + q$  deelbaar is door  $x^2 - 3x + 2$
21. Bij de deling van  $A(x) = x^3 + x^2 + ax + b$  door  $x - 2$  en door  $x + 1$  is de rest telkens 1. Bepaal a en b.
22. Gegeven  $f(x) = 6x^3 + Ax^2 - 6x + B$ .
- Bepaal de waarden van A en B als je weet dat de grafiek van  $f$  de x-as raakt bij  $x = 5$  en dat de veelterm bij deling door  $x - 1$ ,  $r = 24$  geeft.
  - Geef de volledige ontbinding in factoren
23. Voor welk reëel getal  $a$  is de veelterm  $p(x) = 4x^4 + ax^3 - \frac{1}{8}$  deelbaar door  $x + \frac{1}{2}$ ?
24. De veeltermfunctie  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  snijdt de x-as in  $A(-2, 0)$ , snijdt de y-as in  $B(0, 1)$  en raakt de x-as in  $C(1, 0)$ . Bepaal de waarde van de parameter  $a$ .
25. Gegeven de veelterm  $p(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 36$  met  $a, b, c$  en  $d \in \mathbb{R}$  en nulwaarden 1, -1, 3 en -3. Bepaal de 5de nulwaarde van deze veelterm.
26. De veelterm  $P(x)$  is gelijk aan  $2x^3 + rx^2 + 8x$  en heeft slechts één nulpunt. Welke waarde(n) kan  $r$  hebben? (A.  $-8 < r < 8$ )
27. De veelterm  $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 2$  heeft drie reële nulpunten  $a, \frac{1}{a}$  en  $b$ . Bepaal de parameter  $k$ . (A.  $k = -7$ )
28. Men beschouwt de functie  $f(x) = 2x^3 - mx + m - 2$ . Bereken  $m$  zodat de grafiek van  $f$  aan de x-as raakt. (A.  $m = \frac{3}{2}$  en  $m = 6$ )
29. Als de veeltermfunctie  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x + a$  gedeeld wordt door  $x^2 - x + 2$  is het quotiënt  $x^2 + bx + 1$  en de rest  $cx + 5$ . Bepaal de waarden van  $a, b$  en  $c$  (A.  $a = 7, b = 3$  en  $c = 4$ )
30. De veeltermfunctie  $f(x) = x^8 - 12x^6 + 49x^4 - 78x^2 + 42$  heeft acht wortels. Hoeveel hiervan zijn positief?
31. Een reële veelterm van de vierde graad  $p(x) = ax^4 + bx^2 + 1$  heeft  $-1$  als nulwaarde met multipliciteit 2. Welke waarden hebben de coëfficiënten  $a, b \in \mathbb{R}$ ? (A.  $a = 1$  en  $b = -2$ )
32. Toon de volgende merkwaardige producten aan:
- $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
  - $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
33. Bepaal quotiënt en rest m.b.v. de Euclidische deling als
- deeltal:  $x^3 + 2x^2 + 4x + 6$  en deler:  $x^2 + 4x + 8$
  - deeltal:  $3x^4 - 2x + 5$  en deler:  $x^2 + 2x + 2$
  - deeltal:  $x^5 - x^3 + x - 5$  en deler:  $x - 2$

34. Een fabrikant van dozen kan uit een stuk karton van 10 op 10 cm volgend doosje maken:



- (a) Bepaal een voorschrift voor de inhoud van deze doos.  
 (b) Bepaal de afmetingen voor die doos met een inhoud van  $8\text{cm}^3$ .
35. Bij mijn Amerikaanse vrienden staat een aquarium met een inhoud van 96 kubieke feet. De breedte is 2 feet minder dan de hoogte, en de lengte is 8 feet meer dan de hoogte. Bepaal de afmetingen van dit aquarium. (A.  $(l,b,h)=(12,2,4)$ )
36. Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van 100 euro per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van 75 euro per cm lengte. Bepaal de afmetingen voor een kadertje met een oppervlakte van  $12\text{ cm}^2$  als je 1500 euro wil spenderen.
37. Een open doos met een vierkant als grondvlak wordt gemaakt uit  $9\text{ m}^2$  materiaal. Bepaal de afmetingen voor een doos met een inhoud van  $2\text{ m}^3$
38. Bij een rechthoekig stuk karton, waarbij de lengte 4 cm langer is dan de breedte, snijdt men in de vier hoeken een vierkantje van 3 op 3 cm weg. Op deze manier kan men een doos bekomen door de bekomen zijkanten omhoog te plooiën. Bepaal de afmetingen van het stuk karton als de doos een inhoud van  $351\text{ cm}^3$  heeft. (A.  $(b,l)=(10,14)$ )
39. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van  $y = x^2$  achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de y-as en tenslotte te spiegelen om de x-as
40. De grafiek van  $y = x^3$  wordt achtereenvolgens 1 eenheid naar beneden verschoven, dan horizontaal uitgetrokken met een factor 3, dan gespiegeld om de x-as en tenslotte 2 eenheden naar rechts verschoven. Geef het nieuwe voorschrift.
41. (a) Geef het voorschrift van de functie g die ontstaat uit de grafiek van  $f(x) = x^2$  door een spiegeling om de x-as, een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector  $\vec{v}(2,6)$ . (A.  $g(x) = -3(x-2)^2 + 6$ )  
 (b) Bepaal het bereik van g (A.  $] -\infty, 6]$ )
42. Bepaal de transformaties die men uitgevoerd heeft op  $y = x^2$  om  $y = 2(-x+3)^2 - 4$  te bekomen.
43. Geef het voorschrift van de functie g die onstaat uit de grafiek van  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  door een spiegeling om de y-as, een horizontale inkrimping met factor 2 en een verschuiving over de vector  $\vec{v}(-1,-4)$
44. Als G1 de grafiek is van  $y = f(x)$ , dan is G2 de grafiek van
- (a)  $y = -f(x)$   
 (b)  $y = f(-x)$   
 (c)  $y = f(x) - 6$   
 (d)  $y = -f(x) - 1$   
 (e)  $y = -f(x) - 2$



45. Oefeningen met absolute waarde

(a) Teken de grafiek van

i.  $f(x) = ||x - 2| - 2|$

ii.  $f(x) = |x - 1| + 3$

(b) Los op:

i.  $|x + 5| - 2|x - 1| \geq 0$

ii.  $|x - 3| = x^2 - 3$

iii.  $|-x^2 + 3x - \frac{1}{2}| \leq \frac{9}{2}$  (A.  $x \in [-1, 4]$ )

iv.  $3(1 - 2x) + 4 \geq \frac{|x+1|}{-2}$

v.  $12 - |2x + 1| \geq 9$  (A  $x \in [-2, 1]$ )

**11 taak**