Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

www.karelappeltans.be

July 1, 2024

Contents

1 De rechte, veeltermfunctie van graad 1 **2**
1.1 vergelijking opstellen . . . 2
1.2 bespreking rechte als functie . . . 2

2 De parabool, veeltermfunctie van graad 2 **3**

3 De functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3 **3**

4 Willekeurige veeltermfunctie **4**
4.1 voorbeelden . . . 4
4.2 domein en gedrag bij de grenzen van het domein . . . 4
4.3 symmetrie . . . 5
4.4 nulwaarden, nulpunten, wortels, snijpunten met de x-as . . . 5
4.4.1 stappenplan . . . 5
4.4.2 abc-formule . . . 6
4.4.3 werken met som en product . . . 6
4.4.4 merkwaardige producten . . . 7
4.4.5 Horner . . . 7
4.4.6 Voorbeelden: . . . 8
4.5 tekentabel . . . 8
4.5.1 ongelijkheden . . . 8
4.6 productvorm . . . 9
4.6.1 Hoofdstelling van de algebra . . . 9
4.6.2 Ontbinding van een drieterm . . . 9
4.6.3 ontbinding willekeurige veelterm . . . 9
4.6.4 van somvorm naar productvorm: ontbinding in factoren . . . 10

5 twee veeltermfuncties **10**
5.1 snijpunten zoeken . . . 10
5.2 Euclidische deling . . . 10
5.3 methode onbepaalde coëfficiënten . . . 12

6 Functievoorschriften opstellen **12**

7 Toepassingen **13**

8 Transformaties **13**

9 Absolute waarde **14**

10 Oefeningen **14**

11 taak **19**

1 De rechte, veeltermfunctie van graad 1

1.1 vergelijking opstellen

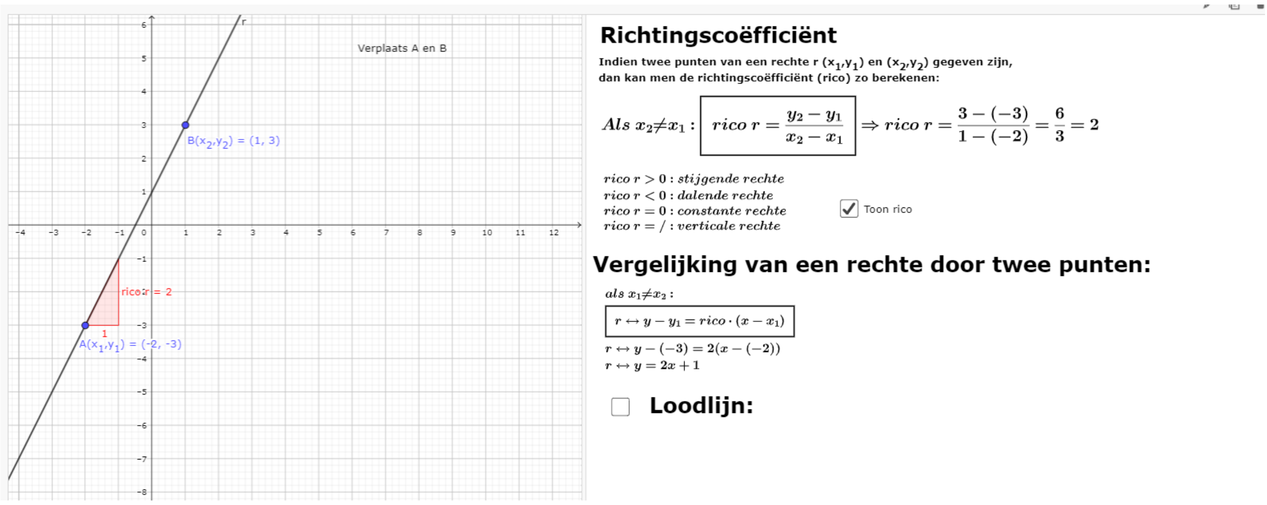


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP

1.2 bespreking rechte als functie

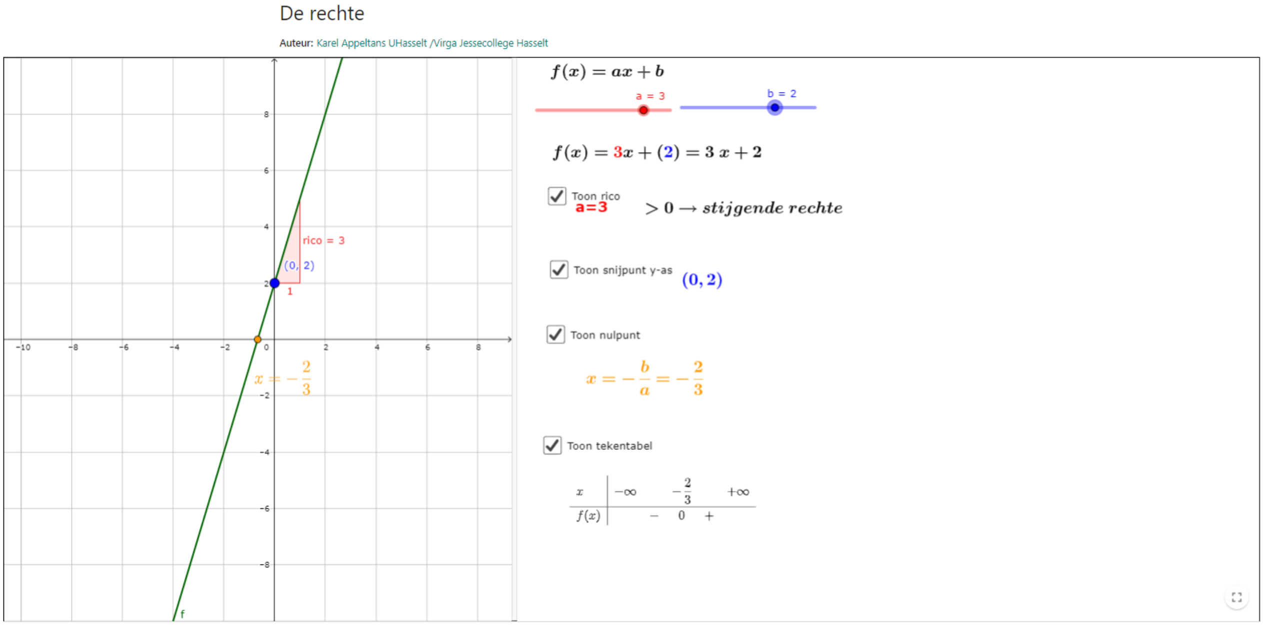


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2

2 De parabool, veeltermfunctie van graad 2

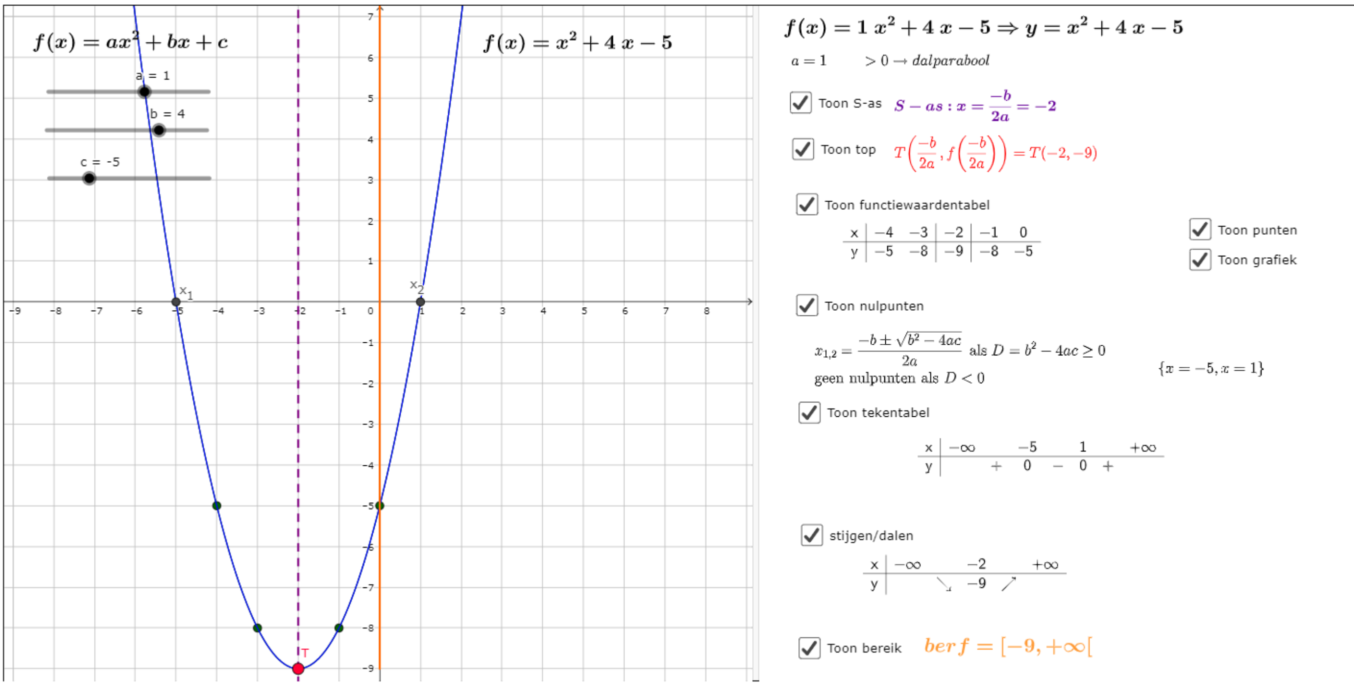


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp

3 De functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3

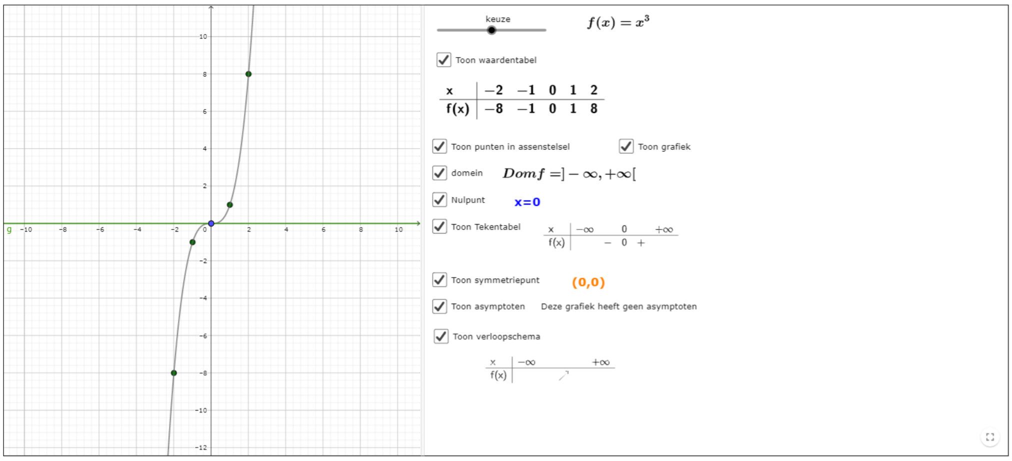


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk

4 Willekeurige veeltermfunctie

4.1 voorbeelden

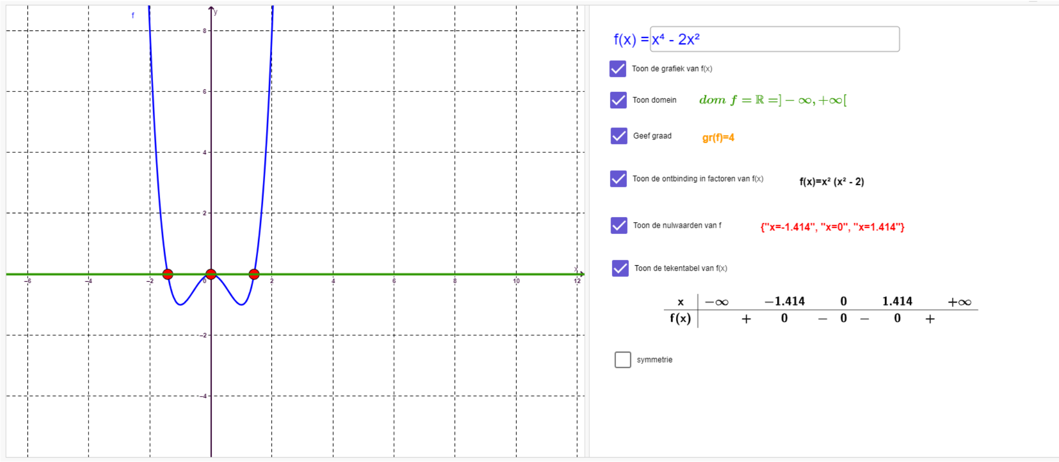


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

4.2 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd $dom f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} hoogste\ graadsterm$

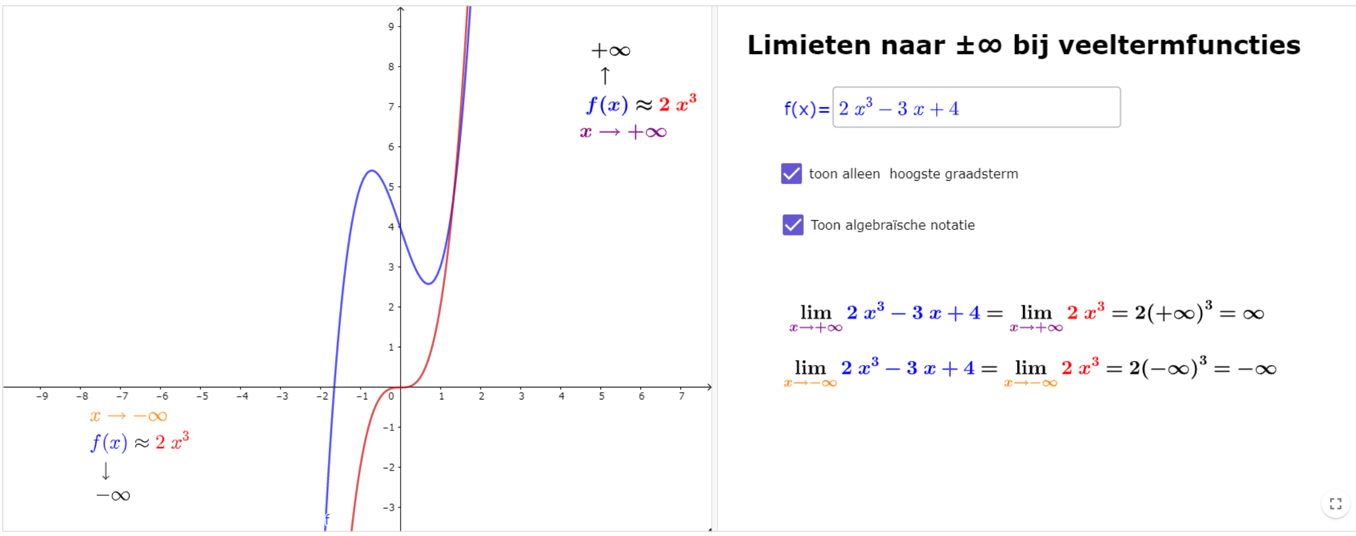


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

4.3 symmetrie

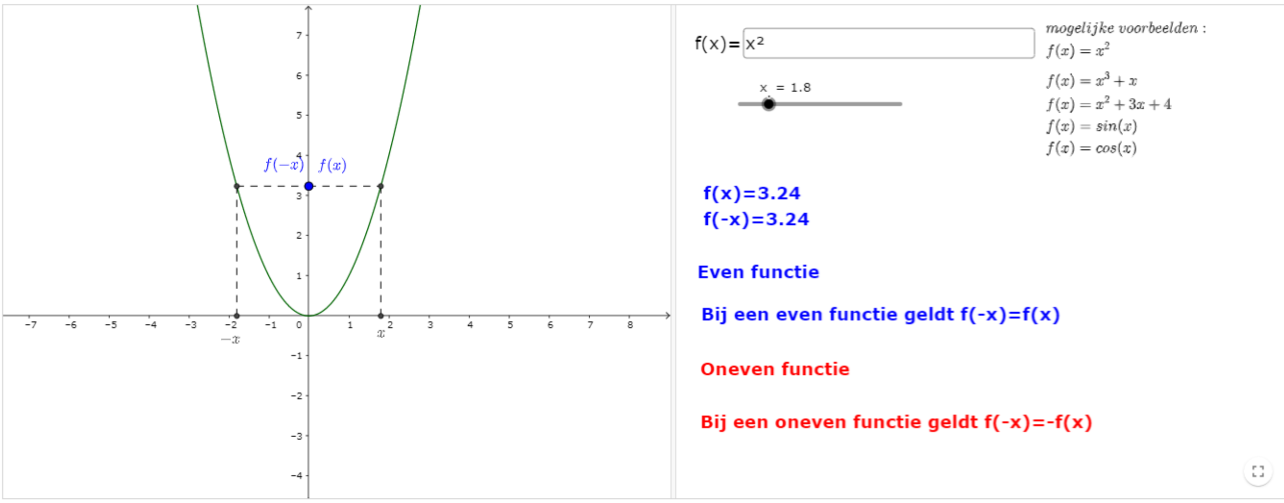


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv

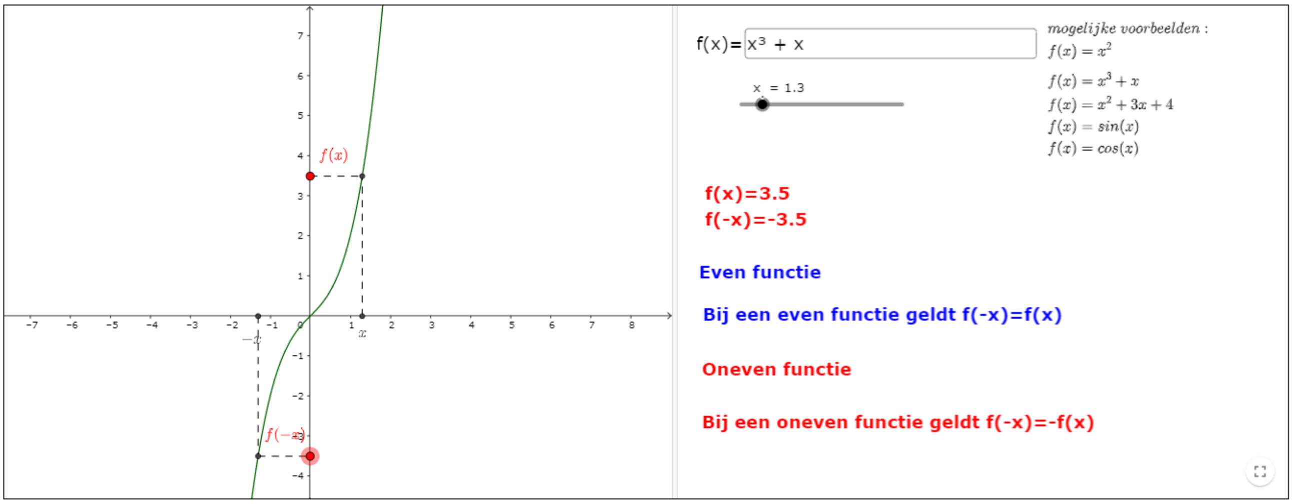


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv

4.4 nulwaarden, nulpunten, wortels, snijpunten met de x-as

4.4.1 stappenplan

Stappenplan

stap 1: herschrijf de vergelijking naar ...=0
stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen
stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen
stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men
stap 4a: een merkwaardig product gebruiken:
stap 4b: de abc-formule gebruiken
stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men
stap 5a: een merkwaardig product gebruiken
stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.4.2 abc-formule

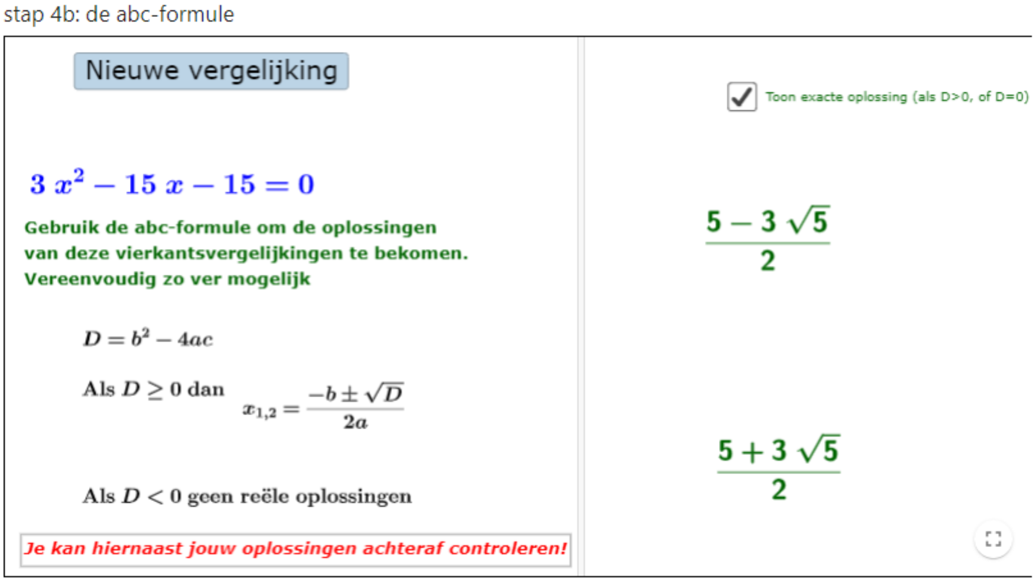


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.4.3 werken met som en product

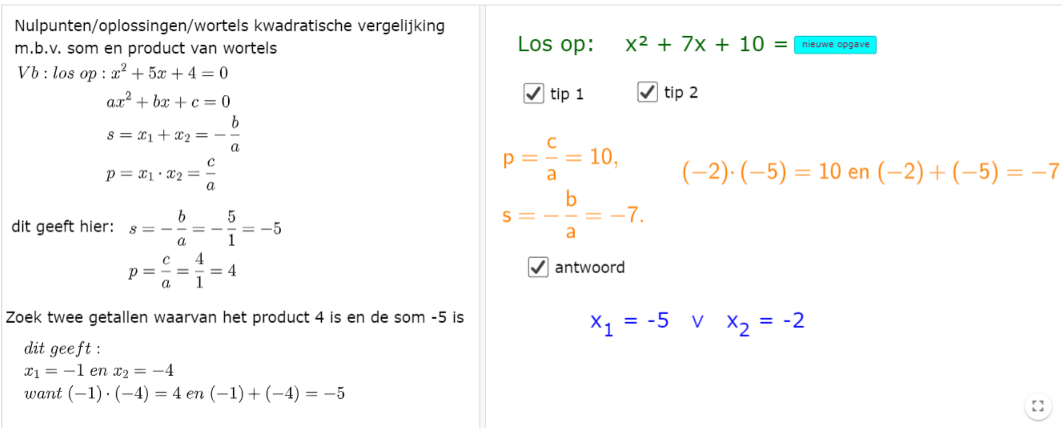


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.4.4 merkwaardige producten

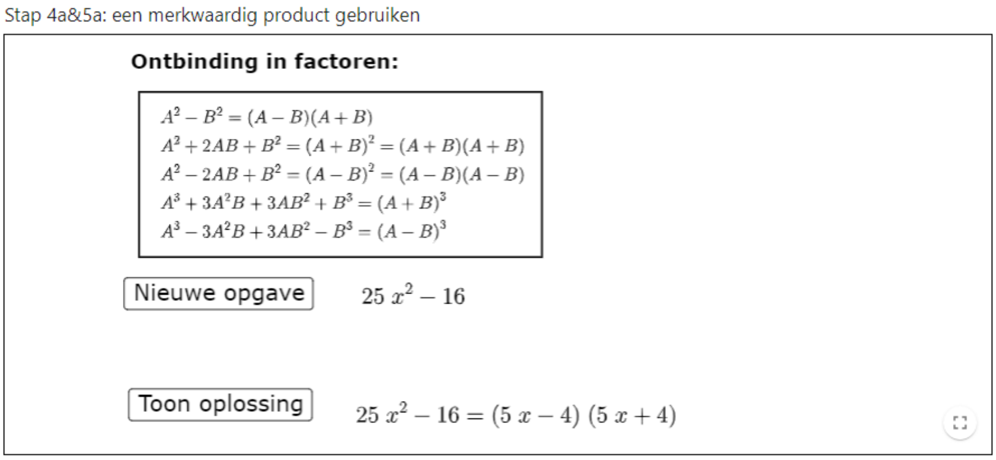


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.4.5 Horner

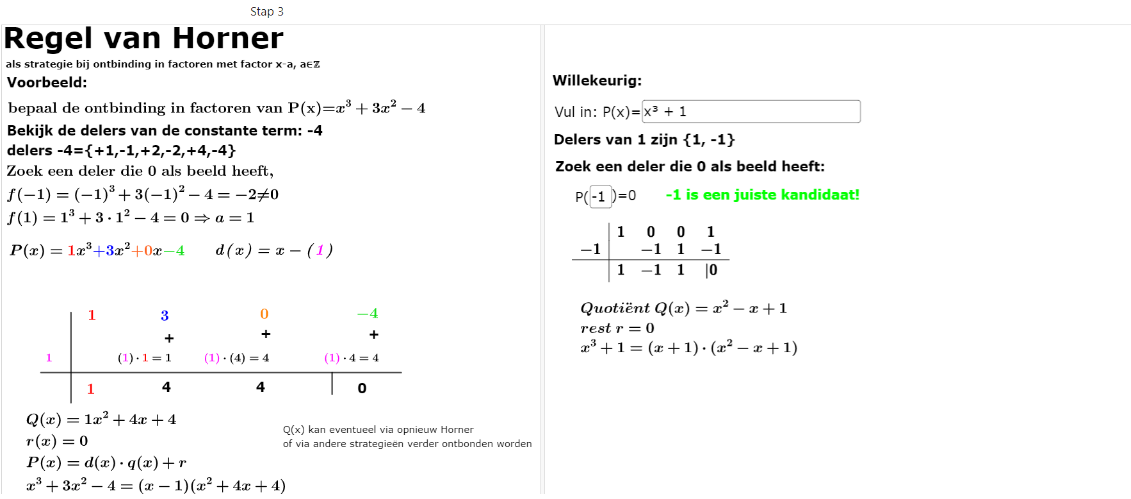


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.4.6 Voorbeelden:

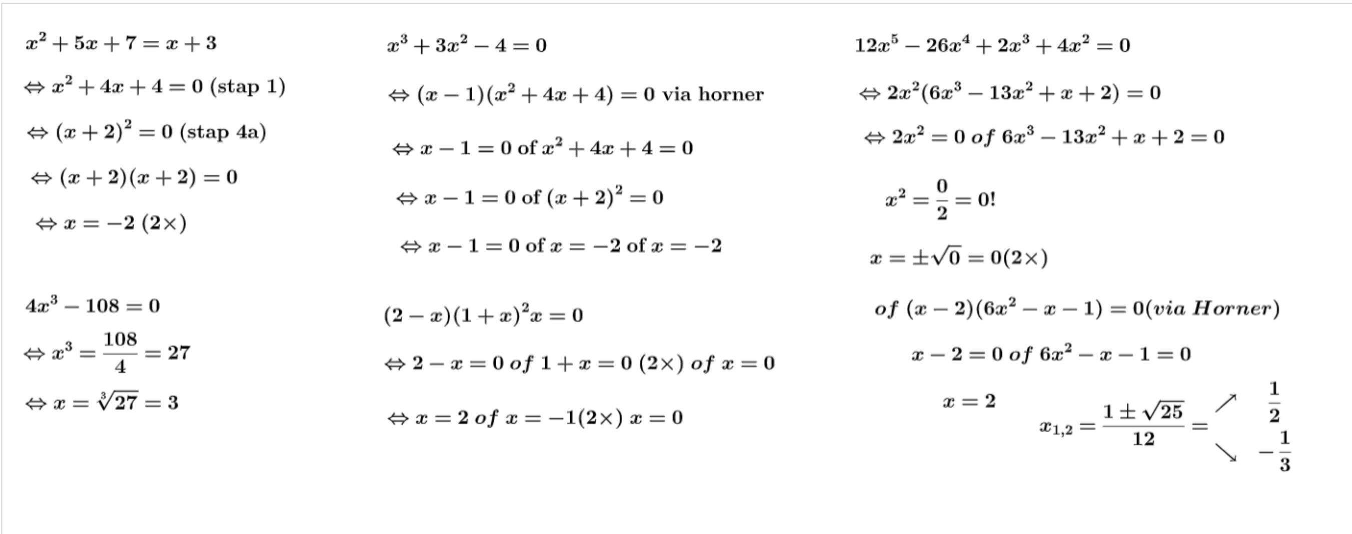


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf

4.5 tekentabel

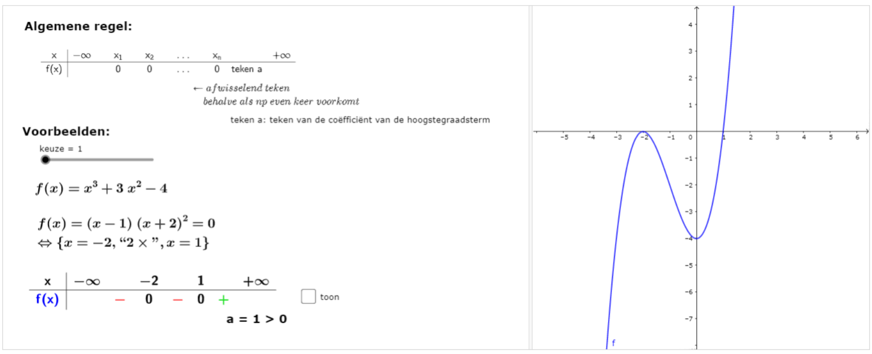


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz

4.5.1 ongelijkheden

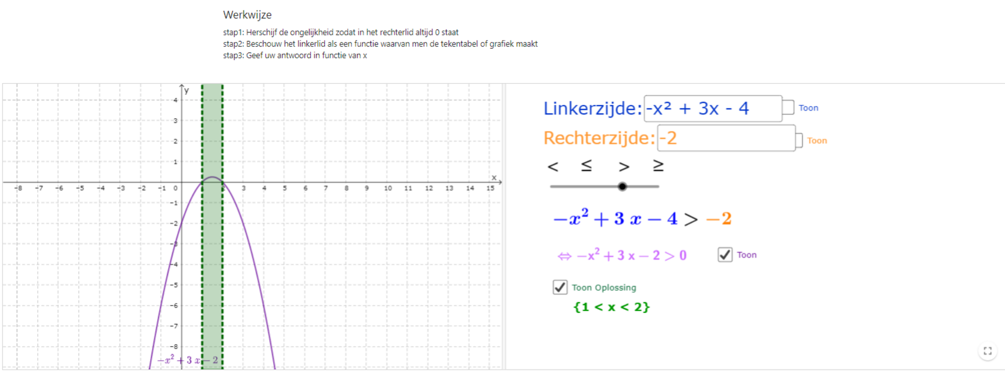


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN

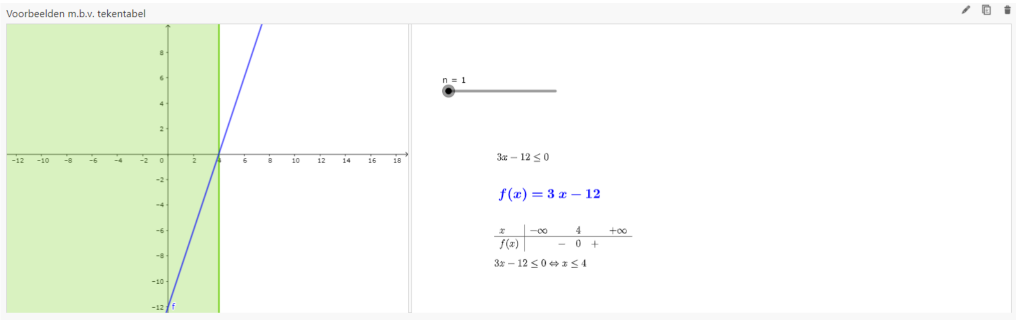


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN

4.6 productvorm

4.6.1 Hoofdstelling van de algebra

Elke veelterm(functie) kan ontbonden worden in factoren van de 1ste graad en/of factoren van de tweede graad met een negatieve discriminant.

4.6.2 Ontbinding van een drieterm

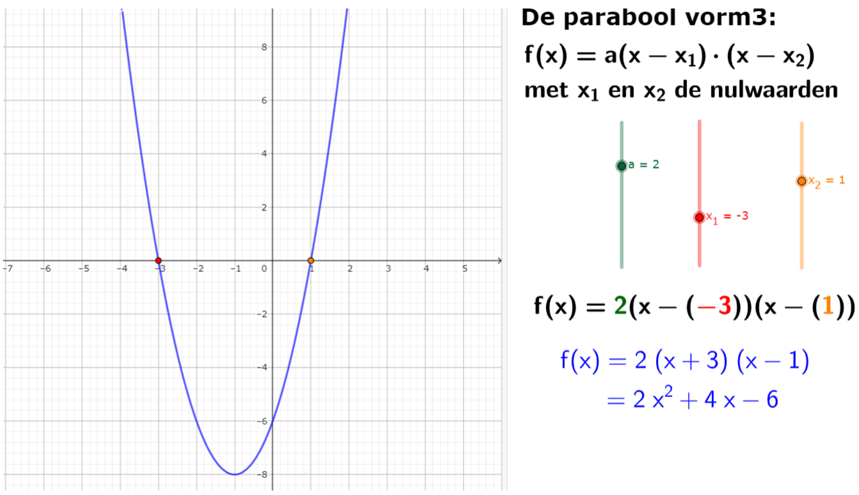


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp

4.6.3 ontbinding willekeurige veelterm

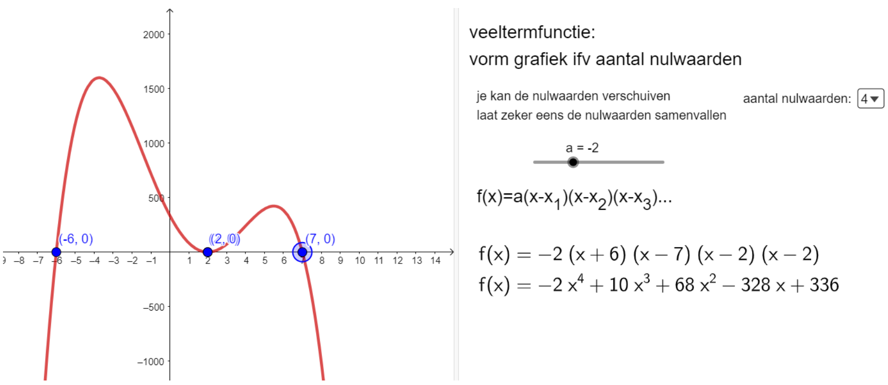


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

4.6.4 van somvorm naar productvorm: ontbinding in factoren

Werkwijze

Bij ontbinding in factoren wil men een veelterm schrijven als product van meerdere factoren

stap 1: gemeenschappelijke factoren afzonderen

stap 2: bij tweede graad

stap 2a: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

stap 2b: merkwaardig product

stap 3: bij graad 3 en hoger: Horner

Probeer altijd elke term zover mogelijk te ontbinden!

Figure 20: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

Meestal is het gemakkelijker om te werken met de veelterm in productvorm!

5 twee veeltermfuncties

5.1 snijpunten zoeken

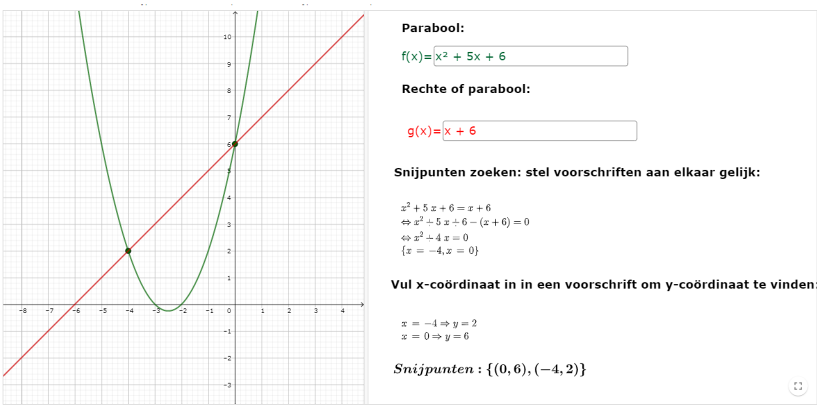


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSq

5.2 Euclidische deling

Deling van 2 veeltermen

$$3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 \;\Big|\; x^2 - 3x + 1$$
$$-(3x^4 - 9x^3 + 3x^2) \qquad 3x^2 \; +4x \; +10$$
$$4x^3 - 2x^2 - 7x$$
$$-(4x^3 - 12x^2 + 4x)$$
$$10x^2 - 11x + 3$$
$$-(10x^2 - 30x + 10)$$
$$19x - 7$$

$$x^3 + 3x^2 \quad - 4 \;\Big|\; x - 1$$
$$-(x^3 - x^2) \qquad x^2 \; +4x \; +4$$
$$4x^2$$
$$-(4x^2 - 4x)$$
$$4x \; -4$$
$$-(4x - 4)$$
$$0$$

$q(x) = 3x^2 + 4x + 10$
$r(x) = 19x - 7$
$3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 = (x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 4x + 10) + (19x - 7)$

$q(x) = x^2 + 4x + 4$
$r(x) = 0$
$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ met } gr(r(x)) < gr(d(x))$$

26 / 26 2 s

Figure 22: https://www.geogebra.org/m/ZPAsVtSe

Reststelling

$$-3x^3 + 3x^2 + 5x - 6 \;\Big|\; x + 1$$
$$-(-3x^3 - 3x^2) \qquad -3x^2 \; +6x \; -1$$
$$6x^2 + 5x$$
$$-(6x^2 + 6x)$$
$$-x \; -6$$
$$-(-x - 1)$$
$$-5$$

$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
$-3x^3 + 3x^2 + 5x - 6 = (x + 1)(-3x^2 + 6x - 1) - 5$

$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 5x - 6$

$f(-1) = -3(-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) - 6$
$+3 + 3 - 5 - 6 = -5$

Reststelling:
Bij deling van een veelterm f(x) door een veelterm van de vorm (x - a) is de getalwaarde f(a) gelijk aan de rest van de deling.

Bewijs:
f(x)=(x-a)q(x)+r

f(a)=(a-a)q(a)+r
f(a)=r

Figure 23: https://www.geogebra.org/m/ZPAsVtSe

5.3 methode onbepaalde coëfficiënten

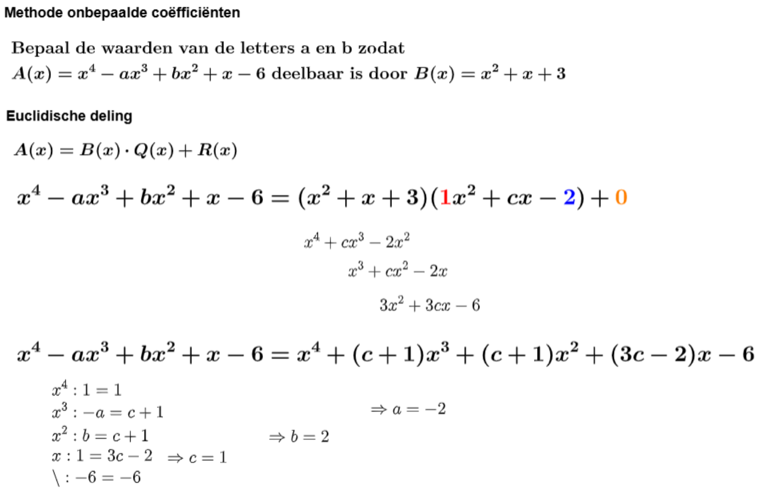


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/evrpmusa

6 Functievoorschriften opstellen

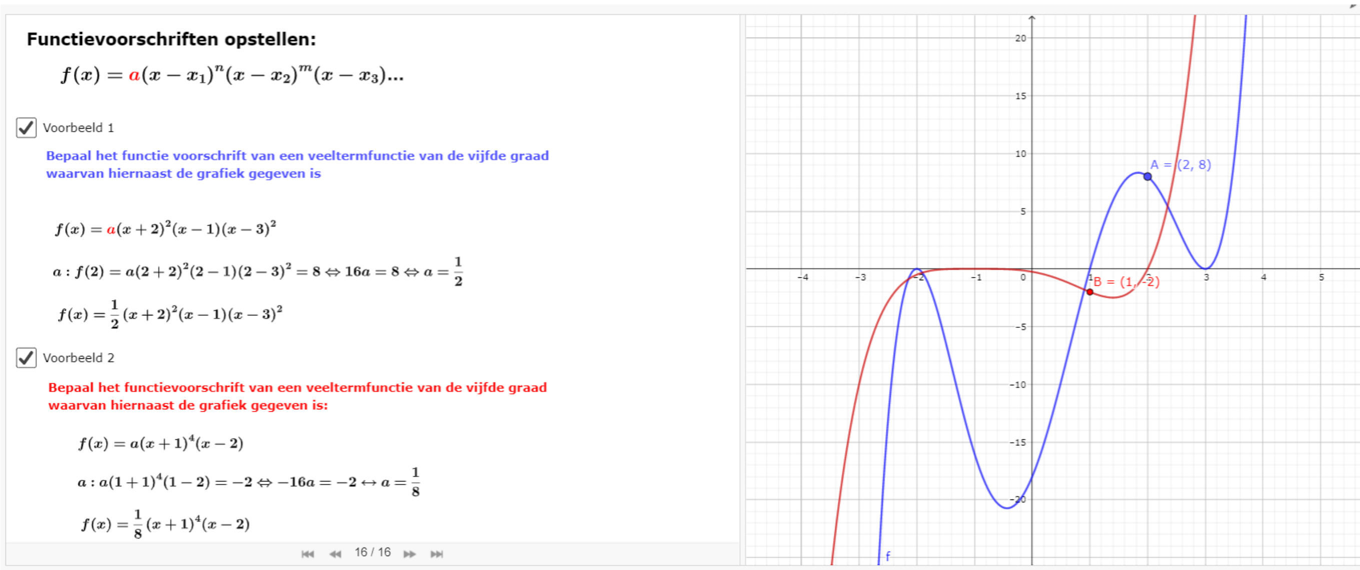


Figure 25: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

7 Toepassingen

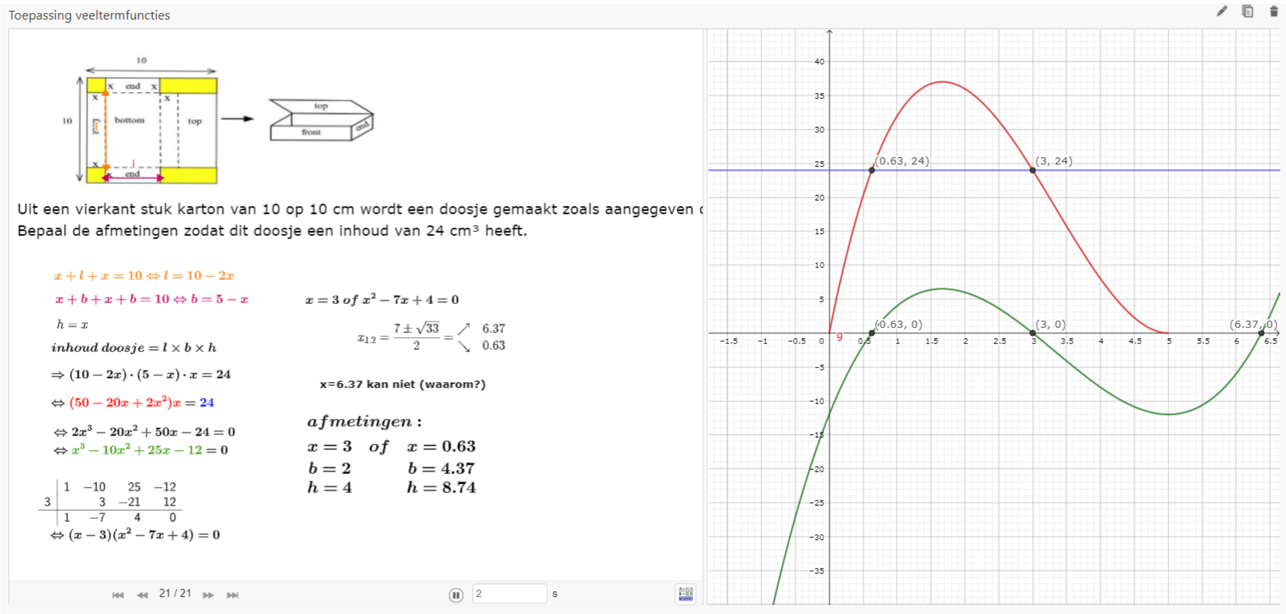


Figure 26: https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee

8 Transformaties

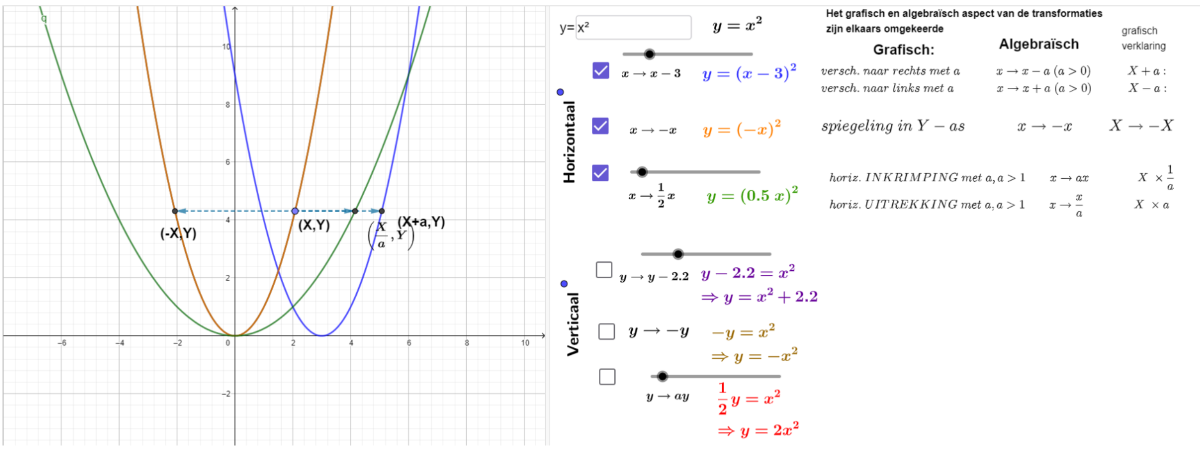


Figure 27: https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t

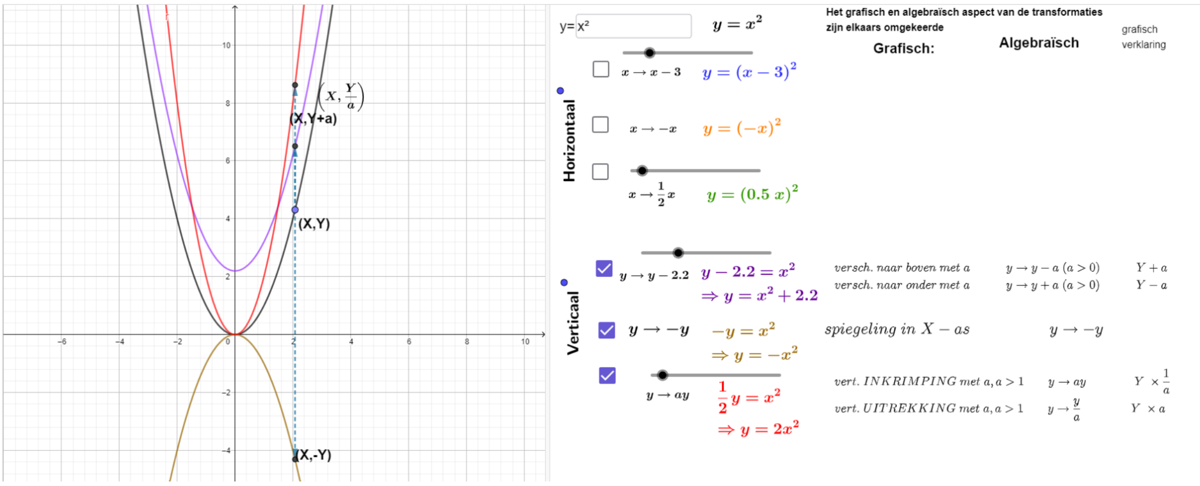


Figure 28: https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t

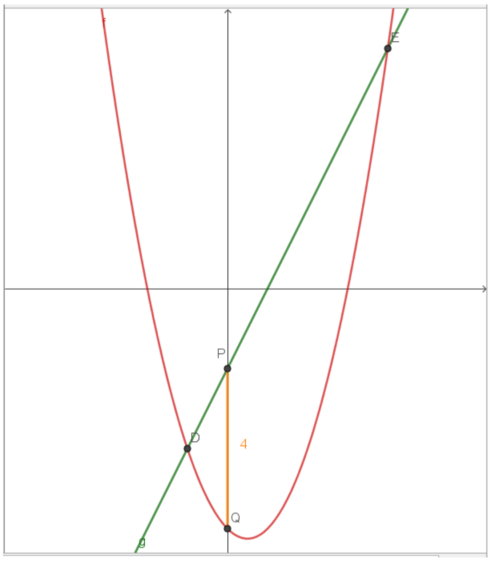
9 Absolute waarde

Figure 29: https://www.geogebra.org/m/bg86qmsa

10 Oefeningen

1. Bepaal de vergelijking van de rechte die
   (a) door het punt (-4,3) gaat en parallel ligt aan de lijn $x + 4y = 6$.
   (b) door het punt (3,3) gaat en loodrecht staat op de lijn $x - 3y = 10$.
2. de functie $y = f(x) = -x^2 + px - 5$ heeft een maximum voor $x = 1$. Bereken p en de maximale functiewaarde
3. De functie $y = f(x) = px^2 + 4x + p$ heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken p.
4. De parabool $y = x^2 - 8x + 12$ snijdt de x-as in $A(a, 0)$ en $B(b, 0)$ met $a < b$. Hoeveel gehele getallen liggen in het interval $]a, b[$?
5. De parabool $y = 2x^2 - 8x + 6$ snijdt de y-as in $(0, a)$, de parabool $y = x^2 + 4x + 4$ snijdt de x-as in $(b, 0)$. Bepaal de waarde van $a + b$
6. Gegeven is de familie parabolen $x^2 - (1 + m^2)x + \frac{1+m^2+m^4}{2}$. Toon aan dat $x_1^2 + x_2^2 = m^2$

7. De functie met voorschrift $f(x) = 2x^2 + ax + b$ neemt de waarde nul aan voor $x = \frac{3}{2}$ en $x = \frac{5}{2}$. Aan wat is de waarde van a gelijk? (A. $a = -8$)
8. De rechte met als functievoorschrift $g(x) = 2x - 2$ snijdt de parabool met als voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ in het punt $D(-1, -4$, $|PQ| = 4$.



   (a) Bepaal de de waarden van a,b en c.
   (b) Bepaal de coördinaten van de top van de parabool.
   (c) Bepaal (het) de interval(len) waar $f(x) \cdot g(x) \leq 0$
9. ontbinding van een drieterm

stap 2a

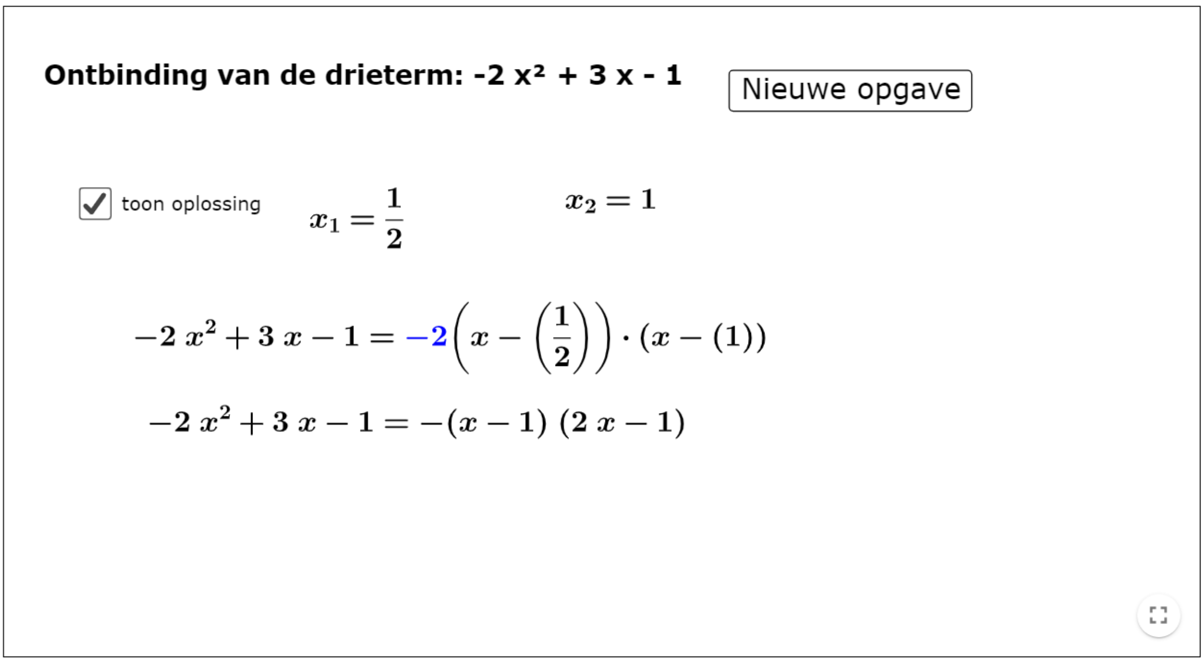


Figure 30: https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd

10. bespreek het gedrag van volgende veeltermfuncties bij de grenzen van het domein
    (a) $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - 1$

(b) $g(x) = -x^2 + 3x - 2x^6 + 4$

(c) $h(x) = (2x - 3)(-x^2 + 5)(x^7 - 3x^5 + 9x - 1)$

11. Ontbind volgende veeltermen zover mogelijk in factoren

(a) $f(x) = 49 - x^2$

(b) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 8x + 7$

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

(d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

(e) $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$

(f) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(g) $f(x) = 2x^2 - 7x + 6 = 0$

(h) $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$

(i) $f(x) = x^4 - 1$

(j) $f(x) = (x - 3)^2 + (x - 1)^2 - 2$

(k) $f(x) = (3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14$

(l) $f(x) = x^3(2x^2 - 4x)^2(x + 2 - x^2)^2$

12. Los volgende ongelijkheden op

(a) $4x^2 + 2x \leq 20$

(b) $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$

(c) $x^3 - 2x^2 \leq 4x - 8$ (A. $x \leq -2$ of $x = 2$)

(d) $x^3(2x^2 - 4x)^2(x + 2 - x^2)^2 \geq 0$

13. Bepaal de snijpunten van de grafieken van

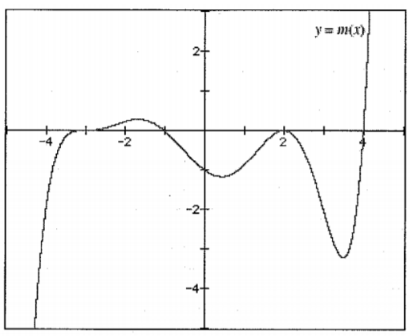
(a) $y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$

(b) $y = x^3 - 3x + 2$ en $y = (x - 1)^2$

(c) $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ en $y = (x - 2)(x - 4)^2$

(d) $y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$

14. Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie $m(x)$ van de zevende graad, waarvan de grafiek gegeven is.



15. gegeven zijn de veeltermen $p(x) = x^5 - 2x^4$, $q(x) = x^3 - 3x$ en $r(x) = x - 2$. Welke van de volgende veeltermen heeft de hoogste graad.

(a) $p(q(x) + r(x))$

(b) $q(p(x)r(x))$

(c) $r(p(x)q(x))$

(d) $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$

16. Bepaal alle intervallen waar $f(x) = (x-2)^{2021} \cdot (x-1)^{2022} \cdot (x+1)^{2023} \cdot (x+2)^{2024}$ positief is

17. Gegeven de veeltermfunctie $f : x \mapsto x^3 + (1-k^2)x + k$ met $k \in \mathbb{R}$
    (a) Toon aan dat $-k$ een wortel is.
    (b) Bepaal de twee andere wortels
    (c) Bepaal de waarden van k waarvoor de grafiek van f slechts één reële wortel heeft

18. Gegeven $f(x) = x^3 + x^2 - x + k$. Bepaal de waarde(n) van k als je weet dat $x - k$ een deler is (A. $k = -1, k = 0$)

19. Toon aan dat de veelterm $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ deelbaar is door $x^2 + x - 6$

20. Bepaal p en q zo dat de veelterm $x^3 + px + q$ deelbaar is door $x^2 - 3x + 2$

21. Bij de deling van $A(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ door $x - 2$ en door $x + 1$ is de rest telkens 1. Bepaal a en b.

22. Gegeven $f(x) = 6x^3 + Ax^2 - 6x + B$.
    (a) Bepaal de waarden van A en B als je weet dat de grafiek van f de x-as raakt bij $x = 5$ en dat de veelterm bij deling door $x - 1$, $r = 24$ geeft.
    (b) Geef de volledige ontbinding in factoren

23. Voor welk reëel getal a is de veelterm $p(x) = 4x^4 + ax^3 - \frac{1}{8}$ deelbaar door $x + \frac{1}{2}$?

24. De veeltermfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ snijdt de x-as in $A(-2,0)$, snijdt de y-as in $B(0,1)$ en raakt de x-as in $C(1,0)$. Bepaal de waarde van de parameter a.

25. Gegeven de veelterm $p(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 36$ met a,b,c en d$\in \mathbb{R}$ en nulwaarden 1,-1,3 en -3. Bepaal de 5de nulwaarde van deze veelterm.

26. De veelterm $P(x)$ is gelijk aan $2x^3 + rx^2 + 8x$ en heeft slechts één nulpunt. Welke waarde(n) kan r hebben? (A.$-8 < r < 8$)

27. De veelterm $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 2$ heeft drie reële nulpunten $a, \frac{1}{a}$ en b. Bepaal de parameter k. (A. $k = -7$)

28. Men beschouwt de functie $f(x) = 2x^3 - mx + m - 2$. Bereken m zodat de grafiek van f aan de x-as raakt. (A. $m = \frac{3}{2}$ en $m = 6$)

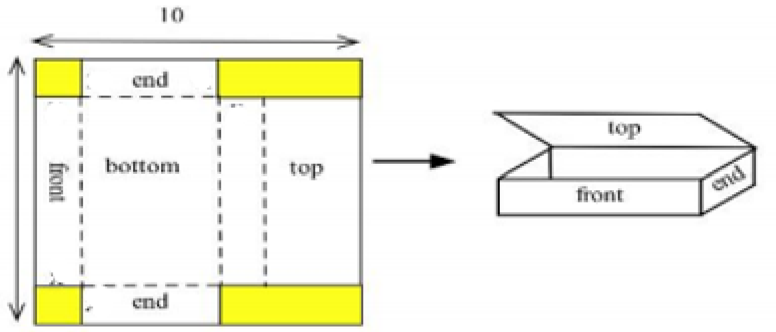
29. Als de veeltermfunctie $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x + a$ gedeeld wordt door $x^2 - x + 2$ is het quotiënt $x^2 + bx + 1$ en de rest $cx + 5$. Bepaal de waarden van a,b en c (A. $a = 7$, $b = 3$ en $c = 4$)

30. De veeltermfunctie $f(x) = x^8 - 12x^6 + 49x^4 - 78x^2 + 42$ heeft acht wortels. Hoeveel hiervan zijn positief?

31. Toon de volgende merkwaardige producten aan:
    (a) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
    (b) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

32. Bepaal quotiënt en rest m.b.v. de Euclidische deling als
    (a) deeltal: $x^3 + 2x^2 + 4x + 6$ en deler: $x^2 + 4x + 8$
    (b) deeltal: $3x^4 - 2x + 5$ en deler: $x^2 + 2x + 2$
    (c) deeltal: $x^5 - x^3 + x - 5$ en deler: $x - 2$

33. Een fabrikant van dozen kan uit een stuk karton van 10 op 10 cm volgend doosje maken:



(a) Bepaal een voorschrift voor de inhoud van deze doos.

(b) Bepaal de afmetingen voor die doos met een inhoud van $8cm^3$.

34. Bij mijn Amerikaanse vrienden staat een aquarium met een inhou van 96 kubieke feet. De breedte is 2 feet minder dan de hoogte, en de lengte is 8 feet meer dan de hoogte. Bepaal de afmetingen van dit aquarium. (A. (l,b,h)=(12,2,4))

35. Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van 100 euro per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van 75 euro per cm lengte. Bepaal de afmetingen voor een kadertje met een oppervlakte van 12 cm^2 als je 1500 euro wil spenderen.

36. Een open doos met een vierkant als grondvlak wordt gemaakt uit 9 m^2 materiaal. Bepaal de afmetingen voor een doos met een inhoud van 2 m^3

37. Bij een rechthoekig stuk karton, waarbij de lengte 4 cm langer is dan de breedte, snijdt men in de vier hoeken een vierkantje van 3 op 3 cm weg. Op deze manier kan men een doos bekomen door de bekomen zijkanten omhoog te plooien. Bepaal de afmetingen van het stuk karton als de doos een inhoud van 351 cm^3 heeft. (A. (b,l)=(10,14))

38. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van $y = x^2$ achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de y-as en tenslotte te spiegelen om de x-as

39. De grafiek van $y = x^3$ wordt achtereenvolgens 1 eenheid naar beneden verschoven, dan uitgetrokken met een factor 3, dan gespiegeld om de x-as en tenslotte 2 eenheden naar rechts verschoven. Geef het nieuwe voorschrift.

40. (a) Geef het voorschrift van de functie g die ontstaat uit de grafiek van $f(x) = x^2$ door een spiegeling om de x-as, een verticale uitrekking met factor 3 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(2,6)$. (A. $g(x) = -3(x-2)^2 + 6$)

(b) Bepaal het bereik van g (A. $]-\infty, 6]$)

41. Bepaal de transformaties die men uitgevoerd heeft op $y = x^2$ om $y = 2(-x+3)^2 - 4$ te bekomen.

42. Geef het voorschrift van de functie g die onstaat uit de grafiek van $f(x) = x^2 + 2x - 3$ door een spiegeling om de y-as, een horizontale inkrimping met factor 2 en een verschuiving over de vector $\vec{v}(-1,-4)$

43. Als G1 de grafiek is van $y = f(x)$, dan is G2 de grafiek van

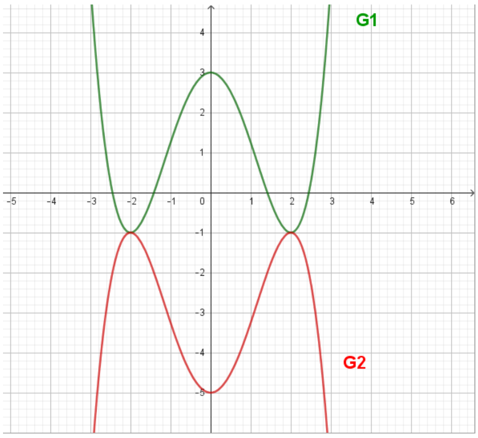
(a) $y = -f(x)$

(b) $y = f(-x)$

(c) $y = f(x) - 6$

(d) $y = -f(x) - 1$

(e) $y = -f(x) - 2$



44. Oefeningen met absolute waarde

    (a) Teken de grafiek van

    i. $f(x) = ||x-2|-2|$

    ii. $f(x) = |x-1|+3$

    (b) Los op:

    i. $|x+5| - 2|x-1| \geq 0$

    ii. $|x-3| = x^2 - 3$

    iii. $|-x^2 + 3x - \frac{1}{2}| \leq \frac{9}{2}$ (A. $x \in [-1, 4]$)

    iv. $3(1-2x) + 4 \geq \frac{|x+1|}{-2}$

    v. $12 - |2x+1| \geq 9$ (A $x \in [-2, 1]$)

11 taak