

# Limieten van functies

[www.karelappeltans.be](http://www.karelappeltans.be)

February 10, 2024

## Contents

<b>1 Grafisch</b>	<b>2</b>
<b>2 Theoretisch</b>	<b>2</b>
2.1 Voorbeelden . . . . .	2
2.2 Voorbeeld van geen limiet hebben . . . . .	3
<b>3 Rekenregels</b>	<b>3</b>
<b>4 Onbepaaldheden</b>	<b>3</b>
4.1 limiet naar oneindig . . . . .	3
4.1.1 onbepaaldheid $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ . . . . .	3
4.1.2 onbepaaldheid $\pm\infty \mp \infty$ . . . . .	3
4.2 limiet naar getal . . . . .	4
4.2.1 onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ . . . . .	4
<b>5 Oefeningen</b>	<b>4</b>
5.1 Grafisch . . . . .	4
5.2 theorie . . . . .	5
5.3 praktijk . . . . .	5
<b>6 Taken</b>	<b>6</b>

# 1 Grafisch

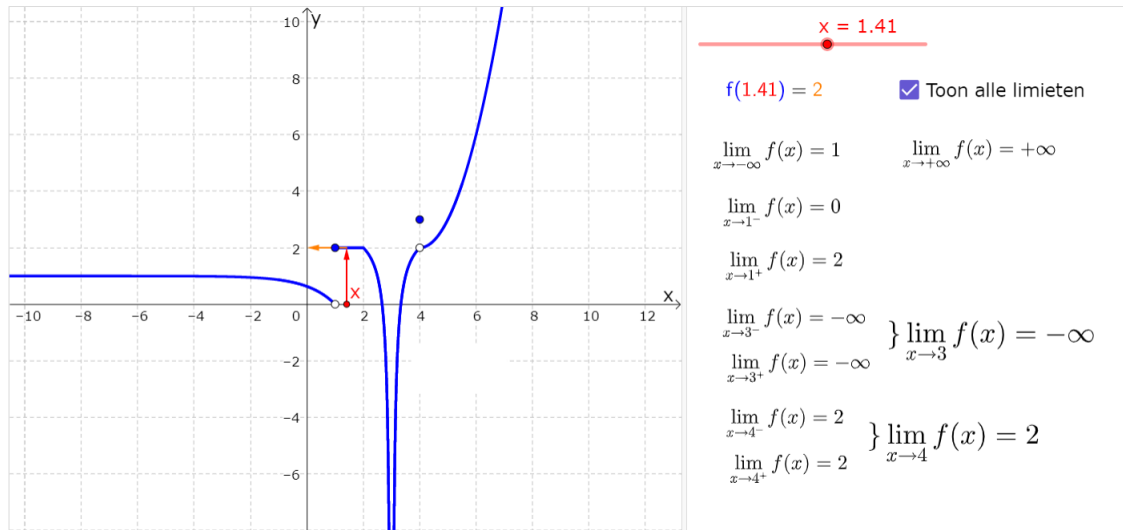


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/nutjgnx>

# 2 Theoretisch

## 2.1 Voorbeelden

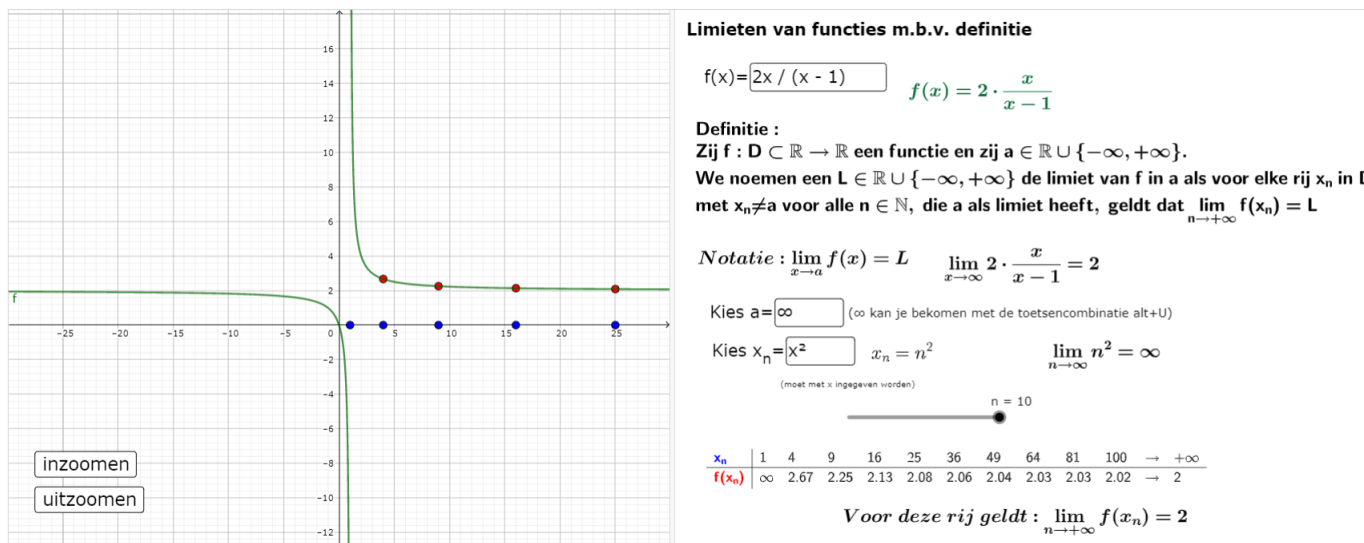


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/gysvpvdp>

## 2.2 Voorbeeld van geen limiet hebben

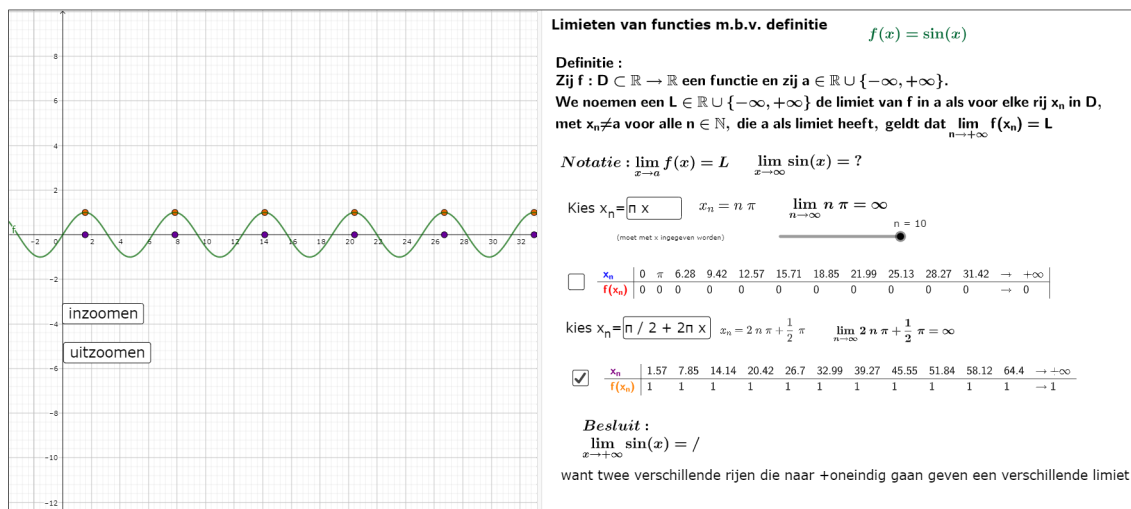


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/gysvpvdp>

## 3 Rekenregels

Alle geziene rekenregels van bij rijen blijven geldig

## 4 Onbepaaldheden

Volgende symbolische uitdrukkingen noemen we een onbepaaldheid:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 0 \cdot \pm\infty \quad \pm\infty \mp \infty$$

### 4.1 limiet naar oneindig

Basisregel: Hoogstegraadstermen afzonderen

#### 4.1.1 onbepaaldheid $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Oplossen: breuk van hoogstegraadstermen

hoogste graadstermen afzonderen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - 4x^2}{-3x^2 + 3x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-4 + \frac{-1}{x^2})}{x^2(-3 + \frac{3x}{x^2})}$$

$$= \frac{-4 + 0}{-3 + 0} = \frac{4}{3}$$

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/rnmp7qws>

#### 4.1.2 onbepaaldheid $\pm\infty \mp \infty$

Oplossen: vermenigvuldigen met het toegevoegde

## 4.2 limiet naar getal

Basisregel: getal invullen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

### 4.2.1 onbepaaldheid $\frac{0}{0}$

oplossen m.b.v. ontbinden in factoren

0/0 oplossen m.b.v. ontbinding in factoren

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 - x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

T en N ontbinden in factoren m.b.v. Horner

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & -4 & 3 \\ & & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & ||0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ & & 3 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & ||0 \end{array}$$
$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x^2+x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x^2+x+2} \\ &= \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/rnmp7qws>

oplossen m.b.v. toegevoegde

0/0 oplossen m.b.v. toegevoegde

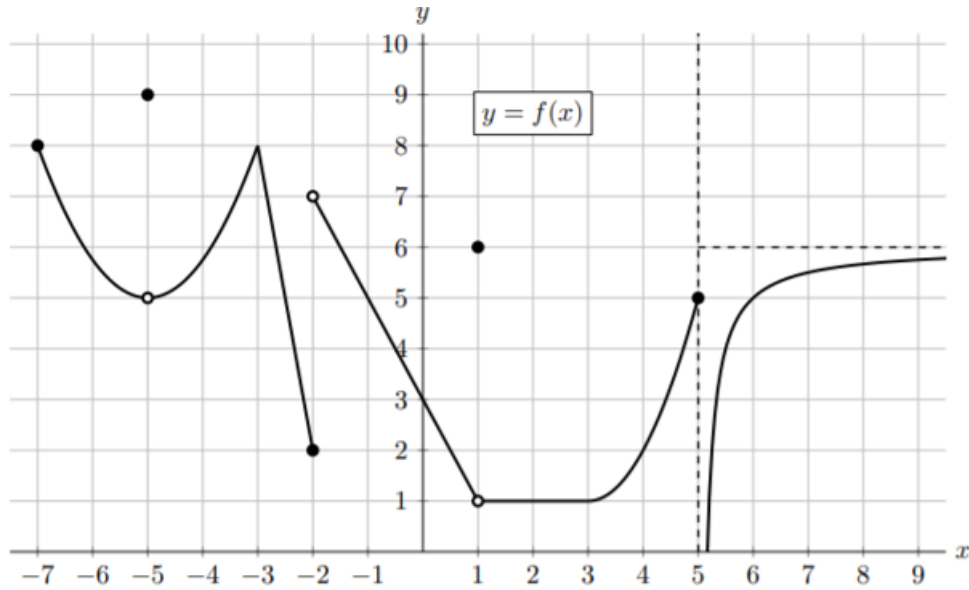
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - \sqrt{5x+6}}{x^2 - 8x + 12} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - \sqrt{5x+6}}{x^2 - 8x + 12} \cdot \frac{6 + \sqrt{5x+6}}{6 + \sqrt{5x+6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{36 - (5x+6)}{(x-6)(x-2)(6 + \sqrt{5x+6})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-5(x-6)}{(x-6)(x-2)(6 + \sqrt{5x+6})} \\ &= \frac{-5}{(6-2)(6 + \sqrt{5 \cdot 6 + 6})} = -\frac{5}{48} \end{aligned}$$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/rnmp7qws>

## 5 Oefeningen

### 5.1 Grafisch

1. Bepaal grafisch



- (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(f(x))$

## 5.2 theorie

1. Bereken m.b.v. rijen volgende limieten

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2+1}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

2. Toon aan m.b.v. goed gekozen rijen dat volgende limieten niet bestaan:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan x$

## 5.3 praktijk

1.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-2x+5}{13x^3-3x^2+x-7}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 3x^2 + 5x + 6$
5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+1}{x^2+3x-4}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x-5}$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5x+1}{\sqrt{16x^4+x^3-9x^2+7x+2}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x+4)^{70}(5x-3)^{30}}{(5x+7)^{100}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$
10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3+8} \sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{8x^4+2}}$  (A. 4)
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ . Bepaal a en b
13.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$ . Bepaal a en b.
14.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+3x}-4}{x^2-25}$
15. Noem  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+bx^2}{x^7+x^2}$  met parameters  $a \in \mathbb{R}_0^+$  en  $b \in \mathbb{R}_0^-$ . Welk van de volgende uitspraken over L is waar:
- (a)  $L = 0$
  - (b)  $L \in \mathbb{R}_0^+$
  - (c)  $L \in \mathbb{R}_0^-$
  - (d)  $L = +\infty$
16. Bepaal de waarde van k zodat de volgende functies continu zijn
- (a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x^2-x} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$
- (b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$
17. Bepaal de waarde van a en b zodat onderstaande functie overal continu is

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-a}{x^2+2x-3} & x < 1 \\ x-b & x \geq 1 \end{cases}$$

## 6 Taken

1. Limiet van functies