INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BAHIA
Campus Eunápolis

CÁLCULO II – MAT107

Prof. Celso Eduardo

FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

DEFINIÇÃO:

Chamamos de função real com n variáveis a uma função do tipo $f : D \to R$, com $D \subset R^n = R \text{ x } R \text{ x } \dots \text{ x } R$. Ou seja, uma função cujo domínio *D* (ou $D(f)$) é um subconjunto de R_n e seu contradomínio é *R*.

Exemplos:

1) $$\begin{aligned} f : \quad & R^2 \to R \\ & (x, y) \mapsto 2x + 3y \end{aligned}$$

$D = R^2$, é uma função real de duas variáveis (*é também uma função linear*).

2) $$\begin{aligned} f : \quad & R^3 \to R \\ & (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y + z \end{aligned}$$

$D = R^3$, é uma função real de três variáveis (*é também uma função polinomial*).

3) $$\begin{aligned} f : \quad & R^3 - \{(0,0,0)\} \to R \\ & (x, y, z) \mapsto \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$D = R^3 - \{(0,0,0)\}$, é uma função real de três variáveis (*é também uma função racional, isto é, quociente de duas funções polinomiais*).

Usamos, também, a notação (mais resumida) para representar funções reais de *n* variáveis:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Neste caso $D(f)$ é o conjunto $D(f) = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n;\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R\}$

DOMÍNIO DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Exemplo:

Determine e represente geometricamente os domínios das funções:

1. $f(x,y) = 3x^2 + 1$
2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$
3. $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + y}{x^2 + y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x - y}$
5. $f(x,y) = \dfrac{2x + y}{\sqrt{x^2 - y}}$
6. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x - y}{y - 1}\right)$
7. $f(x,y) = \operatorname{arcsec}(x^2 + y^2)$
8. $f(x,y) = \arccos\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4}\right)$

CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E CURVAS DE NÍVEL

DEFINIÇÃO:

Dado uma função $f : D \to R$ seu gráfico é o conjunto $\{a, f(a); a \in D\}$.

- No caso de funções reais de uma variável temos:

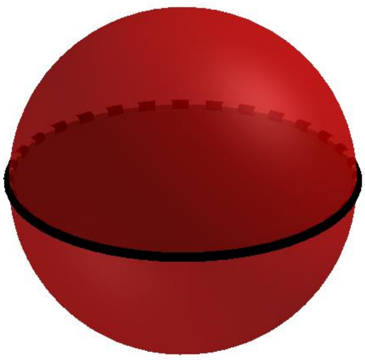
$f : D \to R, D \subset R$ seu gráfico é uma curva do R^2.

- Para uma função de duas variáveis:

$$\begin{aligned} f: \quad & D \to R, D \subset R^2 \\ (x,y) & \mapsto f(x,y) \end{aligned}$$. O gráfico da função f é uma superfície de R^3.

Exemplo:

A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície de R^3 que não é gráfico de função $z = f(x,y)$.



Da equação da esfera tem-se,

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Sejam as funções $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $g(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$D(f) = D(g) = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ (O círculo $x^2 + y^2 = 1$ e seu interior)

O gráfico de f é a semiesfera superior ($z \geq 0$) e o gráfico de g é a semiesfera inferior ($z \leq 0$).

Um recurso auxiliar para esboçar gráficos são as curvas de nível da função.

DEFINIÇÃO:

Dados uma função $z = f(x, y)$ e $k \in R$, a curva de nível de *f* em $z = k$ é o conjunto $\{(x, y) \in R^2;\ f(x, y) = k\}$. Ou seja, é o conjunto dos elementos do domínio de *f* que possuem imagens igual a *k*. É também a intersecção do gráfico de *f* com o plano (paralelo a XOY) de equação *z* = *k*.

Exemplo 1:

Determine e esboce a curva de nível de $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ em $z = 2$.

Exemplo 2:

Dada a função ao lado, determine e represente seu domínio e as curvas de nível. $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2 - 1}$

Exemplo 3:

Para cada função abaixo:

I) Determine e represente graficamente.

i) Domínio de f.

ii) Curvas de nível.

iii) Interseções com os planos coordenados.

II) Esboce o gráfico de f usando os itens de I).

1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

2 $f(x, y) = 1 - y^2$

3 $f(x, y) = y^2 - x^2$

4 $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x^2}{9} + y^2\right)$

Exemplo 4:

Determine e represente graficamente as superfícies de nível da função: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$