Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

GeoGebra y los tres problemas clásicos

Un viaje de más de dos mil años de Grecia a Palencia

Jose Manuel Arranz

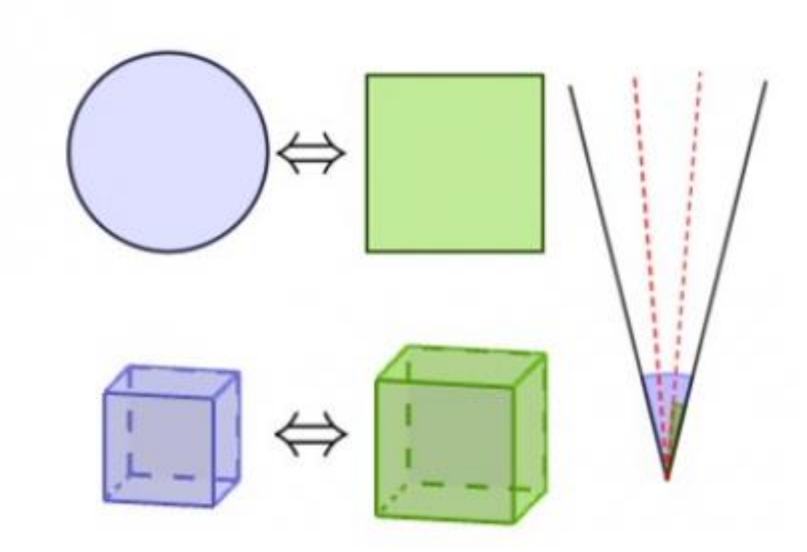
IES Álvaro de Mendaña. Ponferrada. León.

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.

Instituto GeoGebra de Castilla y León (IGCL)

geogebra.org/u/arranz

Los tres problemas clásicos



https://www.geogebra.org/m/hux9uzqd

Los tres problemas clásicos

1.- Duplicación del cubo.

Dado un cubo de volumen V, construir un cubo de volumen 2V.

2.- Trisección del ángulo.

Dado un ángulo cualquiera, dividir el ángulo en tres ángulos de igual amplitud.

3.- Cuadratura del círculo.

Dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado cuya área sea igual a la del círculo.

En los tres casos, la construcción ha de ser utilizando únicamente regla (sin marcas) y compás, en un número finito de pasos.

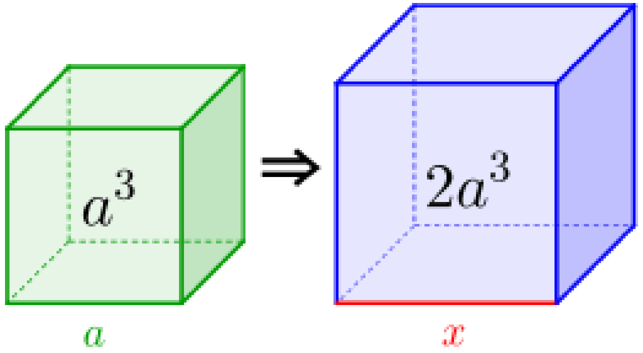
Estos problemas fueron planteados en la Antigua Grecia en el siglo V a.C.

1. Duplicación del cubo.

Conocido también como **problema de Delos**.

Según cuenta la leyenda, hacia el año 430 a.C. ocurría en Atenas una terrible epidemia de peste, y ante la impotencia para combatirla, los atenienses consultaron el oráculo del dios Apolo, cuyo altar se encontraba en la isla de Delos.

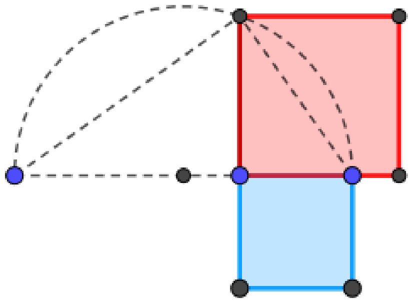
Éste mandó duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía la forma de un cubo, dando origen al problema de la duplicación del cubo.

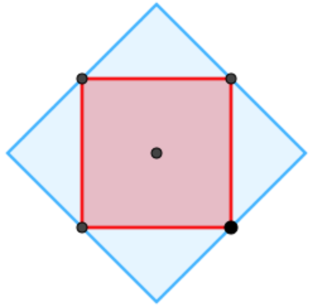


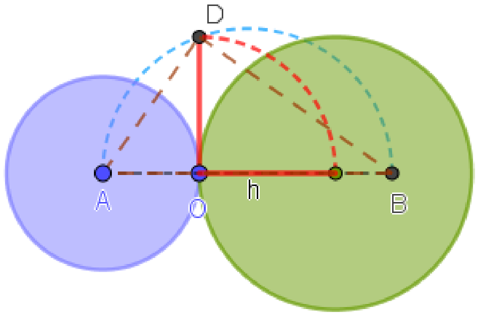
Duplicación de figuras planas.

Seguramente el origen del problema fue diferente a la conocida leyenda.

- Los geómetras griegos conocían perfectamente técnicas para duplicar una figura plana, basta multiplicar sus longitudes por $\sqrt{2}$, que es un número construible con regla y compás.



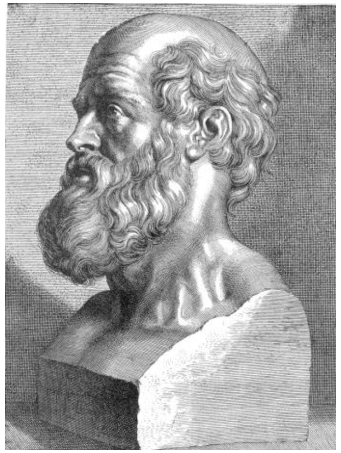




- Resulta sencillo construir una figura plana de área n veces mayor.

Resuelto el problema en el plano, parece razonable intentarlo en el espacio.

Hipócrates de Chíos (470 a. C–410 a. C.)



- Hipócrates demostró que el problema se reduce a encontrar dos medias proporcionales x e y tales que:

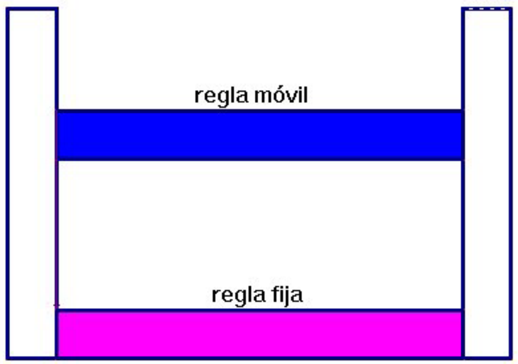
$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

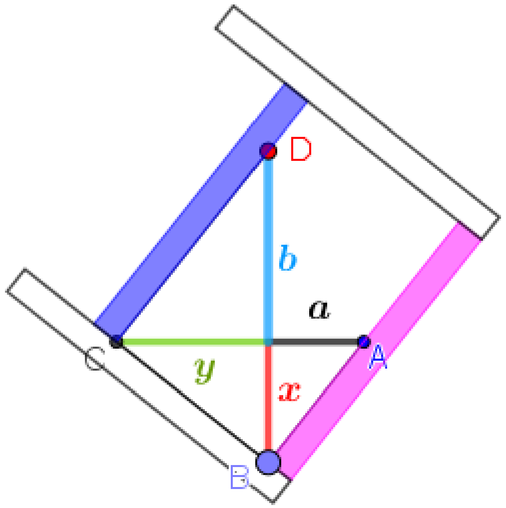
$$\frac{a^3}{x^3}=\left(\frac{a}{x}\right)^3=\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{2a}\right)=\left(\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \frac{a^3}{x^3}=\frac{1}{2}; x^3=2a^3; x=a\sqrt[3]{2}$$

No hay registros de construcción de medias proporcionales por Hipócrates, probablemente no llegó a realizarlas.

Mecanismo de Platón

- El primer intento de realizar la duplicación del cubo se atribuye a Platón (posiblemente no es el conocido filósofo, sino otro de igual nombre).

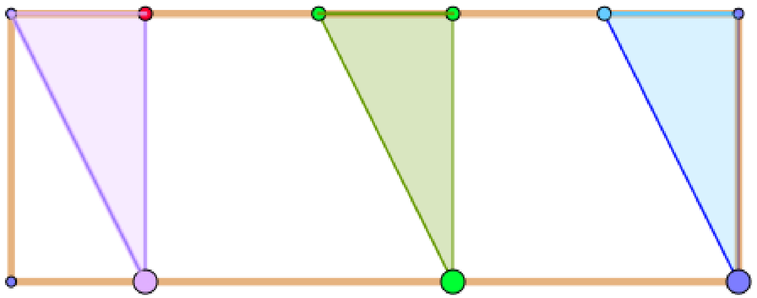


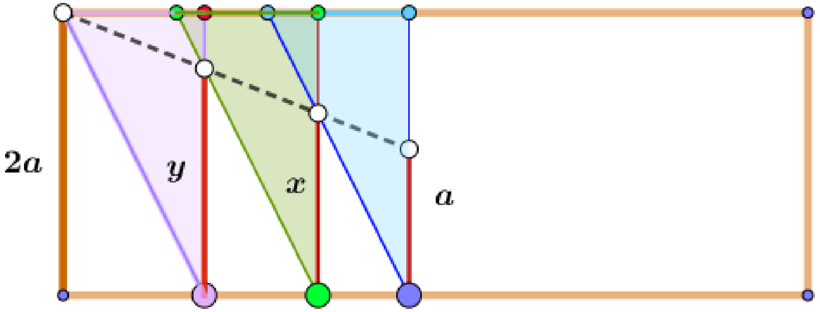


- Si se coloca el dispositivo de forma que **b = 2a,** el segmento x es la media proporcional que permite duplicar el cubo.

Mesolabio de Eratóstenes (276 a. C.-194 a.C.)

- Sencillo mecanismo, conocido como **Mesolabio de Eratóstenes**, que permite resolver el problema de la duplicación del cubo.



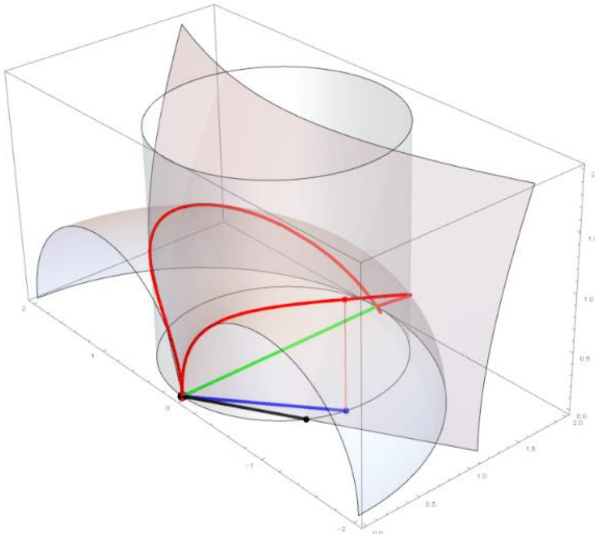


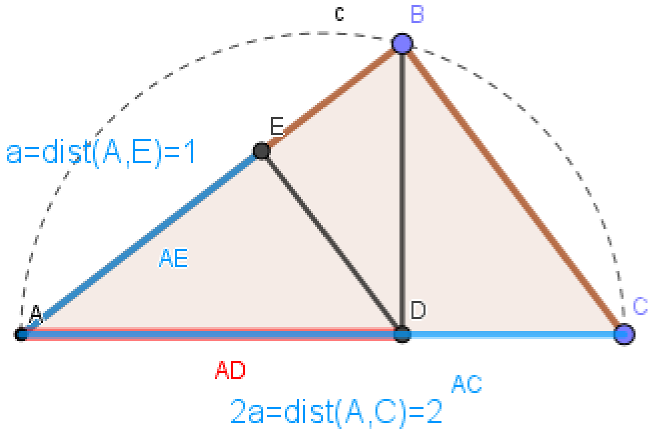
- Si los cuatro puntos están alineados, aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Arquitas de Tarento (430 a.C.-360 a.C.)

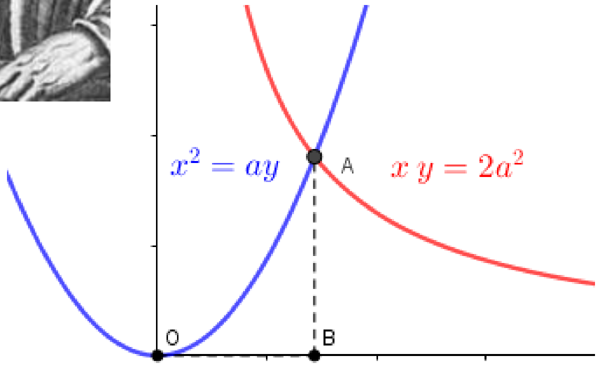
Da una de las soluciones más ingeniosas y complejas: la intersección de un cilindro, un cono y un toro es la solución que permite la duplicación del cubo.

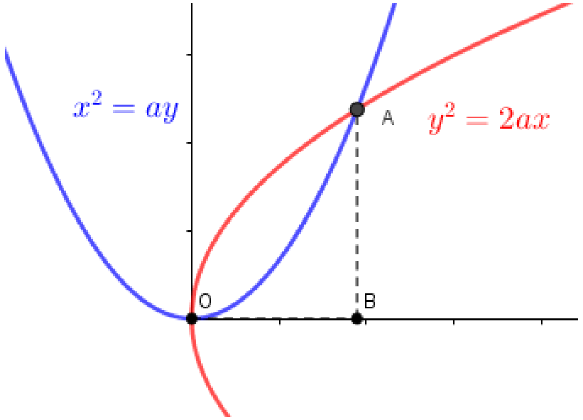




Cónicas de Menecmo (374-325 a.C.)

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}\rightarrow\begin{cases} x^2=a\,y & (1)-\textit{Parábola}\\ y^2=2\,a\,x & (2)-\textit{Parábola}\\ x\,y=2\,a^2 & (3)-\textit{Hipérbola}\end{cases}$$

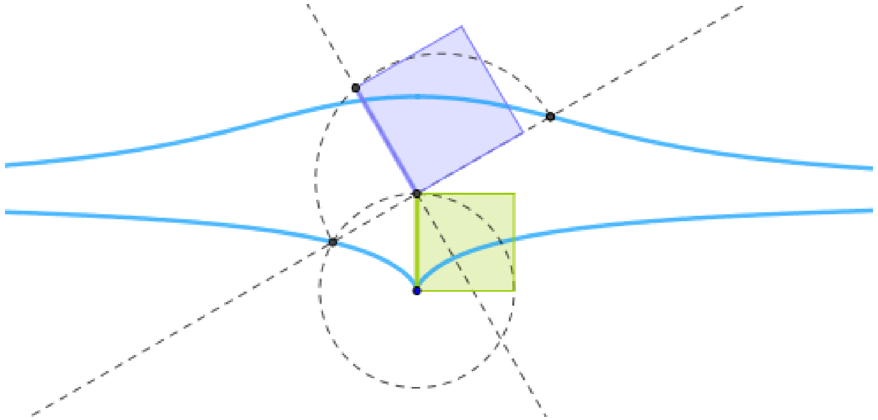




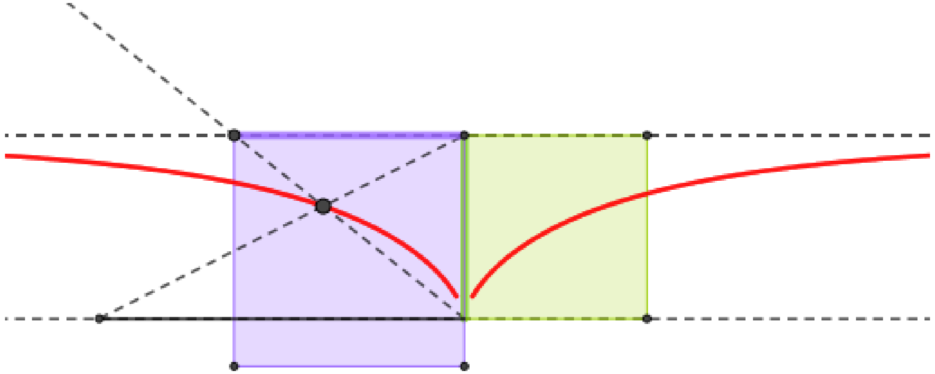
Menecmo imagina estas curvas como intersección de un plano con un cono recto.

Curvas mecánicas

- Concoide de Nicomedes (~280, ~210 a.C.)



- Cisoide de Diocles (240-180 a.C.)

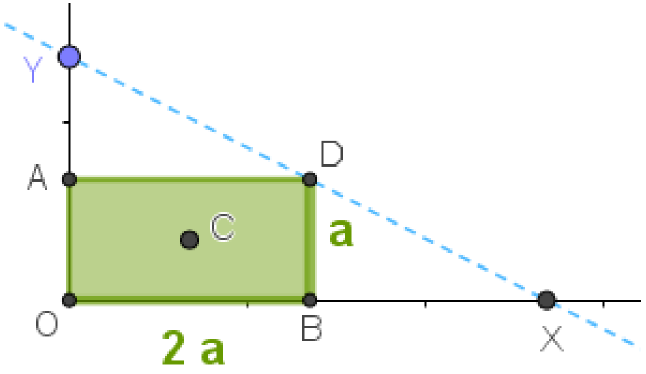


Curvas no construibles globalmente con regla y compás.

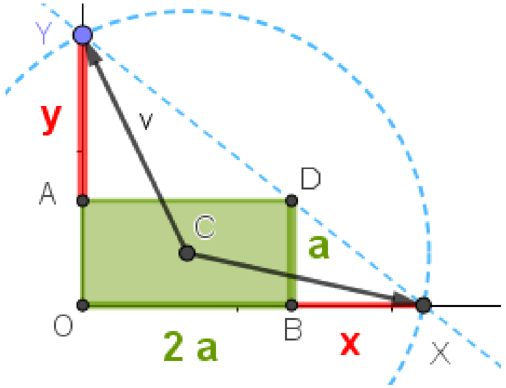
Apolonio de Perga (262-190 a.C.)

No confundir con Apolonio de Pérgamo (médico)

- Apolonio, "El gran Geómetra" plantea una solución tan sencilla como brillante.
- Si los puntos X e Y se sitúan de forma que **Distancia(C,X) = Distancia(C,Y),** entonces:



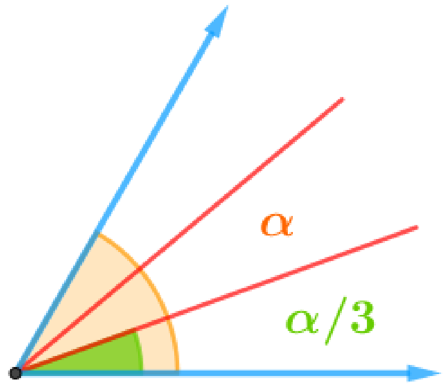
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$



- En esta disposición, x e y son las medias proporcionales que resuelven el problema.

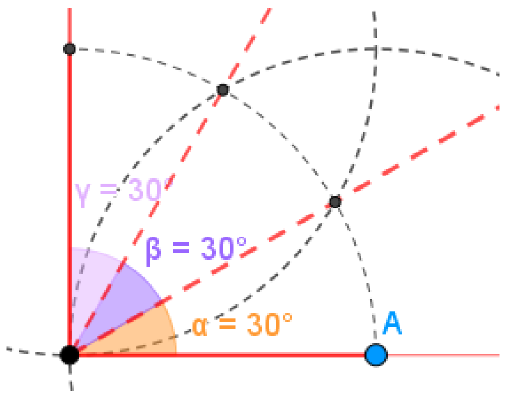
2. Trisección del ángulo

- El problema consiste en dividir con regla y compás en tres partes de igual amplitud un ángulo cualquiera en un número finito de pasos.



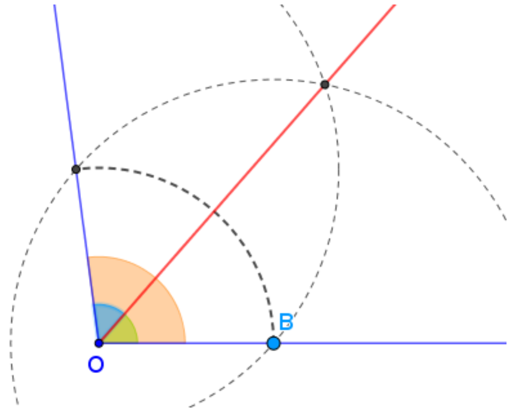
- No se sabe con exactitud como surgió del problema y no hay leyenda que acompañe su origen.

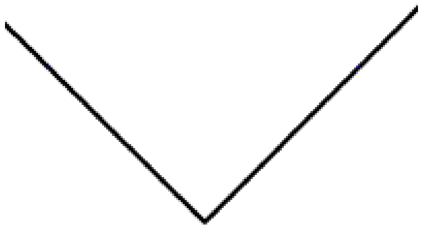
- El problema tiene matices que lo diferencian de los otros dos problemas:
  - Ningún cubo se puede duplicar, ningún circulo puede cuadrarse, pero si hay ángulos que se pueden trisecar.
  - Dado un ángulo es inmediato construir el ángulo de amplitud tres veces mayor.



Bisección ángulo

- La bisección del ángulo era bien conocida por los geómetras de la antigüedad, y por tanto también la división en cuatro, ocho, … partes iguales.

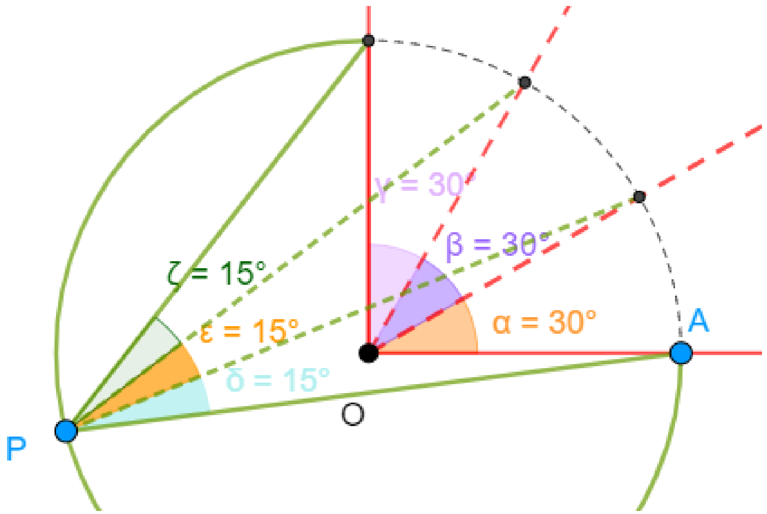


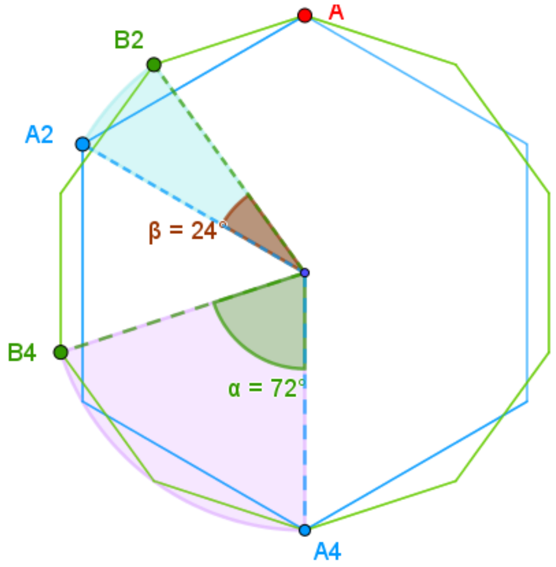


- Parece lógico que los geómetras griegos buscaran como dividir el ángulo en tres partes de igual amplitud.

Algunos ángulos trisecables

- La trisección de un ángulo cualquiera no es posible con regla y compás en un número finito de pasos. Si lo es sin embargo la trisección de algunos ángulos.

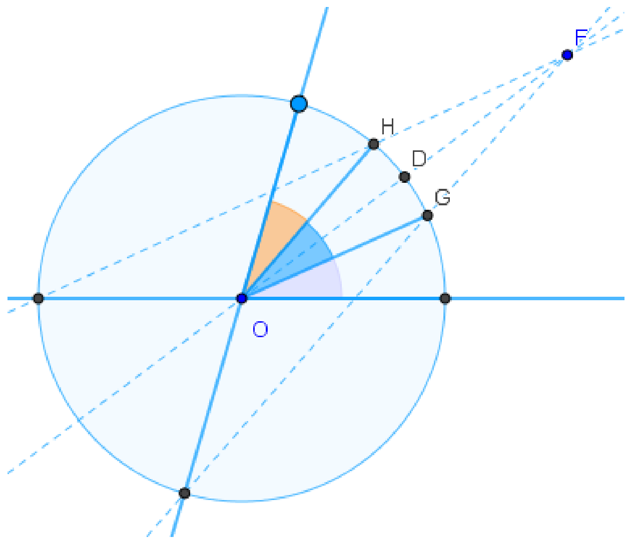




- Si un ángulo es trisecable, lo es también su ángulo mitad,…

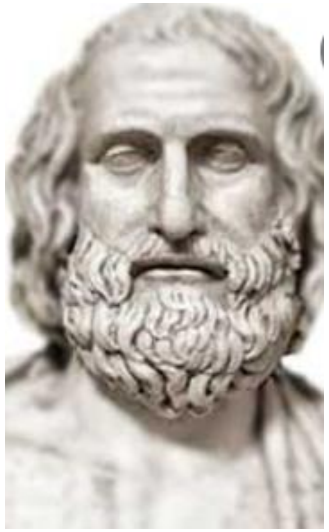
Trisección aproximada

- A lo largo de la historia, matemáticos y aficionados han realizado construcciones que de forma aproximada trisecan un ángulo.

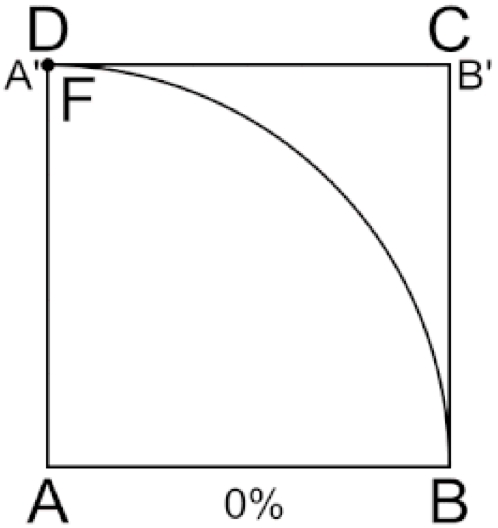


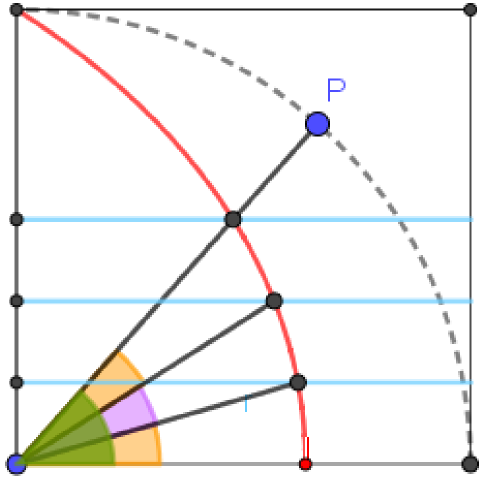
- Esta construcción da “resultados aceptables” para valores pequeños del ángulo.

Trisectriz de Hipias (443 a. C.-399 a. C)



- Una de las primeras curvas mecánicas, construida por Hipias de Élide, para trisecar el ángulo.

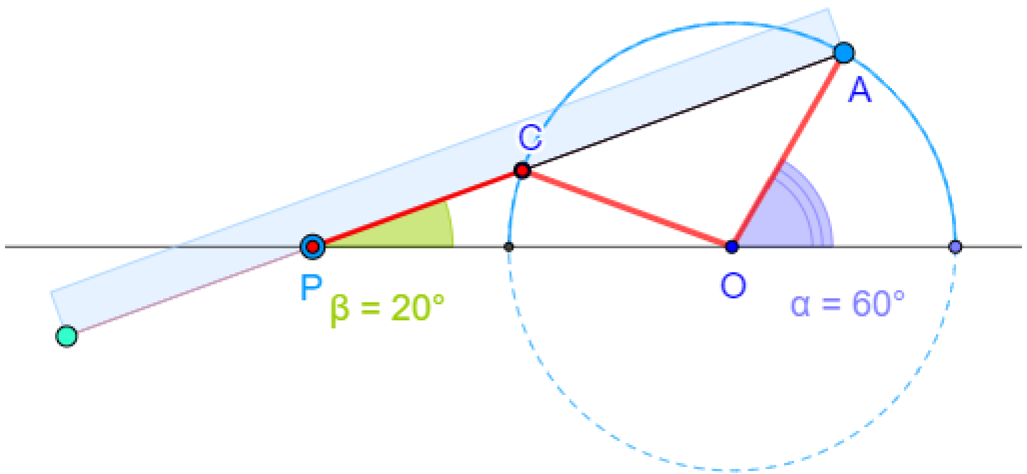




- Posteriormente, Dinostrato demostró que esta curva permite la cuadratura del círculo, motivo por el que la curva es también conocida como cuadratriz de Hipias.

Trisección con regla marcada

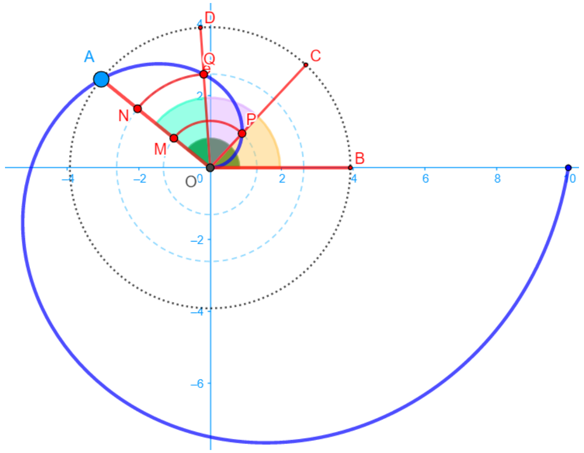
- Una forma de trisecar un ángulo arbitrario, con un "pequeño" paso fuera del marco clásico griego, es mediante una regla con dos marcas separadas por una distancia determinada.



- Se conoce como **neusis** este método que ya fue utilizado por Arquímedes para resolver la trisección.

Espiral de Arquímedes (287-212 a.C.)

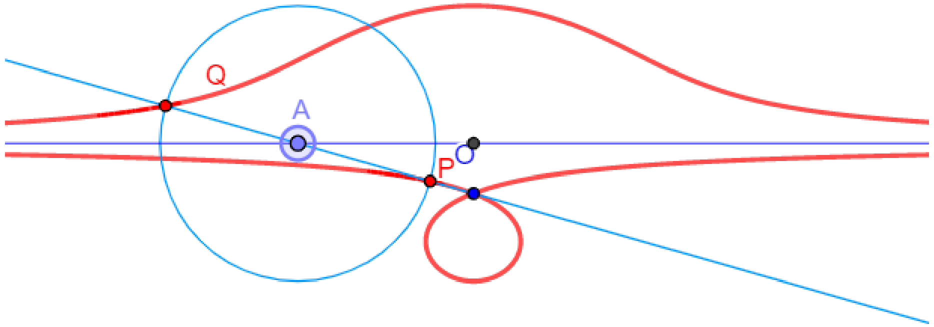
- La espiral de Arquímedes es una curva mecánica ideada por el sabio de Siracusa con el fin de resolver el problema de la trisección del ángulo.

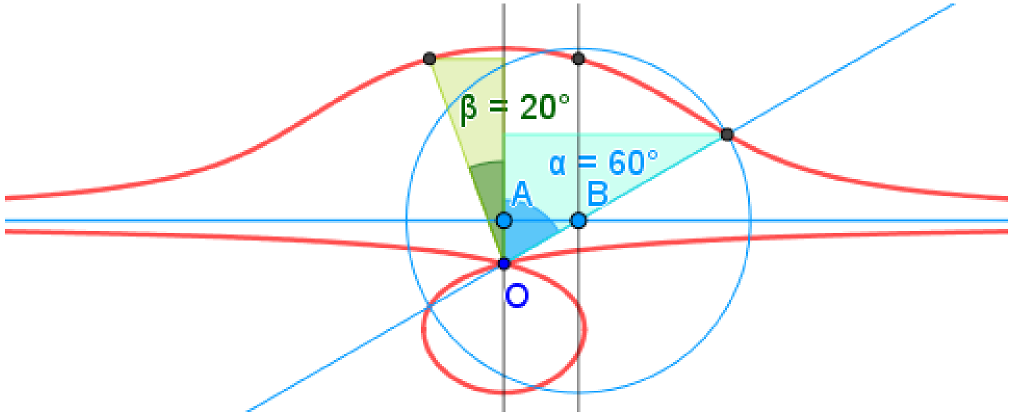


- La espiral de Arquímedes permite dividir un ángulo en un número cualquiera de partes.

Concoide de Nicomedes (~280 a.C., ~210 a.C.)

- Una de las primeras curvas mecánicas que permiten trisecar el ángulo es la Concoide de Nicomedes.

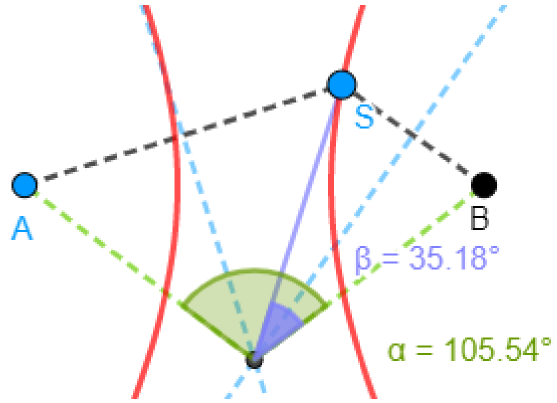




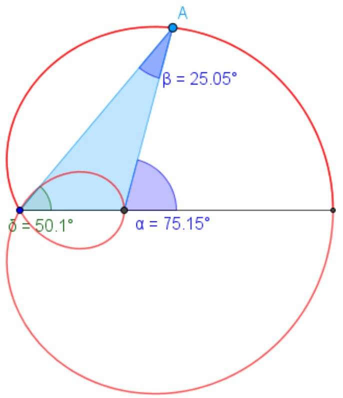
- Esta curva permite también la duplicación del cubo como ya hemos visto.

Otras curvas mecánicas

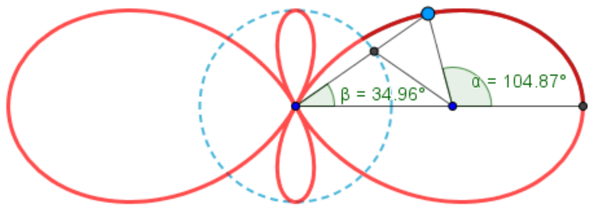
- Pappus de Alejandría (290-350)



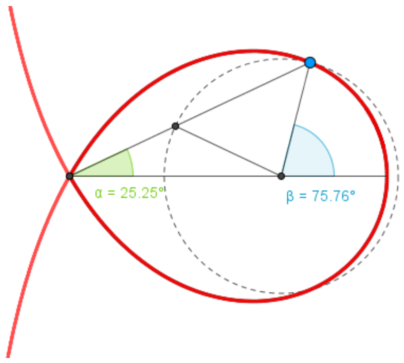
- Caracol de Pascal (1588-1651)



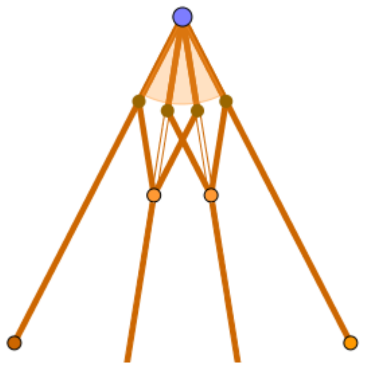
- Trisectriz de Ceva (1648-1736)



- Trisectriz de Maclaurin (1698-1746)



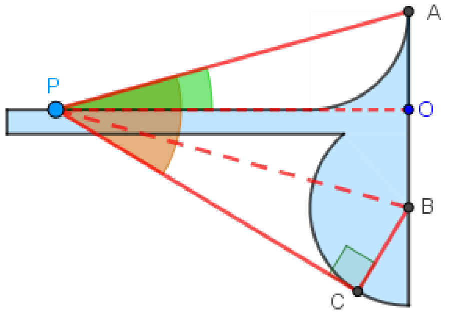
Mecanismos para trisecar un ángulo



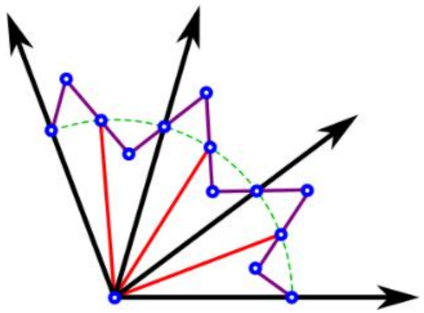
Compás de Descartes.

Compás de cuatro brazos con conexiones articuladas intermedias diseñadas de forma que mantengan iguales los tres ángulos.

Este dispositivo fue estudiado por René Descartes en 1629, según consta en su correspondencia con Isaac Beeckman.

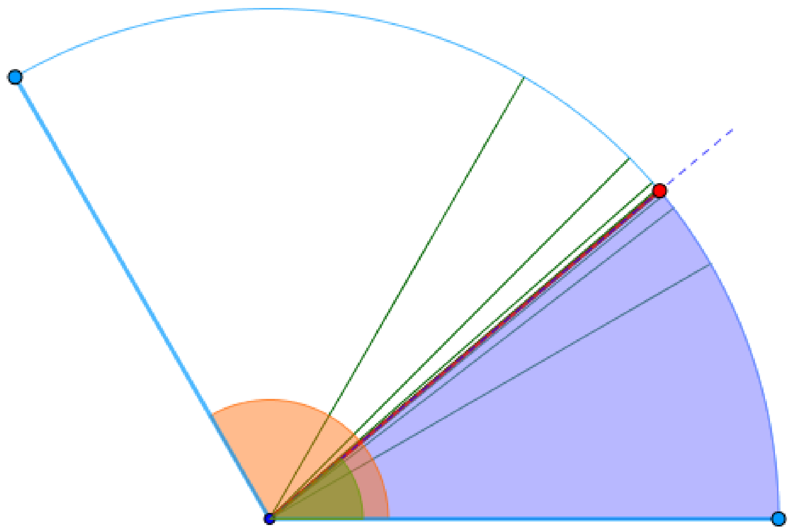


Posteriormente se construyeron otros mecanismos capaces de trisecar ángulos, como el trisector de Kempe y el abanico de Sylvester (imagen de la derecha).



Trisección mediante series

- Mediante la utilización de series que convergen a 1/3 puede aproximarse tanto como se desee la división de un ángulo en tres partes iguales.



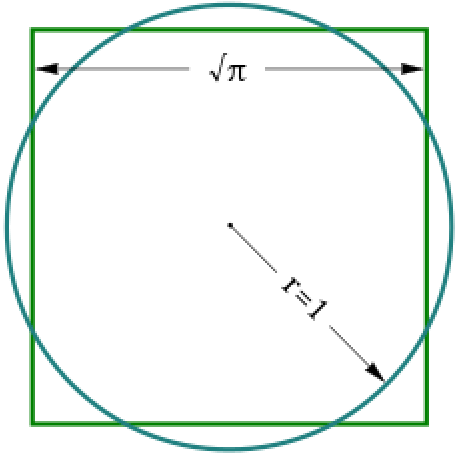
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots=\frac{1}{3}$$

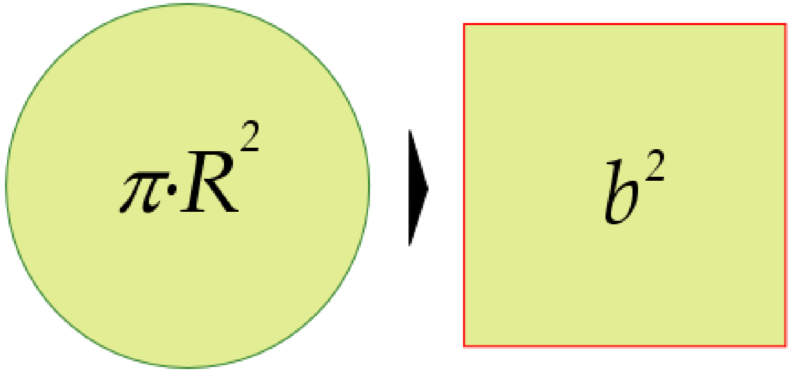
$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}}=\frac{1}{3}.\ \textit{Ramanujan}$$

3. Cuadratura del círculo

- El problema geométrico consiste en construir un cuadrado de igual área a un círculo dado utilizando regla y compás mediante un número finito de pasos.

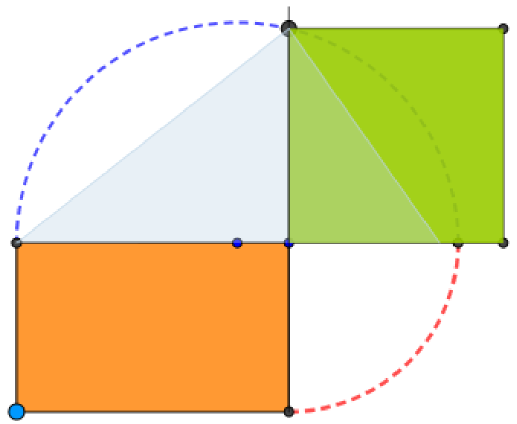


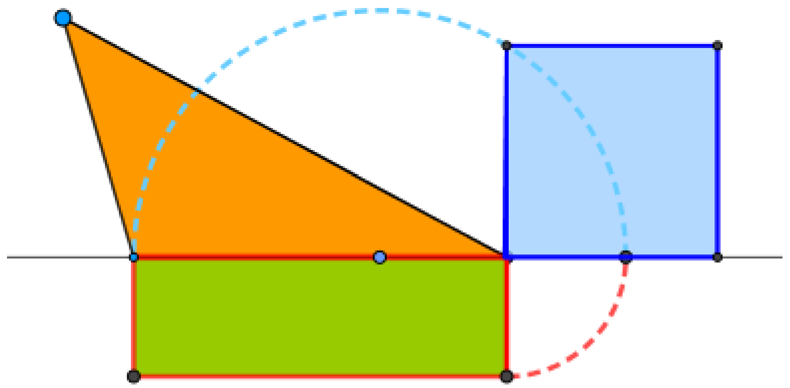
- Es un problema equivalente a la **rectificación de la circunferencia**, es decir, a la construcción de un segmento recto con la misma longitud que una circunferencia dada.



Cuadratura de figuras planas

Los geómetras griegos conocían perfectamente como cuadrar figuras planas: rectángulo, triángulo, y en general cualquier polígono.



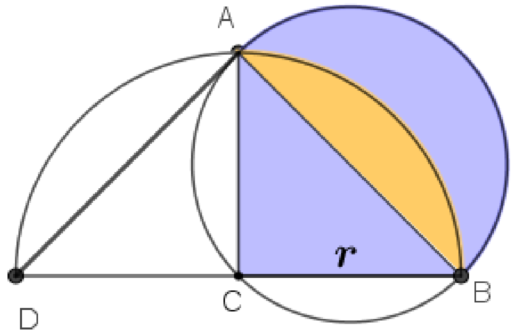


¿Será posible cuadrar figuras curvilíneas? Parece coherente empezar por la "más sencilla" cuadrando el círculo.

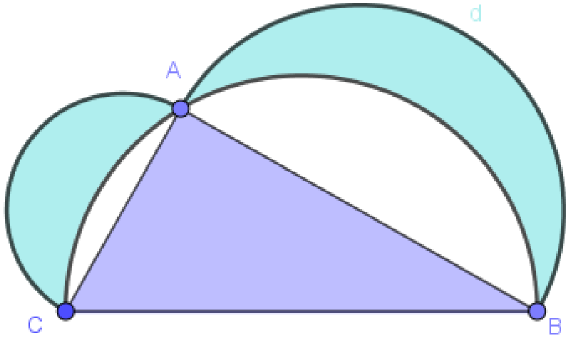
Comienza un largo y fructuoso camino.

Cuadratura de Lúnulas

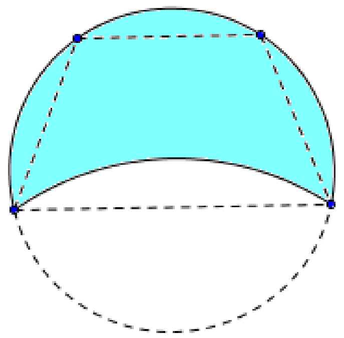
- Lúnula de Hipócrates

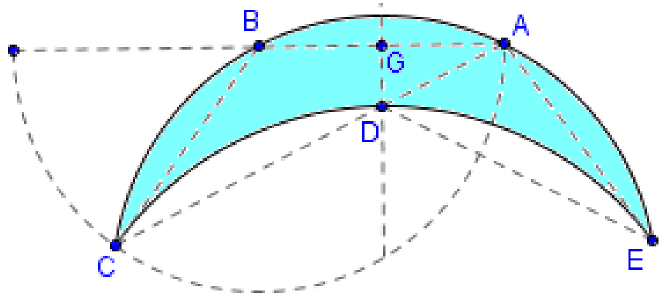


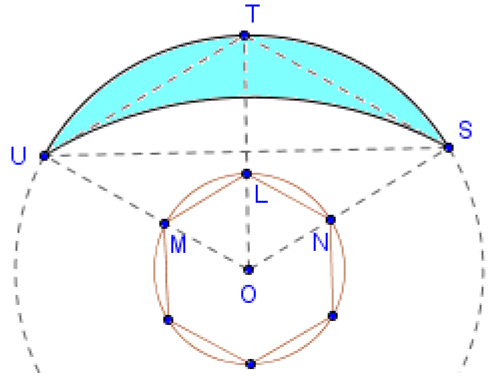
- Lúnulas de Alhacén (945-1040)



- Otras lúnulas que pueden cuadrarse (Euler)

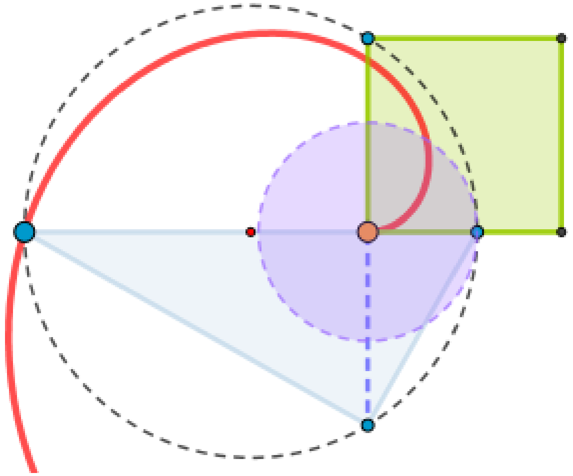


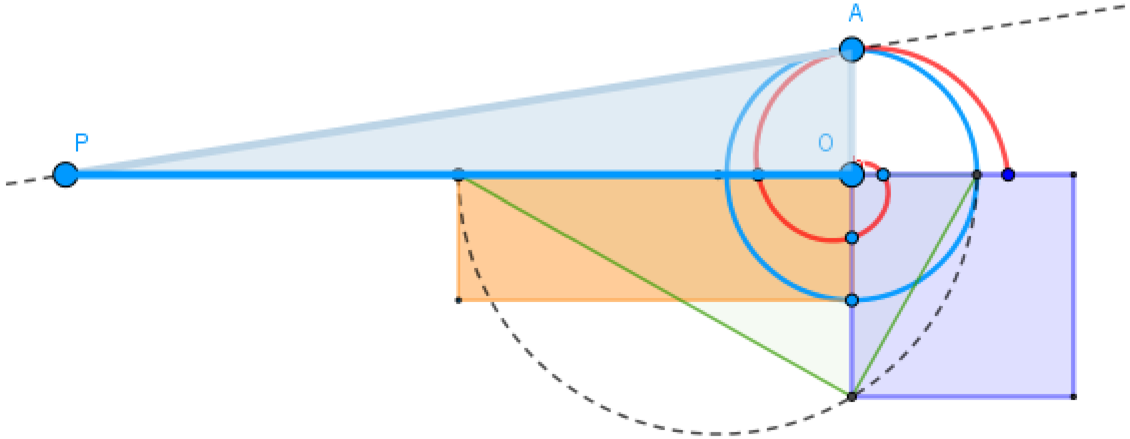




Espiral de Arquímedes

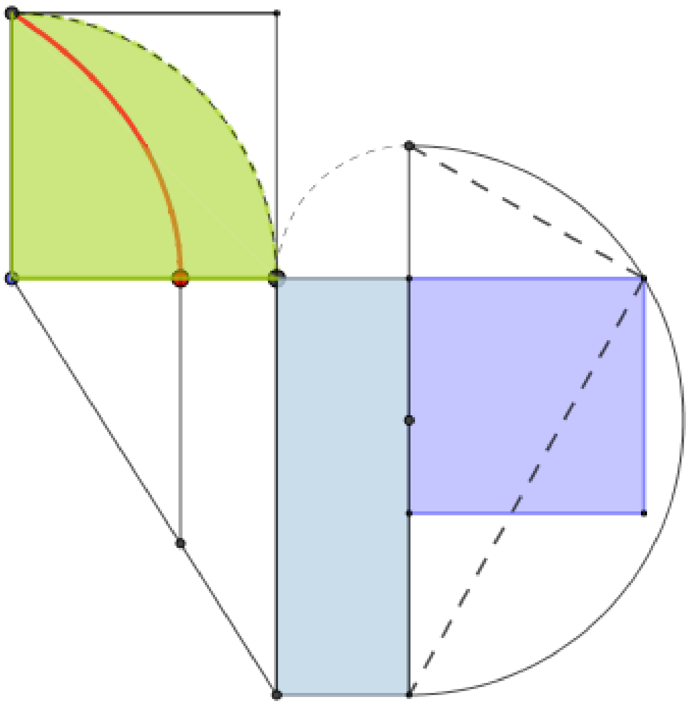
- La espiral de Arquímedes, aparte de trisecar el ángulo, permite también cuadrar el círculo al menos con dos razonamientos diferentes.





Cuadratriz de Hipias

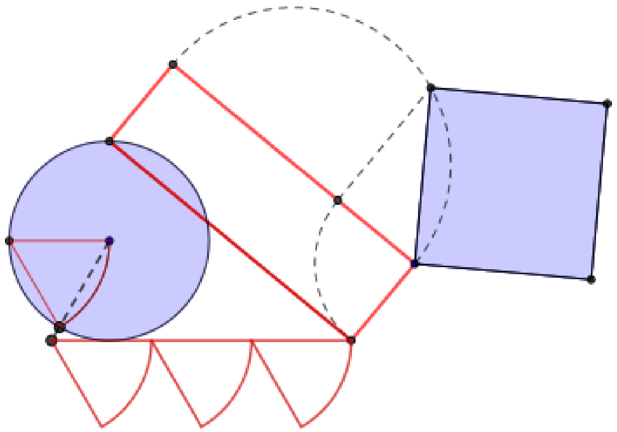
- Dinostrato (390-320 a.C.) unos 100 años después de la construcción de la trisectriz de Hipias, demuestra que esta curva permite la cuadratura del círculo.



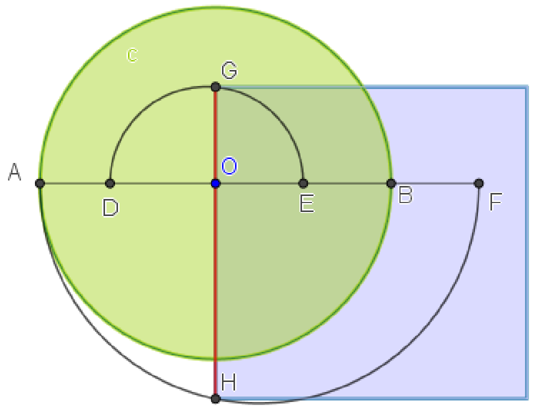
- Actualmente la curva se conoce también como cuadratriz de Hipias.

- Las áreas coloreadas son iguales.

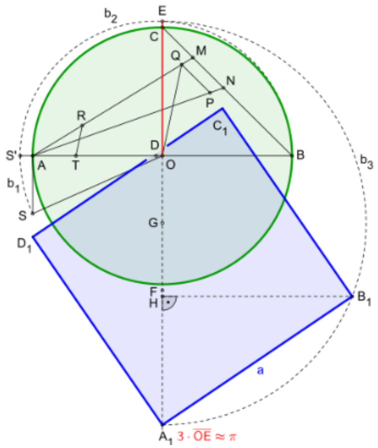
Cuadraturas aproximadas (con regla y compás)



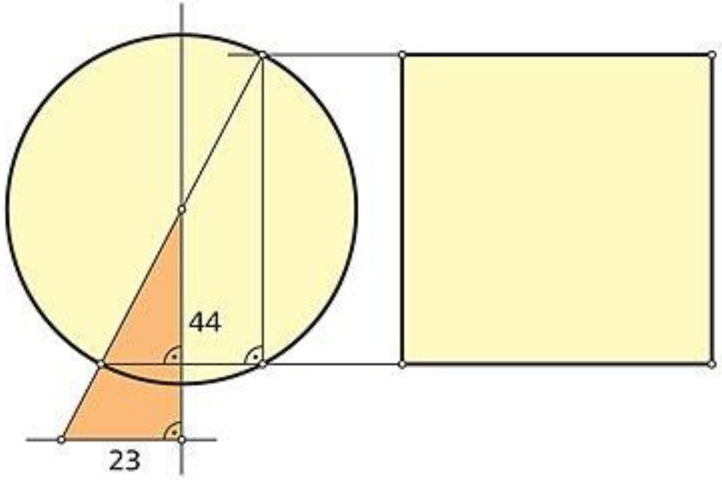
Adam Kochański 1695



E.W Hobson 1913



Ramanujan 1914.



Louis Loynes 1961.

Imposibilidad de resolución de los tres problemas

- Carl Friedrich Gauss y Évariste Galois realizaron un trabajo preliminar importante, en el que se basó Pierre Wantzel para encontrar la prueba final de la imposibilidad de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo en el año 1837.

- La prueba de la imposibilidad de cuadrar el círculo la proporcionó en el año 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann al demostrar la trascendencia del número π.

¡Muchas gracias por su atención!

Jose Manuel Arranz

josemarranz@gmail.com

geogebra.org/u/arranz