$y = a^x$

Esponenziali
e
Logaritmi

$y = \log_a x$

1 PRELIMINARI E RICHIAMI **- 1 -**

1.1 POTENZA CON ESPONENTE INTERO **- 1 -**
1.2 PROPRIETÀ DELLE POTENZE **- 1 -**
1.3 POTENZA CON ESPONENTE RAZIONALE **- 2 -**
1.4 POTENZA CON ESPONENTE REALE **- 2 -**

2 I LOGARITMI **- 3 -**

2.1 DEFINIZIONE DI LOGARITMO **- 3 -**
2.1.1 ESERCIZI - 4 -
2.1.2 ESERCIZI - 4 -
2.1.3 ESERCIZI - 4 -
2.2 PROPRIETÀ DEI LOGARITMI **- 5 -**
2.2.1 ESERCIZI - 6 -
2.2.2 ESERCIZI - 6 -
2.2.3 ESERCIZI - 7 -

3 LA FUNZIONE LOGARITMICA **- 8 -**

4 LA FUNZIONE ESPONENZIALE **- 9 -**

5 EQUAZIONI ESPONENZIALI **- 11 -**

5.1 EQUAZIONI ESPONENZIALI ELEMENTARI **- 11 -**
5.1.1 ESERCIZI - 12 -
5.1.2 ESERCIZI - 12 -
5.2 EQUAZIONI ESPONENZIALI PARTICOLARI **- 13 -**
5.2.1 ESERCIZI - 13 -

6 EQUAZIONI LOGARITMICHE **- 14 -**

6.1 EQUAZIONI LOGARITMICHE ELEMENTARI **- 14 -**
6.1.1 ESERCIZI - 14 -
6.2 EQUAZIONI LOGARITMICHE PARTICOLARI **- 15 -**
6.2.1 ESERCIZI - 15 -

7 APPLICAZIONI **- 16 -**

8 NOTE STORICHE **- 21 -**

1 Preliminari e richiami

Oggi esistono calcolatrici e computer e non ci si rende conto di quanto sia importante fare i calcoli rapidamente ed in modo preciso.
Quando Nepero inventò i logaritmi i matematici contemporanei dissero che era stata loro regalata la metà della vita: infatti l'occupazione principale dei matematici e soprattutto di quelli che si occupavano di astronomia ed astrologia (cioè di quasi tutti) era quella di calcolare la posizione dei pianeti, nel presente, nel passato e nel futuro e l'espressione "calcoli astronomici" non era certo un modo di dire.
Con i logaritmi è possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni vengono molto semplificate.
A questo aggiungiamo che i nostri sensi sono "logaritmici": se ad esempio ascoltiamo un suono e sentiamo poi un altro suono che ci sembra di intensità doppia, misurandolo vediamo che ha intensità quattro volte superiore, la stessa cosa se vediamo una luce; se vediamo un'altra luce che ci sembra 3 volte più forte e la misuriamo troviamo che è 9 volte più forte; cioè i nostri sensi sono in scala logaritmica, cosa che ci permette di poter avere uno spettro di sensazioni molto più ampio di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari.
La risposta logaritmica della nostra vista ad un segnale luminoso ci permette di vedere le stelle in una notte buia senza rimanere abbagliati da un paesaggio illuminato dal sole in pieno giorno. La risposta logaritmica dell'udito ci permette di ascoltare il fruscio delle foglie in una giornata di leggera brezza ma anche di sentire senza danni il rombo di un aereo che decolla.

1.1 Potenza con esponente intero

La potenza non è altro che una moltiplicazione ripetuta: se devo moltiplicare 5 sette volte, invece di scrivere $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ è più comodo scrivere 5^7 quindi $5^7 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.
Il 5 si chiama base, il 7 si chiama esponente e 5^7 si chiama potenza.

In generale:

Si definisce **potenza** ennesima del numero a e si indica con la simbologia a^n il prodotto di n fattori tutti uguali ad a. I numeri a ed n si dicono rispettivamente **base** ed **esponente** della potenza a^n.

Convenzionalmente si pone $a^1 = a$.

1.2 Proprietà delle potenze

Per le potenze valgono le seguenti proprietà:

» il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti: $a^n\, a^m = a^{n+m}$
ad esempio $3^5\, 3^2 = 3^{5+2} = 3^8$

» e viceversa $a^{n+m} = a^n\, a^m$ ad esempio $3^8 = 3^{5+2} = 3^5\, 3^2$

» il prodotto di due potenza con lo stesso esponente è uguale ad una potenza che ha come base il prodotto delle basi e come esponente lo stesso esponente: $a^n\, b^n = (ab)^n$
ad esempio $2^5\, 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$

» e viceversa $(ab)^n = a^n\, b^n$ ad esempio $6^5 = (2\cdot 3)^5 = 2^5\, 3^5$

» il quoziente tra due potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti: $a^n : a^m = a^{n-m}$
ad esempio $4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$

» e viceversa $a^{n-m} = a^n : a^m$ ad esempio $4^3 = 4^{5-2} = 4^5 : 4^2$

» il quoziente tra due potenze con lo stesso esponente è uguale ad una potenza che ha come base il rapporto tra le due basi e come esponente lo stesso esponente: $a^n : b^n = (a : b)^n$
ad esempio $6^5 : 3^5 = (6 : 3)^5 = 2^5$

» e viceversa $(a : b)^n = a^n : b^n$ ad esempio $2^5 = (6 : 3)^5 = 6^5 : 3^5$

» la potenza di una potenza è ancora una potenza che ha come base la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti: $(a^n)^m = (a)^{nm}$
ad esempio $(2^5)^3 = 2^{5\cdot 3} = 2^{15}$

» e viceversa $(a)^{nm} = (a^n)^m$ ad esempio $2^{15} = 2^{5\cdot 3} = (2^5)^3$

Per fare in modo che le proprietà della divisione valgano anche nel caso in cui l’esponente del dividendo sia uguale o minore a quello del divisore, è necessario definire convenzionalmente anche:

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \quad \text{in questi casi è necessario che sia } a \neq 0.$$

La scrittura 0^0 non ha significato.

1.3 Potenza con esponente razionale

Il concetto di potenza si può estendere, mantenendo inalterate le proprietà, definendo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{con } a \geq 0 \text{ e } n \text{ intero positivo.}$$

ad esempio $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$, in particolare $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Da notare che senza la condizione $a \geq 0$ è possibile incorrere in contraddizioni ed ambiguità.

Ad esempio si ha che $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$,

ma poiché $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ dovrebbe essere anche $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = +2$.

In alcuni casi particolari, hanno significato anche potenze ad esponente razionale a base negativa, ma occorre rinunciare alla validità di alcune proprietà.

1.4 Potenza con esponente reale

Il concetto di potenza si può ulteriormente estendere, mantenendo ancora inalterate le proprietà, anche al caso in cui l’esponente sia un generico numero reale, in questo caso si richiede che la base sia sempre positiva.

2 I logaritmi

2.1 Definizione di logaritmo

Consideriamo l'uguaglianza $2^3 = 8$, in essa ci sono tre elementi: 2, 3 e 8.

Se non conosco 8 allora l'uguaglianza diventa $2^3 = x$. Il calcolo che risolve questa equazione è l'elevamento a potenza $x = 2^3$.

Se non conosco 2 allora l'uguaglianza diventa $x^3 = 8$. Per risolvere questa equazione devo usare l'operazione di estrazione di radice $x = \sqrt[3]{8}$.

Se non conosco 3 allora l'uguaglianza diventa $2^x = 8$. Per risolvere questa equazione devo trovare l'esponente da dare a 2 per ottenere 8, questa è l'operazione di logaritmo.
Si scrive $x = \log_2 8$ e si legge logaritmo in base 2 di 8.

In generale:

Si dice **logaritmo** in base a ($a > 0$, $a \neq 1$) del numero b ($b > 0$) l'esponente che si deve alla **base** a per ottenere l'**argomento** b:

$$c = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Ad esempio:	$\log_2 8 = 3$	essendo $2^3 = 8$
	$\log_9 27 = \frac{3}{2}$	essendo $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 27$
	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$	essendo $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
In particolare:	$\log_a 1 = 0$	essendo $a^0 = 1$
	$\log_a a = 1$	essendo $a^1 = a$
	$\log_a a^c = c$	
	$\log_a \frac{1}{a} = -1$	essendo $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Come base di un logaritmo è possibile prendere qualunque numero, purché sia positivo e diverso da 1, ma fra le varie basi alcune hanno particolare importanza.

I **logaritmi decimali** (o di Briggs o volgari) hanno per base il numero 10, da cui il loro nome, e si indicano con **log** x (si omette la base).

I **logaritmi naturali** (o neperiani o di Nepero) hanno per base la costante numerica e (costante di Nepero o numero di Eulero) e si indicano con **ln** x.

I logaritmi a base 2 vengono usati spesso quando si parla del concetto di informazione.

Osservazione.
La definizione di logaritmo permette di affermare che ogni numero reale b si può scrivere, in modo unico, come potenza di un altro qualsiasi numero a positivo diverso da 1:

$$b = a^{\log_a b}$$

2.1.1 Esercizi

Risolvere la seguente equazione: $\log_2 x = 4$**.**
L'equazione, secondo la definizione di logaritmo, diventa $x = 2^4$, cioè $x = 16$.

Risolvere le seguenti equazioni:

1. $\log_4 x = 3$ $[64]$
2. $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$ $\left[\frac{1}{9}\right]$
3. $\ln x = 0$ $[1]$
4. $\log_2 x = -3$ $\left[\frac{1}{8}\right]$
5. $\log_9 x = \frac{1}{2}$ $[3]$
6. $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ $[4]$
7. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ $[8]$
8. $\log x = -1$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

2.1.2 Esercizi

Calcolare la base del seguente logaritmo: $\log_x 9 = 2$**.**
L'equazione, secondo la definizione di logaritmo, diventa $x^2 = 9$, che ha come soluzioni $x = \pm 3$.
Il valore $x = -3$ non è però accettabile per l'equazione data, perché la base del logaritmo deve essere positiva, quindi l'unica soluzione è $x = +3$.

Calcolare la base dei seguenti logaritmi:

9. $\log_x 27 = 3$ $[3]$
10. $\log_x 32 = 5$ $[2]$
11. $\log_x \frac{1}{81} = -4$ $[3]$
12. $\log_x \frac{1}{25} = -2$ $[5]$
13. $\log_x \frac{1}{4} = 2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
14. $\log_x 2 = \frac{1}{3}$ $[8]$
15. $\log_x \sqrt{3} = 1$ $[\sqrt{3}]$
16. $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$ $[27]$
17. $\log_x \frac{8}{27} = 3$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
18. $\log_x \frac{1}{32} = -5$ $[2]$
19. $\log_x \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$ $[7]$

2.1.3 Esercizi

Calcolare il valore del logaritmo: $\log_3 81$**.**
L'equazione da risolvere è $x = \log_3 81$ che, secondo la definizione di logaritmo, significa $3^x = 81$.
Devo cioè trovare l'esponente da assegnare a 3 per ottenere 81.
Se non riesco a trovarlo mentalmente, scompongo il numero 81.

Poiché $81 = 3^4$, l'esponente è 4, quindi $\log_3 81 = 4$.

Calcolare il valore dei seguenti logaritmi:

20. $\log_5 125$ $[3]$

21. $\log_7 49$ $[2]$

22. $\log_4 4$ $[1]$

23. $\log_3 1$ $[0]$

24. $\log 1000$ $[3]$

25. $\ln e$ $[1]$

26. $\log_2 \frac{1}{16}$ $[-4]$

27. $\ln 1$ $[0]$

28. $\log 0$ $[imp]$

29. $\log_3 \frac{1}{9}$ $[-2]$

30. $\log 0{,}01$ $[-2]$

31. $\log_9 3$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

32. $\log_4 8$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

33. $\log_{\frac{1}{2}} 8$ $[-3]$

34. $\log_{\frac{1}{7}} 49$ $[-2]$

35. $\log_{\frac{1}{9}} 3$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

36. $\log_2 -8$ $[imp]$

2.2 Proprietà dei logaritmi

Poiché il logaritmo è l'esponente di una potenza, per esso sono valide proprietà analoghe a quelle delle potenze:

» il logaritmo del prodotto di fattori positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

ad esempio $\log_2 15 = \log_2 5 + \log_2 3$

» e viceversa $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ ad esempio $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 15$

» il logaritmo di un quoziente di numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

ad esempio $\log_3 7 = \log_3 14 - \log_3 2$

» e viceversa $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ ad esempio $\log_3 14 - \log_3 2 = \log_3 7$

» il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base:

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

ad esempio $\log 16 = 2 \log 4$

» e viceversa $c \log_a b = \log_a b^c$ ad esempio $2 \log 4 = \log 16$

» il logaritmo in base *a* di un numero *b* è uguale al rapporto tra il logaritmo del numero *b* in un'altra base *c* e il logaritmo della base *a* nella base *c*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{(formula del cambiamento di base)}$$

ad esempio $\log_4 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 4}$

» e viceversa $\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$ ad esempio $\dfrac{\log 7}{\log 4} = \log_4 7$

Sfruttando questa ultima proprietà è quindi possibile determinare con la calcolatrice scientifica il valore di un logaritmo in una base qualsiasi.

2.2.1 Esercizi

Ridurre la seguente espressione ad un unico logaritmo: $2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8$.

Applicando la terza proprietà dei logaritmi $\log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 8$,

applicando la prima proprietà dei logaritmi $\log_3 (4^2 \cdot 5) - \log_3 8$,

applicando la seconda proprietà dei logaritmi $\log_3 \dfrac{4^2 \cdot 5}{8} = \log_3 10$.

Ridurre le seguenti espressioni ad un unico logaritmo:

37. $\log_2 4 + \dfrac{1}{2}\log_2 9$ $\quad [\log_2 12]$

38. $\log_5 7 - \log_5 21 + 3\log_5 6$ $\quad [\log_5 72]$

39. $2\log a - 3\log b + \dfrac{1}{3}\log c$ $\quad \left[\log \dfrac{a^2 \sqrt[3]{c}}{b^3}\right]$

40. $\ln(a+b) - \dfrac{1}{2}\ln(a-b) + 3\ln a$ $\quad \left[\ln \dfrac{a^3(a+b)}{\sqrt{a-b}}\right]$

2.2.2 Esercizi

Calcolare il valore della seguente espressione: $\log_4 \dfrac{16}{\sqrt{4}}$.

1° metodo: Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_4 \frac{16}{\sqrt{4}} = \log_4 16 - \frac{1}{2}\log_4 4 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2° metodo: Applicando le proprietà delle potenze

$$\log_4 \frac{16}{\sqrt{4}} = \log_4 \frac{4^2}{4^{\frac{1}{2}}} = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

Calcolare il valore delle seguenti espressioni:

41. $3\log_2 4 - \log_2 8$ $\quad [3]$

42. $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2}$ $\quad [2]$

43. $2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$ $[1]$

44. $\log_4 \dfrac{16}{2} - \log_5 \sqrt{5^3}$ $[0]$

45. $\log_3 \dfrac{3\sqrt{27}}{\sqrt[3]{3^5}}$ $\left[\dfrac{5}{6}\right]$

46. $\log_3 \sqrt{27\sqrt{3}}$ $\left[\dfrac{7}{4}\right]$

2.2.3 Esercizi

Usando la calcolatrice scientifica, calcolare: $\log_2 7$ **.**

Applicando la formula del cambiamento di base $\log_2 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} = 2{,}8073592...$

Usando la calcolatrice scientifica, calcolare:

47. $\ln 5$ $[1{,}609437912]$

48. $\ln\sqrt{2}$ $[0{,}34657359]$

49. $\log 1{,}7$ $[0{,}230448921]$

50. $\log 0{,}005$ $[-2{,}301029996]$

51. $\log_4 21$ $[2{,}196158711]$

52. $\log_3 100$ $[4{,}191806549]$

53. $\log_2 0{,}3$ $[-1{,}736965594]$

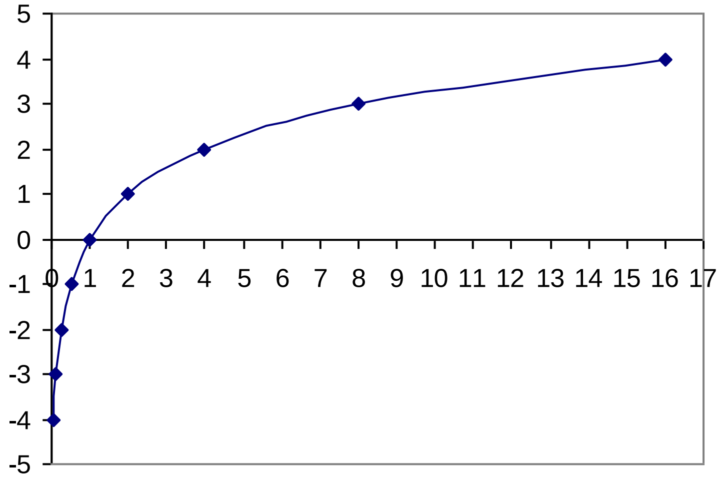
54. $\log_{0,1} 2$ $[-0{,}301029996]$

3 La funzione logaritmica

Se a è un numero positivo diverso da 1, la funzione $y = \log_a x$ viene chiamata **funzione logaritmica elementare**.

Calcoliamo qualche valore per $a = 2$ e costruiamo il grafico per punti di $y = \log_2 x$.

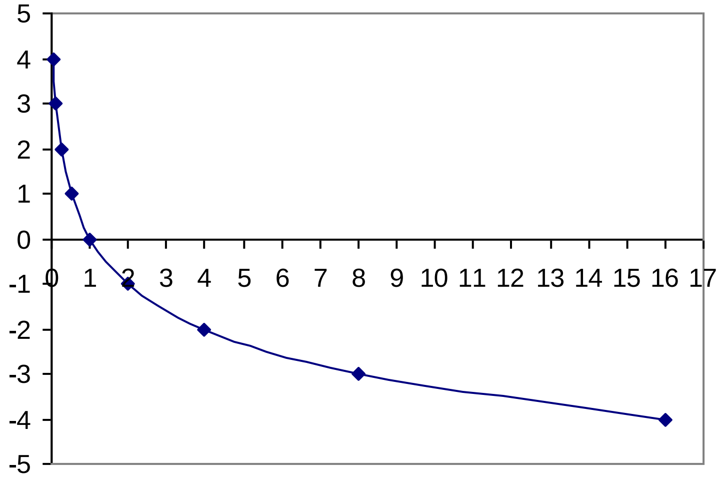
x	$y = \log_2 x$
$^1/_{16}$	$\log_2 {}^1/_{16} = -4$
$^1/_8$	$\log_2 {}^1/_8 = -3$
$^1/_4$	$\log_2 {}^1/_4 = -2$
$^1/_2$	$\log_2 {}^1/_2 = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$
8	$\log_2 8 = 3$
16	$\log_2 16 = 4$



Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ con base $a > 1$.

Calcoliamo qualche valore per $a = {}^1/_2$ e costruiamo il grafico per punti di $y = \log_{½} x$.

x	$y = \log_{½} x$
$^1/_{16}$	$\log_{0,5} {}^1/_{16} = 4$
$^1/_8$	$\log_{0,5} {}^1/_8 = 3$
$^1/_4$	$\log_{0,5} {}^1/_4 = 2$
$^1/_2$	$\log_{0,5} {}^1/_2 = 1$
1	$\log_{0,5} 1 = 0$
2	$\log_{0,5} 2 = -1$
4	$\log_{0,5} 4 = -2$
8	$\log_{0,5} 8 = -3$
16	$\log_{0,5} 16 = -4$



Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$ di base $0 < a < 1$.

Osserviamo che la funzione logaritmica $y = \log_a x$
- è definita solo se $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$
- può assumere qualsiasi valore
- si annulla sempre e solo quando $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$)
- $\log_a b = \log_a c$ se e solo se $b = c$

Se la base è $a > 1$
- è sempre crescente
- è positiva quando $x > 1$
- è negativa quando $0 < x < 1$
- per x che tende a $+\infty$, la y tende a $+\infty$
- per x che tende a 0^+, la y tende a $-\infty$
- $\log_a b < \log_a c$ se e solo se $b < c$

Se la base è $0 < a < 1$
- è sempre decrescente
- è positiva quando $0 < x < 1$
- è negativa quando $x > 1$
- per x che tende a $+\infty$, la y tende a $-\infty$
- per x che tende a 0^+, la y tende a $+\infty$
- $\log_a b < \log_a c$ se e solo se $b > c$

4 La funzione esponenziale

In generale si dice **funzione esponenziale** una funzione in cui la variabile compare ad esponente.

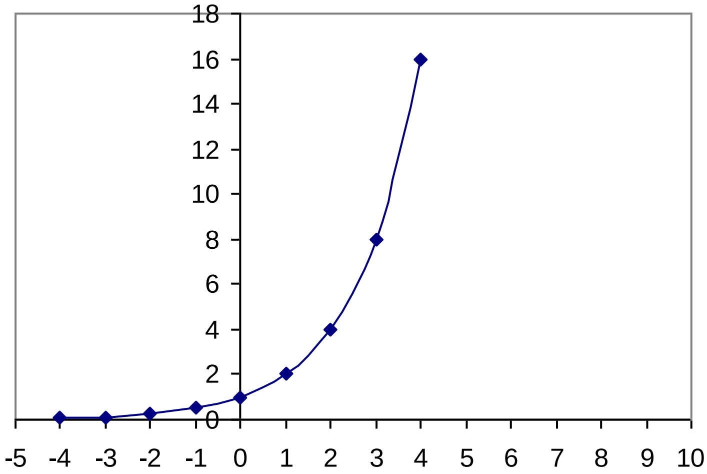
Ad esempio $y = 4^{(1-3x)}$ è una funzione esponenziale a base costante; $y = \left(1+x^2\right)^{x-1}$ è una funzione esponenziale a base variabile.

La **funzione esponenziale elementare** è un funzione del tipo $y = a^x$ (con $a > 0$ e $a \neq 0$).

Ad esempio, sono esponenziali elementari le funzioni $y = 7^x$; $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

Calcoliamo qualche valore per $a = 2$ e costruiamo il grafico per punti di $y = 2^x$.

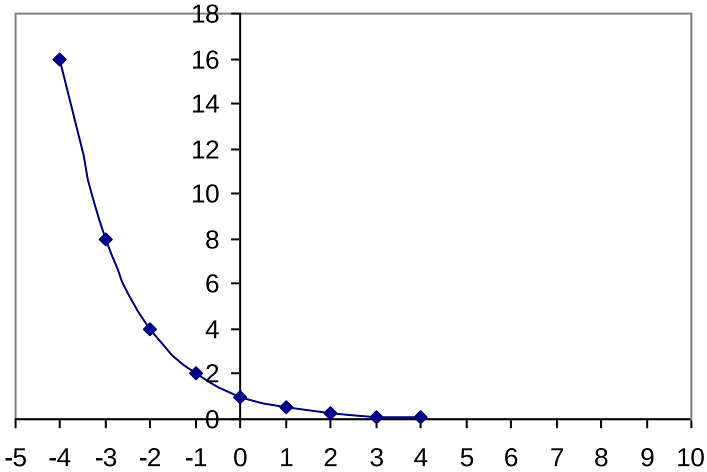
x	$y = 2^x$
-4	$2^{-4} = {}^1/_{16}$
-3	$2^{-3} = {}^1/_8$
-2	$2^{-2} = {}^1/_4$
-1	$2^{-1} = {}^1/_2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$



Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni esponenziali $y = a^x$ con base $a > 1$.

Calcoliamo qualche valore per $a = {}^1/_2$ e costruiamo il grafico per punti di $y = ({}^1/_2)^x$.

x	$y = ({}^1/_2)^x$
-4	$({}^1/_2)^{-4} = 16$
-3	$({}^1/_2)^{-3} = 8$
-2	$({}^1/_2)^{-2} = 4$
-1	$({}^1/_2)^{-1} = 2$
0	$({}^1/_2)^0 = 1$
1	$({}^1/_2)^1 = {}^1/_2$
2	$({}^1/_2)^2 = {}^1/_4$
3	$({}^1/_2)^3 = {}^1/_8$
4	$({}^1/_2)^4 = {}^1/_{16}$



Questo tipo di grafico è comune a tutte le funzioni esponenziali $y = a^x$ con base $0 < a < 1$.

Osserviamo che la funzione esponenziale $y = a^x$
- è definita solo se $a > 0$ e $a \neq 0$
- assume sempre e solo valori positivi
- interseca l'asse y sempre nel valore 1
- $a^b = a^c$ se e solo se $b = c$

Se la base è $a > 1$
- è sempre crescente
- per ogni $x > 0$ è sempre $y > 1$
- per ogni $x < 0$ è sempre $y < 1$
- per x che tende a $+\infty$, la y tende a $+\infty$
- per x che tende a $-\infty$, la y tende a 0^+
- $a^b < a^c$ se e solo se $b < c$

Se la base è $0 < a < 1$
- è sempre decrescente
- per ogni $x > 0$ è sempre $y < 1$
- per ogni $x < 0$ è sempre $y > 1$
- per x che tende a $+\infty$, la y tende a 0^+
- per x che tende a $-\infty$, la y tende a $+\infty$
- $a^b < a^c$ se e solo se $b > c$

Il grafico della funzione $y = a^x$ (con a maggiore di 0 e diverso da 1) si chiama **curva esponenziale**.

Particolarmente interessante è la funzione esponenziale a base *e* (costante di Nepero o numero di Eulero) $y = e^x$.
In diverse leggi naturali, fisiche, statistiche, … le grandezze sono legate tra loro da funzioni di tipo esponenziale o logaritmico a base e, funzioni che godono anche di particolari proprietà matematiche.

Non è casuale che i grafici e alcune caratteristiche della funzione logaritmica e della funzione esponenziale siano simili oppure opposti, infatti sono funzioni l’una inversa dell’altra.

5 Equazioni esponenziali

Si chiama **equazione esponenziale** ogni equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una o più potenze.
Ad esempio sono equazioni esponenziali: $2^x = 1$; $4^{2x} = 8^{x+1}$; $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

5.1 Equazioni esponenziali elementari

Il caso più semplice di equazione esponenziale è l'equazione

$$a^x = b$$

detta equazione esponenziale elementare.
Si osserva, prima di tutto, che nell'insieme dei numeri reali tale equazione può avere soluzioni solo se $a > 0$ e $b > 0$. Infatti:
- il primo membro è una potenza a esponente reale, quindi ha significato solo se a è positivo;
- a^x è sempre positiva per ogni valore di x, pertanto anche b deve essere positivo.

Nell'ipotesi a > 0, b > 0, esaminiamo alcuni casi particolari:
- se $a = 1$ e $b = 1$, l'equazione diventa $x = 1$ che è un'identità;
- se $a = 1$ e $b \neq 1$, si ha l'equazione $1 = b$ ($\neq 1$), che è impossibile;
- se $a \neq 1$ e b = 1, si ha l'equazione $a^x = 1$, che ammette la soluzione $x = 0$ ($a^0 = 1$)

Per gli altri casi, in cui a e b sono entrambi positivi e diversi da 1, l'equazione ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione è
- positiva se a e b sono entrambi maggiori di 1 o entrambi minori di 1;
- negativa se dei due numeri a e b uno è maggiore di 1 e l'altro minore di 1;
- uguale a 0 se $b = 1$ e $a > 0$.

Esempi

L'equazione: $3^x = 9$ ha per soluzione $x = 2$.

L'equazione: $3^x = \frac{1}{9}$ ha per soluzione $x = -2$.

L'equazione: $3^x = 1$ ha per soluzione $x = 0$.

L'equazione: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ ha per soluzione $x = 0$.

L'equazione: $3^x = -9$ non ha soluzione.

Se è possibile esprimere ambo i membri dell'equazione come potenze di una stessa base

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

l'equazione si riconduce alla $f(x) = g(x)$ che si risolve con i metodi usuali.
Ad esempio: $2^{x-1} = 8$ si può scrivere come $2^{x-1} = 2^3$, uguagliando gli esponenti si ottiene l'equazione $x - 1 = 3$ che ha come soluzione $x = 4$.

Se l'equazione non è riconducibile all'uguaglianza di due potenze con la stessa base, occorre utilizzare il calcolo logaritmico.
Ad esempio: $2^x = 5$, per la definizione di logaritmo, si risolve con $x = \log_2 5$.

Se l'equazione si può scrivere nella forma

$$a^{f(x)} = b^{g(x)},$$

sfruttando le proprietà della funzione logaritmo, possiamo scrivere $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}$ (con c qualunque) da cui $f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$, risolvibile con i metodi noti.

Questa tecnica è applicabile anche al caso $k \cdot a^{f(x)} = h \cdot b^{g(x)}$, che si può ricondurre alla $\log k + f(x) \log_c a = \log h + g(x) \log_c b$.

Onde evitare possibili errori quando si considerano i logaritmi di entrambi i membri di un'equazione occorre fare attenzione al fatto che questi devono essere positivi; in caso contrario l'equazione va discussa in altro modo.

5.1.1 Esercizi

Risolvere l'equazione: $4^{2x} = 8^{x+1}$.
Sia 4 che 8 sono potenze di 2, quindi l'equazione si può scrivere come $2^{4x} = 2^{3(x+1)}$.
Avendo ottenuto l'uguaglianza di due potenze con la stessa base, uguagliamo gli esponenti ottenendo l'equazione $4x = 3(x+1)$ che ha come soluzione $x = 3$.

Risolvere le seguenti equazioni:

55. $3^x = \frac{1}{27}$ $\quad [-3]$

56. $\frac{1}{4^x} = \sqrt{2}$ $\quad \left[-\frac{1}{4}\right]$

57. $3^{\sqrt{x}} = 243$ $\quad [25]$

58. $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \frac{9}{2}$

59. $7^{x+2} = 49 \cdot 7^{2x-3}$ $\quad [3]$

60. $25^{4x-3} \cdot 5^{7x-2} = 5^{3x+4}$ $\quad [1]$

61. $5^3 \cdot 5^{x+1} = 64 \cdot 2^{x-2}$ $\quad [-4]$

62. $8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16$ $\quad [3]$

63. $5 \cdot 2^x - 18 = 2^{x-1}$ $\quad [2]$

5.1.2 Esercizi

Risolvere l'equazione: $3^{2x+1} = 5 \cdot 2^{3x}$
Applichiamo i logaritmi ad entrambi i membri: $\log 3^{2x+1} = \log\left(5 \cdot 2^{3x}\right)$.
Applichiamo le proprietà dei logaritmi: $(2x+1)\log 3 = \log 5 + 3x \log 2$.
Risolvendo l'equazione (i log rimasti sono costanti) troviamo $x = \frac{\log 5 - \log 3}{\log 9 - \log 8}$.

Risolvere le seguenti equazioni:

64. $5^x - 12 = 0$ $\quad [\log_5 12]$

65. $3^{x+1} = 12$ $\quad [\log_3 4]$

66. $4^x = 7^x$ $\quad [0]$

67. $5 \cdot 3^x = 7$ $\quad [\log_3 7 - \log_3 5]$

68. $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\quad \left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$

69. $7 \cdot 3^{2x+1} = 3 \cdot 49^{x+1}$ $\left[\dfrac{\log 7}{\log 9 - \log 49}\right]$

5.2 *Equazioni esponenziali particolari*

Se l'equazione non è elementare, occorre utilizzare il calcolo algebrico per riportare la risoluzione dell'equazione data a quella di una o più equazioni elementari.

5.2.1 Esercizi

Risolvere l'equazione: $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$
Ponendo $t = 2^x$ si ottiene l'equazione $t^2 - 9t + 8 = 0$ che ha come soluzioni $t = 1$ e $t = 8$.
Ora risolviamo le due equazioni esponenziali elementari $2^x = 1$ e $2^x = 8$.
Troviamo rispettivamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ che sono le soluzioni dell'equazione data.

Risolvere le seguenti equazioni:

70. $9^x + 3^x = 90$ $[2]$

71. $4^x = 2^x - 2$ $[imp]$

72. $2^x + 2^{3-x} = 6$ $[1; 2]$

73. $2^{x+1} - \dfrac{6}{2^{x-1}} = 10$ $[\log_2 6]$

6 Equazioni logaritmiche

Una **equazione logaritmica** è una equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di un logaritmo.
Ad esempio è una equazioni logaritmica $\log(19x+1) = 1 + \log(3-x)$.

In questo tipo di equazioni è importante tenere presente le condizioni di esistenza per selezionare le soluzioni accettabili. Per fare ciò ci sono due metodi:

- Risolvere il sistema di disequazioni ottenute imponendo positivo l'argomento di ogni logaritmo; si ottiene così il campo di esistenza dell'equazione quindi tutte le soluzioni dell'equazione che non appartengono a questo insieme vanno scartate.
- Dopo aver risolto l'equazione, sostituire nel testo le soluzioni, una alla volta, e controllare che i logaritmi siano validi; se anche uno solo degli argomenti non risulta positivo, la soluzione non è accettabile.

6.1 *Equazioni logaritmiche elementari*

Per la risoluzione di una equazione logaritmica si cerca, utilizzando le proprietà dei logaritmi, di trasformarla in una del tipo

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

che si riconduce alla $f(x) = g(x)$, oppure in una del tipo

$$\log_a f(x) = c$$

che si riconduce alla $f(x) = a^c$.

6.1.1 Esercizi

Risolvere l'equazione: $2\log(6x+1) = \log(4x+1) + \log(2x+1)$.

Applicando le proprietà dei logaritmi, l'equazione diventa $\log(6x+1)^2 = \log[(4x+1)(2x+1)]$

Avendo ottenuto una uguaglianza di due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$(6x+1)^2 = (4x+1)(2x+1)$ che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = -\dfrac{3}{14}$.

La seconda soluzione non è accettabile in quanto rende negativo l'argomento di almeno uno dei logaritmi dell'equazione data, pertanto l'unica soluzione dell'equazione è $x = 0$.

Risolvere l'equazione: $\log_3(x-1) - 2 = 0$.

Possiamo scrivere $\log_3(x-1) = 2$, quindi utilizzando la definizione di logaritmo: $x - 1 = 3^2$ che ha come soluzione $x = 10$, soluzione accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza dell'equazione data.

Risolvere le seguenti equazioni:

74. $\log_2(x-1) = 3$ $[9]$

75. $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 2$ $[3]$

76. $\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$ $[imp]$

77. $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$ $[\sqrt{2}]$

78. $\log(2x+3) - 2\log x = 0$ $[3]$

79. $\log(19x+1) = 1 + \log(3-x)$ $[1]$

80. $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - \log_2(x-2) = 3$ $[3; 5]$

81. $\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

82. $2\log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$ $[6]$

6.2 *Equazioni logaritmiche particolari*

Se l'equazione non è elementare, occorre utilizzare il calcolo algebrico per riportare la risoluzione dell'equazione data a quella di una o più equazioni elementari.

6.2.1 Esercizi

Risolvere l'equazione: $(\log x - 2)\log x = 3$.

Svolgendo i calcoli si ottiene $\log^2 x - 2\log x - 3 = 0$.

Nota: $\log^2 x = (\log x)^2$ che è diverso da $\log x^2 = \log(x^2)$.

Se poniamo $t = \log x$ l'equazione diventa $t^2 - 2t - 3 = 0$ che ha come soluzioni $t = -1$ e $t = 3$.

Ora risolviamo le due equazioni elementari $\log x = -1$ e $\log x = 3$ ottenendo $x_1 = \frac{1}{10}$ e $x_2 = 1000$, soluzioni entrambe accettabili.

Risolvere le seguenti equazioni:

83. $(4 - \log_2 x)\log_2 x = 3$ $[2; 8]$

7 Applicazioni

L'introduzione delle calcolatrici ha tolto importanza ai logaritmi come strumento di calcolo, ma le funzioni esponenziali e logaritmiche, e le rispettive nozioni di potenza ad esponente reale e di logaritmo, hanno assunto un ruolo importante in matematica e trovano numerose applicazioni non solo nell'ambito matematico o fisico ma anche in campi molto diversi tra loro come quello economico, chimico, biologico, geologico, archeologico, in generale dove capita di dover trattare grandezze che presentano ampie variazioni su un intervallo di diversi ordini di grandezza.

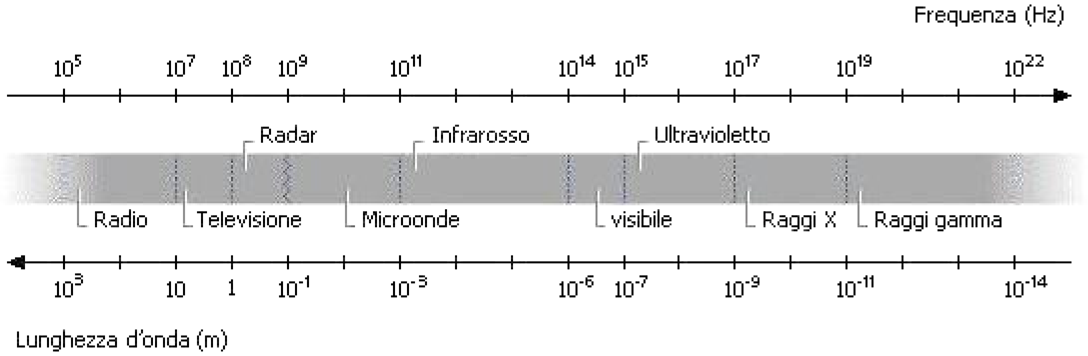
Ad esempio se una grandezza ha una variabilità che va da 1 a 10^{12} (1000 miliardi), il logaritmo decimale di tale grandezza varia solamente da 1 a 12. Ciò rende possibile la rappresentazione grafica di tale grandezza: basta mettere nel grafico, anziché la grandezza stessa, il suo logaritmo decimale.

Vediamo un esempio pratico: vogliamo rappresentare la storia della Terra su grafico, l'istante 0 è quello attuale, poi usiamo un'unità di misura di 1 cm per indicare un anno (in modo da dare una buona rappresentazione di tutti gli eventi che hanno caratterizzato gli anno), ma Cristo quando è nato? Circa 20 metri fa! E i dinosauri quando si sono estinti? L'estinzione dei Dinosauri nel nostro grafico sta a 650 km, dovremmo fare un foglio lungo quanto la distanza tra Milano e Roma.
Coi logaritmi è tutto più semplice: Cristo è nato circa 2000 anni fa, log 2000 = 3,30103 quindi la nascita di Cristo verrà messa a 3,3 cm. Per l'estinzione dei dinosauri avvenuta 65 milioni di anni fa abbiamo log 65000000 = 7,81291 e verrà messa a circa 7,8 cm.

Lo **spettro elettromagnetico** varia su diversi ordini di grandezza e tutte le bande di frequenza possono essere rappresentate soltanto con l'uso di una scala logaritmica.
Ad esempio consideriamo alcune frequenze:

	frequenza	log
Onde radio	1 MHz = 10^6 Hz	6
Ottico	500 THz = $5 \cdot 10^{14}$ Hz	14,7
Ultravioletti	10 PHz = 10^{16} Hz	16
Gamma	1 YHz = 10^{24} Hz	24

Come si vede la radiazione Gamma ha una frequenza molto alta, il problema della rappresentazione grafica si risolve con una scala logaritmica: ad esempio con unità pari ad 1 cm riusciremmo a sistemare queste frequenze su un asse lungo 24 cm.



Diverse sono le applicazioni delle **scale logaritmiche**; esse vengono usate ad esempio per compilare carte sulle quali è possibile disegnare grafici di funzioni aventi variazioni molto forti in corrispondenza di piccole variazioni della variabile o di funzioni aventi piccole variazioni anche per grandi variazioni della variabile indipendente (carte semilogaritmiche), oppure grafici di funzioni a forti variazioni e delle quali è richiesto l'andamento per un ampio intervallo della variabile (carte completamente logaritmiche).

Molte scale usate nelle scienze sono basate sui logaritmi.
In **sismologia** per descrivere gli effetti di un terremoto si usa la scala Richter, in base alla quale si calcola la magnitudo del terremoto con la formula:

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

dove E, in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto ed E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto.
E' importante sapere che la scala usata è logaritmica perché un terremoto di magnitudine 8 non è doppiamente più disastroso di uno di magnitudine 4; poiché si lavora sugli esponenti è circa 10000 volte più disastroso ($10^8 = 10000 \cdot 10^4$).

In **astronomia** la luminosità delle stelle ("magnitudine") viene calcolata in scala logaritmica.
Un astro di magnitudine 0 (Vega, nella costellazione della Lira) è 100 volte più luminoso di uno di magnitudine 5, ciò significa che si utilizza come base per i logaritmi la radice quinta di 100 cioè $10^{0,4}$ cha vale circa 2,512.
I numeri naturali utilizzati per la magnitudo sono perciò gli esponenti a cui occorre elevare tale base per calcolare la luminosità di una stella.
Cambiando la base e usando i più comodi logaritmi decimali, la magnitudo è data da:

$$M = -2{,}5\log\frac{F}{V}$$

dove F è il flusso di luce della stella; V è la luminosità di Vega e $2{,}5 = \frac{1}{0{,}4} = \frac{1}{\log 10^{0,4}}$.

In **chimica** il calcolo del pH è l'opposto del logaritmo in base 10 della concentrazione degli ioni idrogeno $[H^+]$.
Tale concentrazione permette di definire il grado di acidità o basicità della soluzione che può assumere dei valori appartenenti generalmente all'intervallo $[10^{-1}; 10^{-14}]$ che copre ben 14 ordini di grandezza. In questo caso anziché esprimere direttamente il valore della concentrazione si è preferito definire una nuova grandezza, indicata dal simbolo "pH" e definita dalla relazione:

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = \log\frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$$

Ne segue che il pH della maggior parte delle soluzioni che si incontrano in pratica è compreso tra 1 e 14 e che quanto più è basso il pH tanto più è acida la soluzione.
soluzione neutra $[H^+] = 10^{-7}$ moli/l pH = 7,0
soluzione acida $[H^+] > 10^{-7}$ moli/l pH < 7,0
soluzione basica $[H^+] < 10^{-7}$ moli/l pH > 7,0.
Risulta quindi più facile esprimersi in termini di pH rispetto all'effettiva concentrazione dello ione idrogeno.
Per esempio, una soluzione a pH = 1 ha una concentrazione di H^+ 100 volte superiore rispetto ad una soluzione a pH = 3.

In **fisica (acustica)** l'intensità fisica del suono si misura in W/m^2, ma esiste anche una intensità fisiologica del suono misurata in decibel (dB) e per passare da una misurazione all'altra si utilizza una formula logaritmica. Assunto convenzionalmente come intensità di riferimento il valore I_0=10^{-16}watt/cm^2 (soglia di udibilità dell'orecchio umano), la misura in decibel del livello dell'intensità sonora I è data da: $10\log_{10}\frac{I}{I_0}$.

Ad esempio, un amplificatore sonoro di intensità 100 dB, ha una intensità di 10^{-6}watt/cm^2; un suono di intensità 10^{-12}watt/cm^2 ha una intensità di 40dB.

In **musica** le note si distinguono l'una dall'altra per la frequenza; tra una nota musicale e la successiva, l'aumento di frequenza dell'onda sonora segue un andamento logaritmico crescente. L'ottavo suono di una scala musicale ha un numero di vibrazioni doppio rispetto a quello del primo suono (si chiama con lo stesso nome perché è lo stesso suono, ma più acuto), perciò usando i logaritmi in base 2, il numero risultante dalla differenza dei logaritmi delle frequenze di due note è l'intervallo tra le note espresso in ottave, perché 2 è il rapporto di frequenza dell'ottava. Se i logaritmi sono invece in base $2^{1/12}$ il numero risultante è l'intervallo espresso in semitoni.

In **fisica** la legge del decadimento di un corpo radioattivo ha una equazione esponenziale.
Le sostanze radioattive sono dei composti chimici costituiti da atomi che si decompongono spontaneamente in altri atomi non radioattivi. Se N è il numero degli atomi di una sostanza radioattiva all'istante t, la legge con cui varia è $N = N_0e^{-\lambda t}$.

Il tempo di dimezzamento $T½ = \frac{\ln 2}{\lambda}$ è una grandezza nota e può variare da pochi milionesimi di secondo (10^{-6} s) fino a circa 4,5 miliardi d'anni per l'uranio.
In **geologia**, scelta una sostanza con un tempo di dimezzamento dell'ordine di ere geologiche (come es. l'uranio-238 o l'uranio-235), è possibile, utilizzando questa legge, risalire al tempo trascorso dalla formazione delle rocce misurando le abbondanze relative a questi isotopi e del piombo (prodotto finale del decadimento).
Analogamente in **archeologia**, dove la scala temporale è dell'ordine dei millenni, scegliendo un isotopo con tempo di dimezzamento più opportuno come il carbonio-14 (T½ = 5730 anni) che è presente nei tessuti di ogni organismo vivente, è possibile datare materiali di origine organica (ossa, legno, fibre tessili, semi, carboni di legno).

In **finanziaria** alcuni regimi applicano formule esponenziali e logaritmiche per il calcolo dei tassi d'interesse.
Se si investe un capitale ad interesse composto, alla fine di ogni anno l'interesse accumulato va ad aggiungersi al capitale e produce anch'esso interessi. Se si indica con C il capitale iniziale, dopo n anni il montante accumulato è $M = C(1+i)^n$.

La funzione esponenziale è utile anche nello studio dei modelli che simulano la **crescita di popolazioni** di individui il cui numero dipende dal tempo. Se le risorse di vita sono illimitate si ottiene un andamento crescente della popolazione secondo una legge del tipo $N = N_0e^{\lambda t}$ con N numero di individui al tempo t.

In **fisica (termologia)** ad esempio, se si porta ad ebollizione l'acqua e poi si misura, ad intervalli regolari (per es. ogni due minuti) la temperatura T dell'acqua che si raffredda, le misurazioni effettuate seguono un andamento logaritmico decrescente.

In **chimica** la formula di Nernst, utilizzando i logaritmi, consente di determinare il potenziale di ossido-riduzione (potenziale redox) di soluzioni nelle quali le concentrazioni degli ioni presenti non sono quelle standard (1 molari).

In **geologia** si utilizzano i logaritmi per classificare i tipi di rocce che compongono la crosta terrestre. Si tratta delle cosiddette rocce detritiche o clastiche, cioè di quelle rocce che si sono formate per accumulo di frammenti di rocce preesistenti. La classificazione di queste rocce è basata fondamentalmente sulle dimensioni e sulla forma dei frammenti che le costituiscono. Le taglie di questi frammenti vengono ripartite in numerosi gruppi che sono detti classi granulometriche. Ogni classe granulometrica raggruppa in sé i frammenti di roccia le cui dimensioni sono comprese fra due valori limite scelti arbitrariamente, ma posti all'interno di una determinata scala di grandezze detta "scala di Wentworth". Le dimensioni limite delle classi granulometriche sono rappresentate dalle potenze intere positive e negative del 2. Quindi, in millimetri, esibiscono i seguenti valori: …256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256… Questi numeri sono le potenze del 2 elevato rispettivamente agli esponenti: …8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8 ..., che ne rappresentano quindi i logaritmi di base 2.

In **aeronautica** gli altimetri della navigazione aerea sono basati sul fatto che all'aumentare della quota *h* diminuisce la pressione atmosferica *p*. Per determinare la quota *h*, dopo aver rilevato la pressione *p*, occorre tener presente che *p* dipende anche dalla temperatura *T* dell'aria, secondo la legge:

$$h = (30T + 8000) \cdot \ln \frac{p_0}{p}$$

dove la quota è misurata in metri, la pressione in *cmHg*, la temperatura in °C e p_o indica la pressione sul livello del mare.

Le **guerre** vengono classificate in base al numero di morti e si parla così di magnitudo 3, 4 oppure 7 ad indicare l'esponente che sulla base 10 indica approssimativamente il numero di morti, cioè, in sostanza, il logaritmo in base 10 del numero dei morti. Così se sentite dire che una certa guerra ha appena magnitudo doppia rispetto ad una guerra precedente, ci si deve allarmare perché quanto a numeri di morti, quella guerra ne ha avuti ben più del doppio. Ad esempio, una guerra di magnitudo $M = 3$ avrebbe poco più di un migliaio di vittime, mentre una guerra di magnitudo $M = 6$ avrebbe più di un milione di morti.

In **finanza** l'ultimo ritrovato per scovare gli evasori, è collegato con i logaritmi ed è opera del matematico Mark Nigrini che a sua ha volta utilizzato una legge scoperta nel 1881 dal matematico Simon Newcomb, poi formalizzata dal fisico Frank Benford nel 1938.
Newcomb aveva notato che nella biblioteca dell'Università le tavole dei logaritmi, allora molto utilizzate, erano più consumate all'inizio che alla fine e ne dedusse che i numeri utilizzati nei calcoli dai suoi colleghi iniziavano più spesso con 1 che con 2, con 2 che con 3 e così via.
Da questa osservazione ricavò una legge empirica di distribuzione dei numeri utilizzati dagli scienziati:

$$\textit{probabilità (che la prima cifra del numero sia d)} = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right),$$

dove *d* indica una delle cifre da 1 a 9.

Benford mise alla prova la formula utilizzando diversi dati numerici e notò che non tutte le tabelle di dati ubbidiscono alla legge: i dati più ordinarti, ad esempio la tavola contenete i quadrati dei numeri, non rispetta la legge, mentre le tabelle più disomogenee la soddisfano quasi del tutto.
Nigrini ha poi trovato un utilizzo della legge di Benford elaborando dei programmi che permettono di individuare distribuzioni numeriche sospette nelle dichiarazioni dei redditi: infatti quando una persona cerca di inventare una sequenza di numeri casuali per simulare la sua situazione finanziaria, ottiene invece dei numeri molto correlati tra loro.
In questo modo gli evasori producono delle dichiarazioni dei redditi che analizzate evidenziano notevoli deviazioni dalla legge di Benford. Quindi per sapere se l'evasore ha compilato onestamente la dichiarazione dei redditi basta controllare la frequenza delle varie cifre utilizzate per scrivere i numeri.

8 Note storiche

L’idea su cui si basa il concetto di logaritmo è molto antica (se ne trova traccia già nelle opere di Archimede) e si basa sulle seguenti osservazioni.
Scriviamo in una tabella i termini di una progressione geometrica, ad esempio di ragione 2 (il rapporto tra un termine e il precedente è 2), indicando il posto (che chiamiamo indice) che ciascun termine occupa nella progressione.

indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
termine	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1020

Si può verificare che moltiplicando tra loro due termini della progressione si ottiene ancora un termine della progressione, il cui indice è dato dalla somma degli indici dei due fattori.
Ad esempio si ha $8 \cdot 32 = 256$ e, infatti, sommando gli indici di 8 e 32, che sono 3 e 5, si ottiene 8 che è l’indice di 256.
Ciò è evidente se si pensa che tali indici non sono altro che gli esponenti dei termini considerati: $8 = 2^3$, $32 = 2^5$ e $8 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$.
Questo fatto suggerì l’idea di utilizzare tale corrispondenza per semplificare il calcolo del prodotto di due numeri: dovendo calcolare ad esempio $16 \cdot 64$, si cercano nella tabella gli indici corrispondenti ai due fattori, in questo caso 4 e 6, si sommano ottenendo 10, quindi si trova, sempre nella tabella, il termine corrispondente a tale indice che è 1024 e rappresenta il prodotto cercato.
La semplificazione di tale modo di operare è evidente se si pensa che, non avendo a disposizione calcolatrici o computer, risulta molto più facile eseguire una somma che una moltiplicazione. Analogamente si può ridurre una divisione ad una sottrazione e una potenza ad una moltiplicazione.
Questa idea era però inutilizzabile, perché procedendo in questo modo non è possibile eseguire moltiplicazioni di numeri che non siano termini della progressione considerata. Ad esempio con la tabella prima riportata non si potrebbe calcolare $18 \cdot 37$.

Lo scozzese **John Napier** (1550-1617), meglio noto con il nome italianizzato di Nepero, ebbe il merito di perfezionare tale idea rendendola praticamente utilizzabile.
Nepero non era un matematico di professione, bensì un ricco proprietario terriero di nobile famiglia con vasti interessi che andavano dall'astrologia all'alchimia, dalla teologia alla matematica. Egli osservò che, per poter trovare in una tabella i numeri che si devono moltiplicare, o perlomeno dei numeri molto vicino ad essi, occorre che i termini della progressione geometrica siano molto vicini tra loro, e ciò si può ottenere utilizzando come ragione della progressione un numero molto vicino a 1.
Nelle sue opere “Mirifici logarithmorum canonis descriptio” e “Mirifici logarithmorum canonis constructio” costruì delle tabelle simili a quella presentata, assumendo come ragione della progressione il numero $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$, e coniò il termine, ancora oggi usato, di logaritmo, dal greco “logon arithmos” ossia “numero della ragione” o “numero del rapporto”, intendendo con tale neologismo la “posizione (del termine considerato) nella progressione geometrica”.
La corrispondenza con i logaritmi da noi definiti è evidente se si pensa che quello che sopra abbiamo chiamato “indice” di un termine non è altro che l’esponente da attribuire a una prefissata base per ottenere una potenza uguale al termine dato.

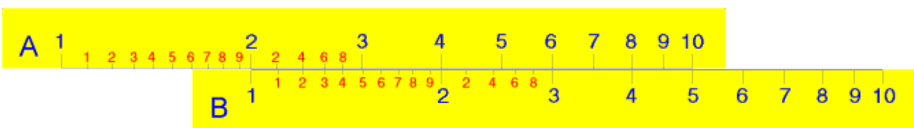
Nepero, per evitare l’uso dei decimali, non utilizzava direttamente i termini della progressione così costruita, ma li moltiplicava per 10^7. In questo modo otteneva un sistema di logaritmi che, a parte il segno e la posizione della virgola decimale, equivale a quelli che oggi chiamiamo logaritmi naturali o neperiani.

Le tavole di Nepero ebbero subito un notevole successo e la sua opera fu subito tradotta in inglese. Fra gli ammiratori più entusiasti c'era **Henry Briggs** (1561-1630), che nel 1615 si recò da Nepero per discuterne possibili modifiche alle sue tabelle. Essi convennero che sarebbe stato opportuno costruire una tavola dei logaritmi a base dieci.
Nepero non ebbe più modo di realizzare questo progetto perché morì nel 1617 e il compito ricadde su Briggs, che fece un lavoro enorme: calcolò più di 30000 logaritmi fino alla quattordicesima cifra decimale dopo la virgola e questo fu solo l'inizio, in quanto pubblicò anche tabelle dei logaritmi dei seni, coseni, tangenti, insomma fece un lavoro enorme.
Per la costruzione delle sue tavole, egli operò in modo completamente diverso da Nepero.
Partendo da $\operatorname{Log} 10 = 1$, egli cominciò ad estrarre la radice quadrata del numero 10, poi la radice quadrata di questa radice, cioè la radice quarta del numero 10, considerando che $\sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = 1{,}778279...$ e quindi $\operatorname{Log} 1{,}778279... = 1/4$.
Continuò estraendo la radice di questa radice, cioè la radice ottava del numero 10 e così via di continuo per 54 volte, raggiungendo quindi la radice del numero 10 di indice 2^{54} = 18014398509481984 il cui valore è 1,00000000000000012781914932003235 e il cui logaritmo è 0,0000000000000000555111512312578270211815 = $1/2^{54}$.
Giunto a questo punto cominciò la costruzione delle sue tavole dei logaritmi, mediante successive moltiplicazioni per il numero $\operatorname{Log} 1{,}0000000000000001278...$ e somme di $1/2^{54}$ ai corrispondenti logaritmi.

Le tavole dei logaritmi usate fino a pochi decenni fa sono tutte derivate da quelle di Briggs, il cui nome è rimasto associato ai logaritmi a base 10.
Sebbene Briggs avesse colto il legame tra logaritmi ed esponenziali delle potenze in una data base, egli non poté esplicitarne la definizione perché all’inizio del XVII secolo gli esponenti frazionari e irrazionali non erano ancora in uso.

Fu **Eulero** (1707-1783) a formulare la definizione di logaritmo che ancora oggi usiamo e ad accorgersi che le funzioni logaritmiche trovano applicazione in svariati campi della matematica; egli si accorse anche della fondamentale importanza, nell’analisi infinitesimale, delle funzioni esponenziali e logaritmiche aventi per base il numero irrazionale 2,71828… che oggi, sebbene sia chiamato impropriamente numero di Nepero, indichiamo con la lettera *e*, iniziale di Eulero.

Poco dopo la scoperta dei logaritmi, fu costruito un "regolo calcolatore" (due righelli graduati scorrevoli l'uno accanto all'altro in cui le tacche sulle scale graduate sono basate sui logaritmi) che permetteva di calcolare moltiplicazioni e divisioni in modo molto semplice.



Il regolo fu via via perfezionato e fino alla diffusione delle macchine calcolatrici divenne l’inseparabile strumento di calcolo di geometri, architetti ed ingegneri.