Гимназија "Исидора Секулић"

КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА

задаци ученика другог разреда

Мирјана Јовановић, наставник математике
одељење II-3

2023/24.

I ГРУПА

Андреј Главинић, Стефан Косовац, Огњен Сенковић, Стефан Ћоровић

Посматрајмо следећи проблем: Правоугаони тепих има површину $15m^2$. Дужина тепиха је за 2 метра већа од његове ширине. Одговорити на следеће захтеве:

- Одредити једначину која повезује површину и дужину тепиха;

Нека је a дужина правоугаоног тепиха, а b његова ширина. Из текста задатака закључујемо да је $a = b + 2$. Површина правоугаоника једнака је производу ширине и дужине правоугаоника, те је $P = a \cdot b = b(b + 2)$. Обзиром да тражена једначина мора да повеже површину P и дужину a, а тренутна једначина повезује површину P и ширину b, изразићемо ширину b преко дужине a. Дакле, $b = a - 2$, па је онда $P = a(a - 2)$.Заменом бројне вредности за површину $P = 15m^2$ добијамо коначну једначину

$$a(a-2) = 15$$

која, заиста, повезује површину правоугаоног тепиха P и дужину тепиха a.

- Решити добијену једначину

Обзиром да добијена једначина није линеарна, већ квадратна, потребно ју је свести на основни облик квадратне једначине $px^2 + qx + r = 0$, при чему је наравно $p \neq 0$.

$$a(a-2) = 15 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 15 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \; [*]$$

Применом дистрибутивног закона и одузимањем свели смо првобитну квадратну једначину на њен основни облик. Даље решавање једначине подразумева растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце применом једног од метода које познајемо.

$$[*] \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-5) = 0 \; [1]$$
$$[*] \Leftrightarrow a^2 - 5a + 3a - 15 = 0 \Leftrightarrow a(a-5) + 3(a-5) = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-5) = 0 \; [2]$$

Приказали смо факторизацију тринома применом два метода — допуна до потпуног квадрата [1] и запис линеарног коефицијента као збир/разлика простих чинилаца производа водећег и слободног коефицијента [2]. Осим тога, може се применити и Безуова теорема. Независно од употребљеног метода, увек се добије једначина која се решава применом правила нуле производа, које гласи: $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$.

$$(a+3)(a-5) = 0 \Leftrightarrow a + 3 = 0 \vee a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 5$$

Видимо да полазна једначина има два решења — прво је $a = -3$ или друго $a = 5$.

- Које су димензије тепиха?

Димензије тепиха добијамо решавањем система једначина $a = n \wedge b = a - 2$, где је a дужина тепиха, b ширина тепиха, а n позитивно решење једначине [*] — димензије су увек природни бројеви. Дакле, $a = n = 5$, па је дужина тепиха $a = 5m$, а ширина тепиха $b = 3m$, што одговара првобитно датој површини — $P = a \cdot b = 3m \cdot 5m = 15m^2$.

Квадратна једначина - проблемски задатак

Андреј Главинић, Стефан Косовац, Огњен Сенковић, Стефан Ћоровић

Посматрајмо следећи проблем: Мирко и Дејан су били на екскурзији у иностранству. Од родитеља су добили џепарац у динарима који су касније претворили у евре, али на екскурзији нису потрошили сав новац. У повратку за Србију одлучују да преброје колико им је евра остало. Заједно су закључили да Дејан има за 2 евра мање од Мирка, те да је производ њиховог новца за 20 већи од квадрата разлике њиховог новца.

- Решити једначину која повезује њихов преостали новац

Нека је m количина новца која је преостала Мирку, а d количина новца која је преостала Дејану. Знамо да Дејан има два евра мање од Мирка, те записујемо $d = m - 2$. Осим тога, знамо да је производ њиховог новца за 20 већи од квадрата разлике њиховог новца. Уколико искористимо обе информације добијамо једначину

$$md = (m + d)^2 + 20 \;\Leftrightarrow\; m(m - 2) \;= (m - m + 2)^2 + 20$$

која се применом дистрибутивног закона и извођењем рачунских операција сведе на

$$m^2 - 2m = 2^2 + 20 \;\Leftrightarrow\; m^2 - 2m = 24 \;\Leftrightarrow\; m^2 - 2m - 24 = 0 \text{ [*]}.$$

Добијена потпуна квадратна једначина по m може се решити на више начина - применом формуле за решавање потпуне квадратне једначине или растављањем квадратног тринома на линеарне чиниоце те применом правила нуле производа.

$$[*] \;\Leftrightarrow\; m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow\; m_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2} \;\Leftrightarrow\; m_1 = \frac{12}{2} = 6 \vee m_2 = -\frac{8}{2} = -4$$

Дакле, полазне квадратна једначина има два решења - једно је $m_1 = 6$, а друго $m_2 = -4$.

- Колико новца је преостало Мирку, а колико Дејану?

Свота новца која је преостала Мирку и Дејану свакако је природан број, те не можемо разматрати решења једначине [*] која не припадају скупу природних бројева. Због тога узимамо да је $m = 6$, те је Мирку преостало 6 евра, а Дејану $d = m - 2 = 6 - 2 = 4$ евра.

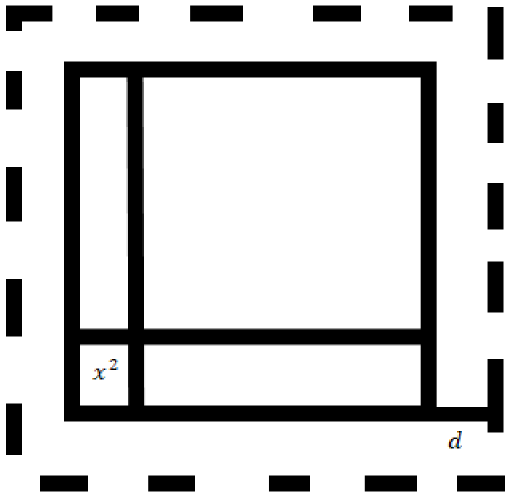
II група

Андреј Аџеми, Ања Бајилов, Никола Данилов, Андреа Џалто

1. **Саша је поплочао део дворишта квадратног облика, квадратним плочама дужине 1 метар. Купио је тачно онолико плоча, колико му је потребно за поплочавање планиране површи, но након завршетка радова учинило му се да га треба проширити. За проширење са сваке стране по *d*метара, потребне су му још 24 плоче. Дужина првобитно поплочаног дела била је 5 метара.**
   - **Нацртај скицу која одговара датом проблему.**
   - **Одреди једначину која представља дату ситуацију**
   - **Реши једначину**

   За колико је Саша проширио поплочани део дворишта?

   Скица:



x = 1m

n-број плочица

$$n = \frac{(5x)^2}{x^2} = 25$$

Једначина: $(5+2d)^2 = x^2(n+24)$

Решење: $(5+2d)^2 = 49$

$|5+2d| = |7|$

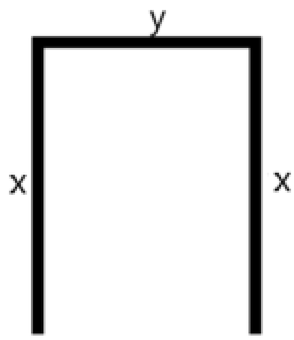
1. $5+2d = 7$
   $2d = 2$
   $\boldsymbol{d = 1m}$
2. $5+2d = -7$
   $2d = -12$
   $d = -6$

Објашњење: Површина проширеног дела $\left((5+2d)^2\right)$једнака је површиниплочица које су неопходне за поплочавање проширеног дела$\left(x^2(n+24)\right)$.

Саша је проширио поплочани део дворишта за 1 метар у сваку страну.

2. Породица Перић направила је нову ограду око свог дворишта правоугаоног облика површине $360m^2$с тим да је једну страну дворишта оставила без ограде. Ако су се оградили с 82m ограде, колике су димензије дворишта породице Перић?

скица која одговара датом задатку:



82 метара ограде по скици одговара збиру две дужине и једне ширине, јер је једна страна дворишта остављена без ограде.Једну од страна дворишта изразимо преко друге, да би касније у формули површине дворишта (производ дужине x и ширине y) за које знамо да је $360m^2$ уврстили (у овом случају y преко x).

$$82 = 2x + y$$

$$y = 82 - 2x$$

Сада у формулу за површину уврстимо y.

$$\boldsymbol{P = 360m^2}$$

$$xy = 360$$

$$x(82 - 2x) = 360$$

$$\underline{-2x^2 + 82x - 360 = 0}$$

Као резултат добили смо квадратну једначину коју можемо решити применом формуле за квадратне једначине.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-82 \pm \sqrt{6724 - 2880}}{-4}$$

$$x = \frac{-82 \pm 62}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-82 + 62}{-4} x_2 = \frac{-82 - 62}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-20}{-4} x_2 = \frac{-144}{-4}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 5m x_2 = 36m}$$

Из добијених решења можемо наћи ширину дворишта за оба случаја, тако што се вратимо на формулу $82 = 2x + y$

$$y_1 = 82 - 2 \times 5 = 72m$$

$$y_2 = 82 - 2 \times 36 = 10m$$

Оба решења и за дужину и ширину дворишта су природни бројеви, што не мора увек бити случај код квадратних једначина. Другим речима, димензије дворишта могу бити или $\boldsymbol{5m} \times \boldsymbol{72m}$ или $\boldsymbol{10m} \times \boldsymbol{36m}$

III група

Јана Макевић, Уна Ивановић, Лав Мицковић, Милица Радишић

1. **Одреди формулу за одређивање броја дијагонала d_n конвексног n-тоугла**.

Број страница многоугла	4	5	6	7	8
Број дијагонала које полазе из сваког темена	1	2	3	4	5
Укупан број дијагонала, d	2	5	9	14	20

Прво смо помоћу ове табеле поступно, цртајући сваки многоугао појединачно дошли до закључка да постоји одређени шаблон у табели (бр. дијагонала из сваког темена се повећао 1, док код укупног бр. дијагонала, на свако наредно поље у табели се додаје за један више број него у претходном пољу (2+3=5; 5+4=9; 9+5=14; 14+6=20), а затим помоћу шаблона извели формулу:

$d = \frac{n \cdot k}{2} = \frac{n(n-3)}{2}, \qquad k = n - 3$

Затим на основу добијене формуле смо испитали који од следећих примера представља број дијагонала, као и о ком се многоуглу ради.

а) $20 = \frac{n(n-3)}{2} \quad / \cdot 2 \qquad\qquad 40 = n(n-3)$

$$n^2 - 3n - 40 = 0$$

$$n^2 - 8n + 5n - 40 = 0$$

$$n(n-8) + 5(n-8) = 0$$

$$(n-8)(n+5) = 0$$

$$n - 8 = 0 \vee n + 5 = 0$$

$$n = 8 \vee n = -5$$

Одг: осмоугао, многоугао не може имати негативан број страница.

б) $30 = \frac{n(n-3)}{2} \qquad\qquad n^2 - 3n - 60 = 0$

$$\left(n^2 - 3n + \frac{9}{4}\right) - 62\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{249}{2} = 0$$

$$\left(n - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{249}}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{249}}{2}\right) = 0$$

$$n = \frac{3 + \sqrt{249}}{2} \vee n = \frac{3 - \sqrt{249}}{2}$$

Одг: не може бити многоугао зато што је n ирационалан број.

2. На одојкашком турниру је одиграно 15 утакмица (сваки тим је играо са сваким). Колико је екипа учествовало на том турниру?

-саxозначавамо тим/екипу

Формула помоћу које ћемо да решимо задатак:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 15$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = 15 \, / * 2$$

$$x(x-1) = 30$$

$$x^2 - x = 30 \; / -30$$

$$x^2 - x - 30 = 0 \qquad ,$$

тим не може да игра сам са собом $(x-1)$, цео тај израз $x(x-1)$ се дели са 2 јер нека два тима могу међусобно да одиграју само једну утакмицу.

Овим поступком смо добили потпуну квадратну једначину која се решава помоћу следеће формуле: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

$x_1 = \frac{1+11}{2} = 6$ - само ово решење је тачно зато што број екипа не може бити негативан.

$$x_2 = \frac{1-11}{2} = -5$$

IV ГРУПА

Сара Ђурић, Јелена Никетић, Нина Филиповић, Маја Мандић

1. Дуж је подељена тзв. златним пресеком, ако се дужи део према краћем делу односи као цела дуж према дужем делу. Одредити размеру дужег дела према краћем делу за дуж дужине 2.

$x:(2-x) = 2:x \longrightarrow$ поставимо пропорцију и решимо је

$x^2 = 2(2-x)$

$x^2 = 4 - 2x$

добијену једначину раставимо на чиниоце допуном до потпуног квадрата $\longrightarrow$

$x^2 + 2x - 4 + 1 - 1 = 0$

$x^2 + 2x + 1 - 5 = 0$

$(x+1)^2 - 5 = 0$

$$(x+1)^2 = 5$$

Из једначине смо добили два решења:

$x + 1 = \sqrt{5}$ v $x + 1 = -\sqrt{5}$

$x_1 = \sqrt{5} - 1$ v $x_2 = -\sqrt{5} - 1$

x_2 не може бити решење јер је негативан број.

Одређујемо размеру постављањем порпорције и мењамо$\boldsymbol{x}$ са $\sqrt{5} - 1$:

$x:(2-x) = \left(\sqrt{5}-1\right):\left(2-\sqrt{5}+1\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5} = \dfrac{2\sqrt{5}-2}{4} =$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Размера дужег дела према краћем делу за дуж дужине 2 је $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2. Сања треба да подели другарицама 200 бомбона на једнаке делове. Пре дељења 2 девојчице се одрекну свог дела, због чега је свака од осталих добила по 5 бомбона више. Колико је у тој групи било девојчица?

x- број девојчица
y- број бомбона по девојчици

Поставимо две једначине:
$x \cdot y = 200$
$\boxed{(x-2)(y+5) = 200}$

Другу једначину ћемо средити множењем:

$xy + 5x - 2y - 10 = 200$

$\boldsymbol{xy}$ћемо заменити са бројем 200(из прве једначине):

$200 + 5x - 2y - 10 = 200$

Из прве једначине изразимо$\boldsymbol{y}$ и убацимо у другу једначину: $x \cdot y = 200 \Rightarrow y = \frac{200}{x}$

$200 + 5x - 2 \cdot \frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{x}} - 10 = 200$

Да би се ослобидили разломка, једначину ћемо помножити са $\boldsymbol{x}$, уз постављене услове:

$$200 - 200 + 5x - \frac{400}{x} - 10 = 0 \; / \cdot x, x \neq 0$$

Затим једначину делимо са 5 и добијамо квадратну једначину коју треба решити.

$$5x^2 - 400 - 10x = 0 / : 5$$

$x^2 - 2x - 80 = 0$

Нађемо коефицијенте и уврстимо их у формулу како бисмо добили решења:

$a = 1, b = -2, c = -80$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} = \frac{2(1 \pm 9)}{2} = 1 \pm 9$

$\boldsymbol{x_1 = 10}$ $\boldsymbol{x_2 = -8}$

Из добијених решења, долазимо до закључка да негативан број не може бити одговор на наш задатак. Остаје нам само једно решење што значи да је у тој групи било 10 девојчица.