A **magasságpont és a súlypont** köré írt körre vonatkozó hatványa egyszerre tárgyalható az alábbi módon.

Legyen az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, a súlypont S, a magasságpont M. Válasszuk vonatkoztatási pontnak az O pontot. Legyen $\overrightarrow{OM}=\vec{m}$, $\overrightarrow{OS}=\vec{s}$, valamint a csúcsokba mutató helyvektorok $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ és $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Ekkor $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R$, ahol R a háromszög köré írt körének sugara.

Ismert tény, hogy $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ és $\vec{s}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

Ez alapján $\left(\vec{m}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2+\left(\vec{c}\right)^2+2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}\right)=3R^2+2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}\right)$.

Mivel $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, így $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2=\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2-2\vec{a}\vec{b}=2R^2-2\vec{a}\vec{b}$. Legyen *AB=c*, így $2\vec{a}\vec{b}=2R^2-c^2$. Hasonlóan $2\vec{b}\vec{c}=2R^2-a^2$ és $2\vec{c}\vec{a}=2R^2-b^2$.

Így $m^2=\left(\vec{m}\right)^2=3R^2+2R^2-c^2+2R^2-a^2+2R^2-b^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$. Ebből következik, hogy $s^2=\left(\vec{s}\right)^2=\left(\dfrac{\vec{m}}{3}\right)^2=\dfrac{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}{9}=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Tehát a keresett hatványok $m^2-R^2=8R^2-(a^2+b^2+c^2)$ és $s^2-R^2=-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

A **beírt kör** középpontjának a köré írt körre vonatkozó hatványa:

Legyen az *ABC* háromszög *C* csúcsához tartozó szögfelező és a *c* oldal metszéspontja *E*! Az $\overrightarrow{OE}=\vec{e}$. Ekkor az előző rész jelöléseit, a szögfelező tételt és az osztópont helyvektorára vonatkozó tételt használva kapjuk, hogy $\vec{e}=\dfrac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}}{a+b}$. Legyen a beírt kör középpontja *K*, és az $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$. A szögfelező tétel felhasználásával igazolható, hogy *K* a *C* csúcshoz tartozó szögfelezőt $\dfrac{c}{a+b}$ arányban osztja, ahol a hosszabb rész van a csúcs felől, Így az osztópont helyvektorára vonatkozó tétel alapján jön, hogy $\vec{k}=\dfrac{(a+b)\vec{e}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}=\dfrac{(a+b)\dfrac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}}{a+b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}=\dfrac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}$.

Így az előző rész jelöléseit és összefüggéseit használva kapjuk, hogy

$$k^2=\left(\vec{k}\right)^2=\left(\frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}\right)^2=\frac{1}{(a+b+c)^2}\left(R^2(a^2+b^2+c^2)+2ab\vec{a}\vec{b}+2bc\vec{b}\vec{c}+2ca\vec{c}\vec{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^2}\left(R^2(a^2+b^2+c^2)+ab(2R^2-c^2)+bc(2R^2-a^2)+ca(2R^2-b^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{(a+b+c)^2}\left(R^2(a+b+c)^2-abc(a+b+c)\right)=R^2-\frac{abc}{a+b+c}$$

A keresett hatvány: $k^2 - R^2 = -\dfrac{abc}{a+b+c}$.