

# Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

www.karelappeltans.be

August 18, 2020

## 1 de rechte, veeltermfunctie van graad 1

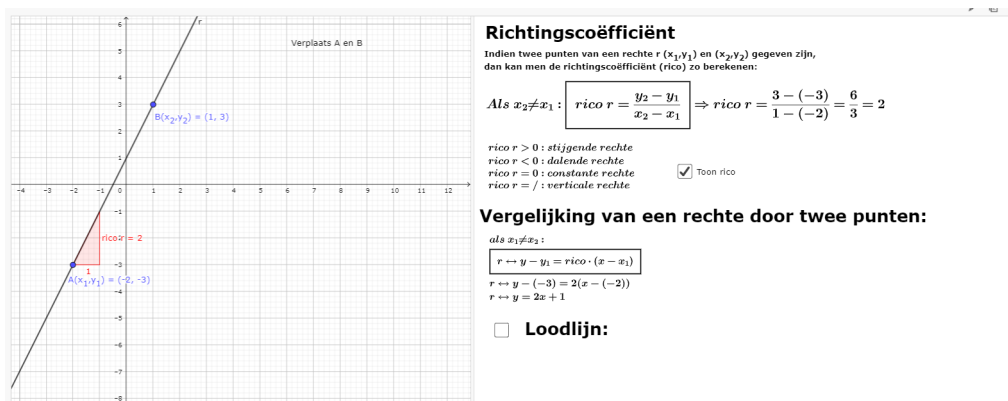


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP>

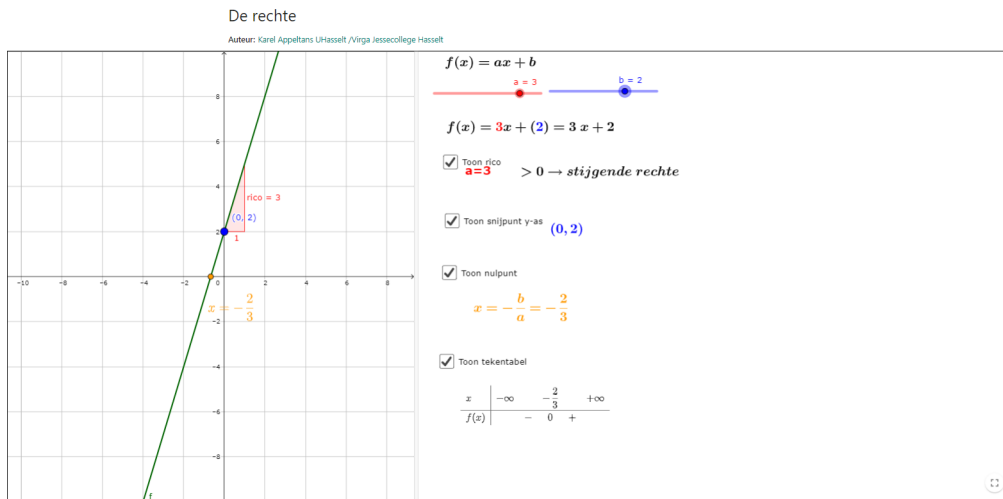


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2>

## 2 de parabool, veeltermfunctie van graad 2

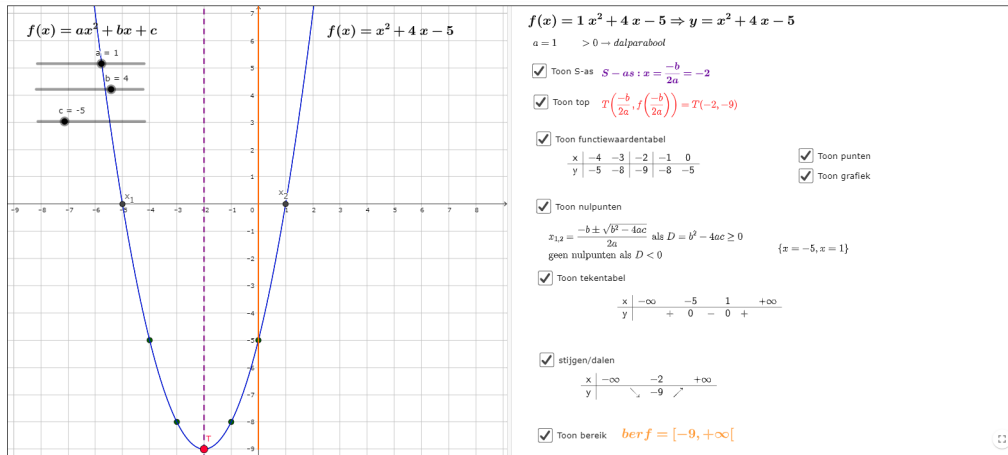


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

## 3 elementaire functie $f(x) = x^3$ , veeltermfunctie van graad 3

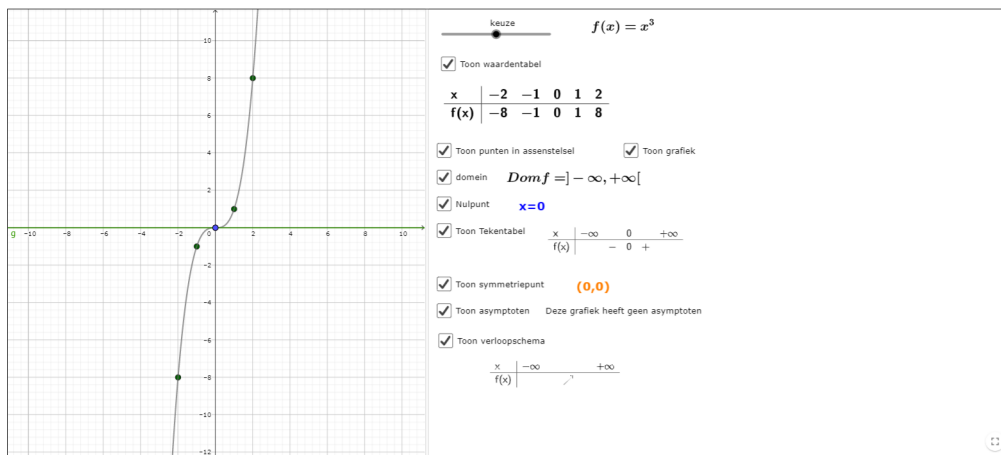


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk>

## 4 willekeurige veeltermfuncties

### 4.1 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd  $dom f = \mathbb{R} = ] - \infty, + \infty [$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \text{hoogste graadsterm}$

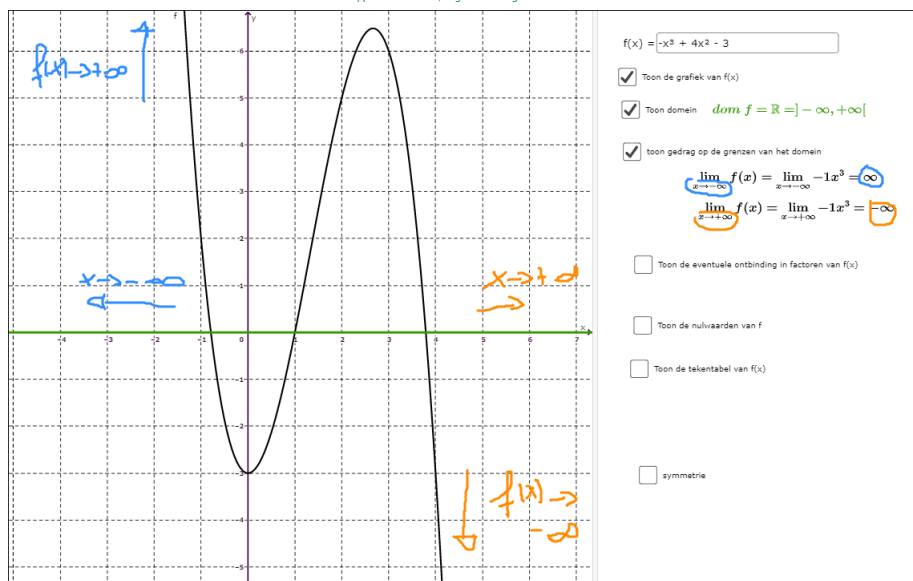


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

## 4.2 nulpunten en ontbinding in factoren

### Stappenplan

stap 1: herschrijf de vergelijking naar  $\dots = 0$

stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen

stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen

stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men

stap 4a: een merkwaardig product gebruiken:

stap 4b: de abc-formule gebruiken

stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men

stap 5a: een merkwaardig product gebruiken

stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

stap 4b: de abc-formule

Nieuwe vergelijking

Toon exacte oplossing (als  $D > 0$ , of  $D = 0$ )

$$3x^2 - 15x - 15 = 0$$

Gebruik de abc-formule om de oplossingen van deze vierkantsvergelijkingen te bekomen. Vereenvoudig zo ver mogelijk

$$D = b^2 - 4ac$$

Als  $D \geq 0$  dan 
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Als  $D < 0$  geen reële oplossingen

Je kan hiernaast jouw oplossingen achteraf controleren!

$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$
  
  

$$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

↺

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Stap 4a&5a: een merkwaardig product gebruiken

Ontbinding in factoren:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

Nieuwe opgave
 $25x^2 - 16$

Toon oplossing
 $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$

↺

Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

### Regel van Horner

als strategie bij ontbinding in factoren met factor  $x-a$ ,  $a \in \mathbb{Z}$

**Voorbeeld:**  
 bepaal de ontbinding in factoren van  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$   
 Bekijk de delers van de constante term:  $-4$   
 delers  $-4 = \{+1, -1, +2, -2, +4, -4\}$   
 Zoek een deler die 0 als beeld heeft,  
 $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -2 \neq 0$   
 $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$   
 $P(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x - 4 \quad d(x) = x - (1)$

1	3	0	-4
	+	+	+
1	(1) · 1 = 1	(1) · (-4) = -4	(1) · -4 = -4
1	4	4	0

$Q(x) = 1x^2 + 4x + 4$   
 $r(x) = 0$   
 $P(x) = d(x) \cdot q(x) + r$   
 $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

$Q(x)$  kan eventueel via opnieuw Horner of via andere strategieën verder ontbonden worden

**Willekeurig:**

Vul in:  $P(x) = \overline{x^3 + 1}$

**Delers van 1 zijn  $\{1, -1\}$**

Zoek een deler die 0 als beeld heeft:

$P(-1) = 0$     **-1 is een juiste kandidaat!**

1	0	0	1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	0

**Quotiënt  $Q(x) = x^2 - x + 1$**   
**rest  $r = 0$**   
 $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

↺

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Voorbeelden:

$x^2 + 5x + 7 = x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ (stap 1) $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$ (stap 4a) $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = -2$ (2x)	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$ via horner $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $(x + 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x = -2$ of $x = -2$	$12x^5 - 26x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2(6x^3 - 13x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 0$ of $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{2} = 0!$ $x = \pm\sqrt{0} = 0(2x)$
$4x^3 - 108 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$	$(2 - x)(1 + x)^2 x = 0$ $\Leftrightarrow 2 - x = 0$ of $1 + x = 0$ (2x) of $x = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -1$ (2x) $x = 0$	$\text{of } (x - 2)(6x^2 - x - 1) = 0$ (via Horner) $x - 2 = 0$ of $6x^2 - x - 1 = 0$ $x = 2$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

4.3 snijpunten zoeken

**Parabool:**  
 $f(x) = x^2 + 5x + 6$

**Rechte of parabool:**  
 $g(x) = x + 6$

**Snijpunten zoeken: stel voorschriften aan elkaar gelijk:**

$$x^2 + 5x + 6 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 - (x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\{x = -4, x = 0\}$$

**Vul x-coördinaat in in een voorschrift om y-coördinaat te vinden:**

$$x = -4 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6$$

**Snijpunten :**  $\{(0, 6), (-4, 2)\}$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSq>

4.4 tekentabel

**Algemene regel:**

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$+\infty$
$f(x)$		0	0	$\dots$	0	

teken a  
 ← afwisselend teken  
 behalve als np even keer voorkomt  
 teken a: teken van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm

**Voorbeelden:**  
 keuze = 1  
 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$   
 $f(x) = (x - 1)(x + 2)^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow \{x = -2, "2 \times", x = 1\}$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$-$	$+$

$a = 1 > 0$   toon

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz>

## 4.5 ongelijkheden

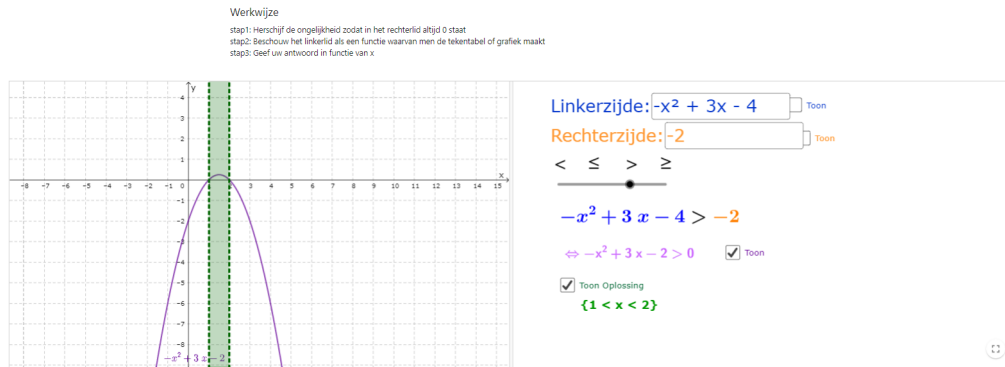


Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN>

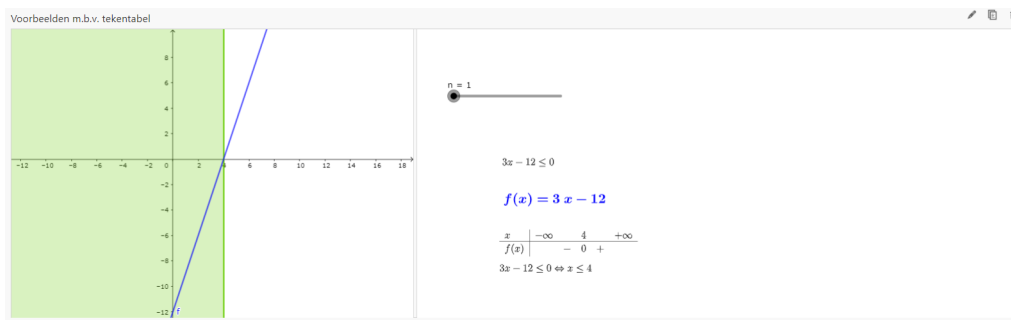


Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdkN>

## 4.6 symmetrie

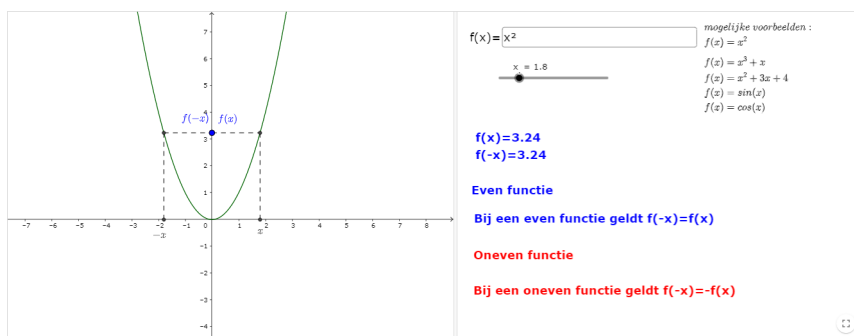


Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

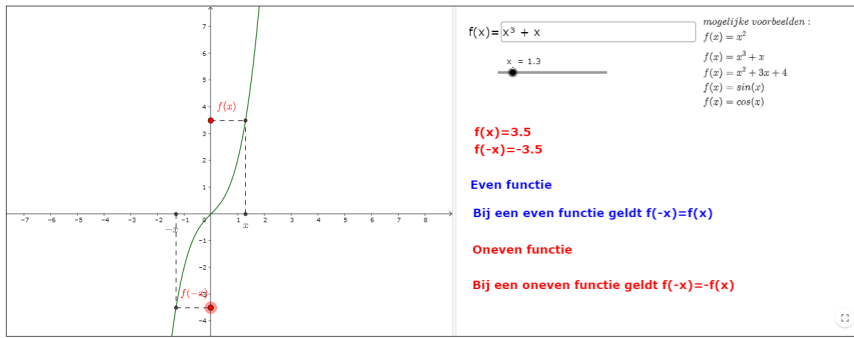


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

## 5 Toepassingen

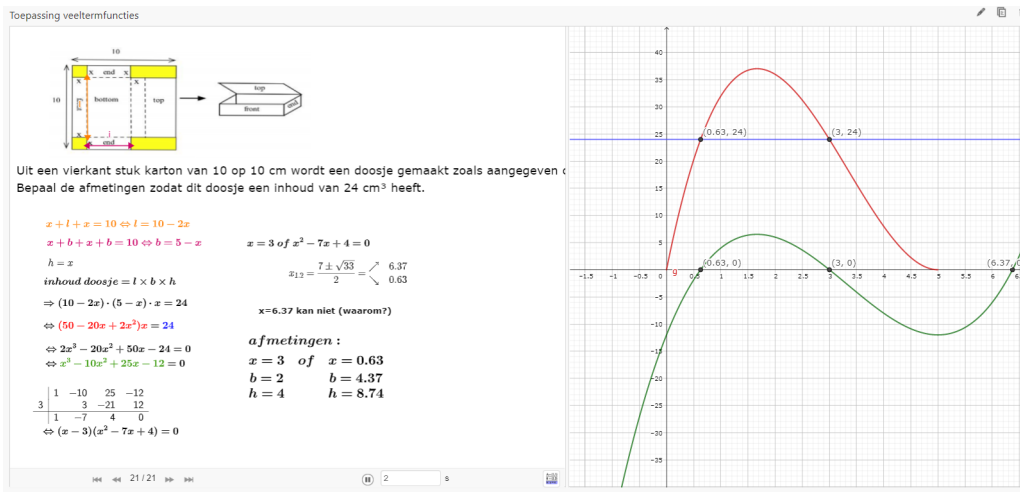


Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

## 6 Transformaties

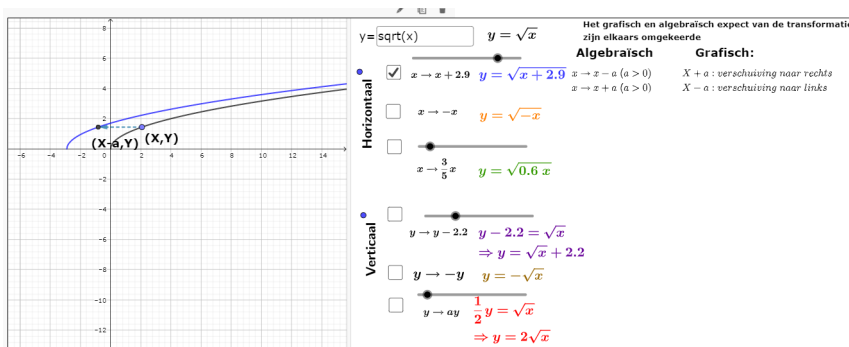


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/mq5zh8t>

## 7 Oefeningen

- de functie  $y = f(x) = -x^2 + px - 5$  heeft een maximum voor  $x = 1$ . Bereken  $p$  en de maximale functiewaarde

2. De functie  $y = f(x) = px^2 + 4x + p$  heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken  $p$ .
3. Los op
- (a)  $4(x - 2) = 3x - 7(2x - 3)$
  - (b)  $2(x - 3) + x < 5(x - 1) + 2$
  - (c)  $-9x^2 + 12x - 4 = 0$
  - (d)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
  - (e)  $2x^2 - 7x + 6 = 0$
  - (f)  $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12 = 0$
  - (g)  $x^4 - 1 = 0$
  - (h)  $4x^2 + 2x \leq 20$
  - (i)  $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2$
  - (j)  $(3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14 = 0$
  - (k)  $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$
4. Bepaal de snijpunten van de grafieken van  $y = x^2 - 2x$  en  $y = 6 - x$
5. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van  $y = x^2$  achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de  $y$ -as en tenslotte te spiegelen om de  $x$ -as

## 8 taak