1.1. Cinemática en Coordenadas Cartesianas

Ce.R.P. del Norte, Rivera, Uruguay

Prof. Washington Meneses

marzo, 2024

Música: motion array-corporate timeline

PES
POLO DE EDUCACIÓN SUPERIOR
Rivera - Uruguay

Ce.R.P. del Norte
Centro Regional de Profesores del Norte
Rivera - Uruguay

Ce.R.P. del Norte
Departamento de
FÍSICA

1.1. CINEMÁTICA EN COORDENADAS CARTESIANAS

Ce.R.P. del Norte, Rivera, Uruguay

Prof. Washington Meneses marzo, 2024

POLO DE EDUCACIÓN SUPERIOR
Rivera - Uruguay

Ce.R.P. del Norte
Centro Regional de Profesores del Norte
Rivera - Uruguay

Ce.R.P. del Norte
Departamento de FÍSICA

Comentarios iniciales

En este capítulo se presentarán los elementos necesarios para la **descripción** del movimiento de una **partícula** en el espacio.

Se interpretará una partícula como cualquier objeto cuyas **dimensiones sean mucho menores que las distancias que recorre en su trayectoria, y su representación será un punto**.

La mecánica newtoniana o mecánica vectorial es una formulación específica de la física clásica que estudia el movimiento de partículas y sólidos en un espacio euclídeo tridimensional.

En esta teoría, los conceptos de **espacio** y **tiempo** se interpretan como **absolutos y continuos**.

Coordenadas de un punto

Introduciendo un sistema de coordenadas podemos caracterizar la posición a través de un conjunto de magnitudes bien definidas.

En el caso de elegir un sistema cartesiano ortonormal dextrógiro, estas magnitudes (x, y, z) identifican las coordenadas de cualquier punto P del espacio tridimensional.

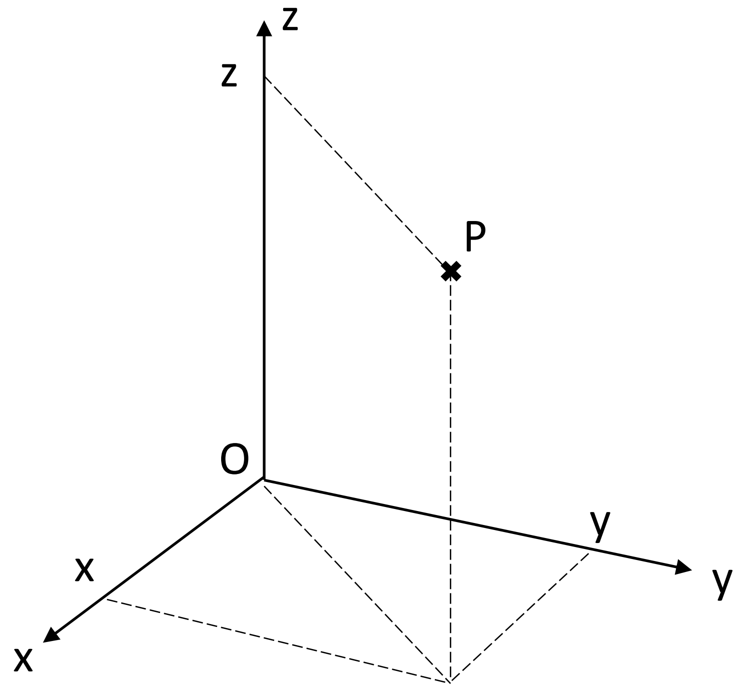


Figura 1. Coordenadas (x, y, z) de un punto P en el referencial cartesiano ortogonal.

Posición de una partícula

La posición de una partícula en un instante de tiempo t se describirá por un vector $\vec{r}(t)$, que va del origen de coordenadas (O) al punto (P) que ocupa la partícula en ese instante.

$$\vec{r}(t) = P - O$$

En este sistema de coordenadas, la posición se escribe, según la notación de Gauss, como $\vec{r}(t)$= $x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$.
Cada elemento de la suma es una componente del vector posición.

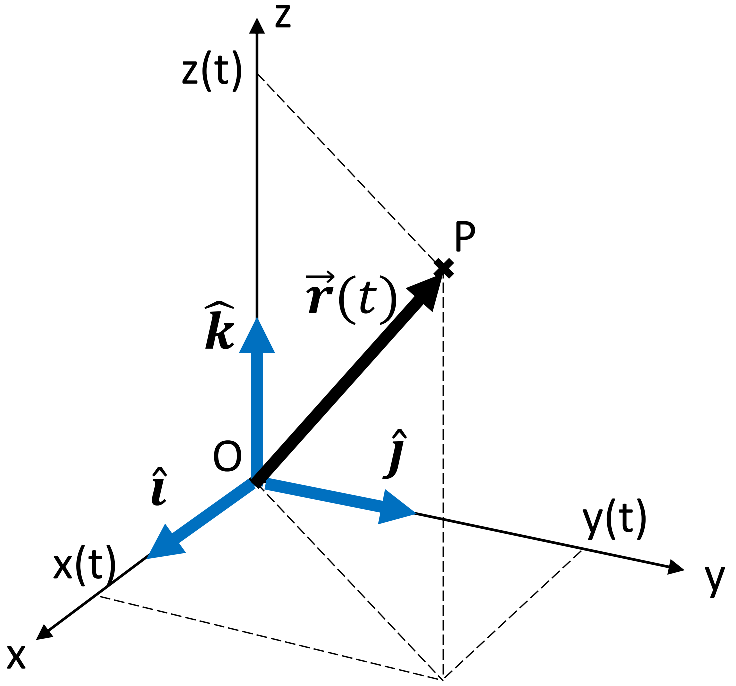


Figura 2. Vector posición y versores (vectores unitarios).

Trayectoria y desplazamiento

Las sucesivas posiciones ocupadas por la partícula en el transcurso del tiempo identifican la trayectoria, representada por la curva $\mathcal{C}$.

El cambio o variación de posición permite definir el vector desplazamiento como la diferencia de esas sucesivas posiciones.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

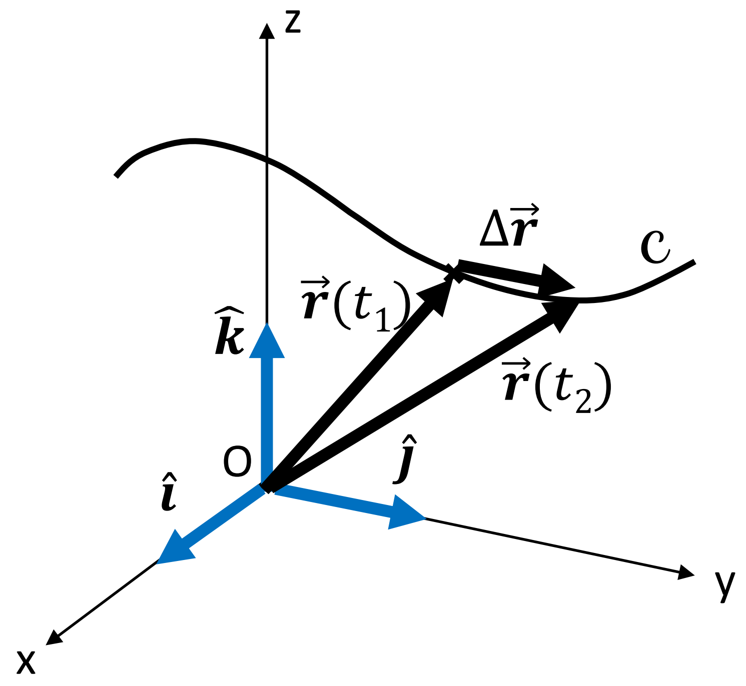


Figura 3. Trayectoria de la partícula y vector desplazamiento.

Velocidad media

El cociente entre el desplazamiento y el cambio en el tiempo es otro vector que se denomina velocidad media en ese intervalo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

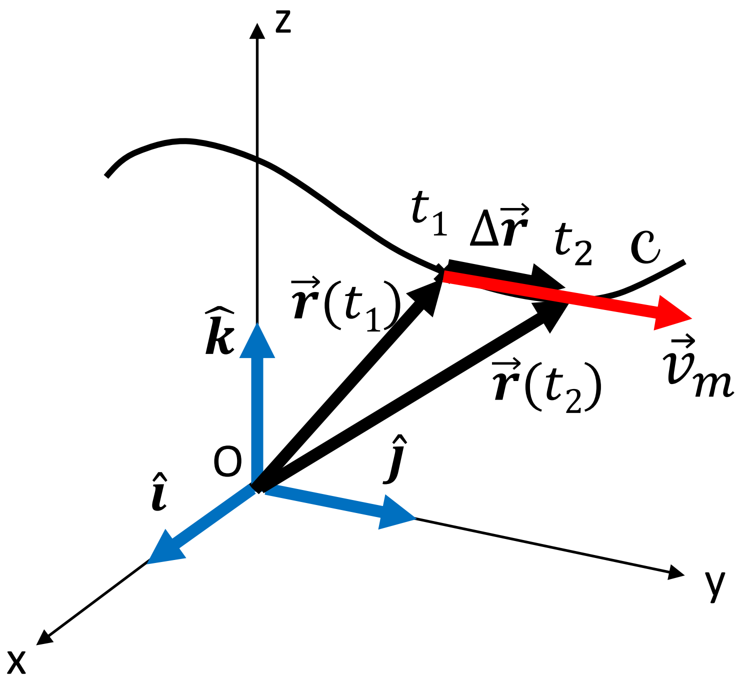


Figura 4. Velocidad media, vector paralelo al desplazamiento.

Velocidad instantánea (velocidad)

Para obtener información del movimiento en un punto de la trayectoria, hay que aplicar el proceso de aproximaciones sucesivas a través del trazado de las correspondientes secantes (desplazamientos) en cada intervalo. Llevado al límite, el proceso define el vector velocidad instantánea en el momento t.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

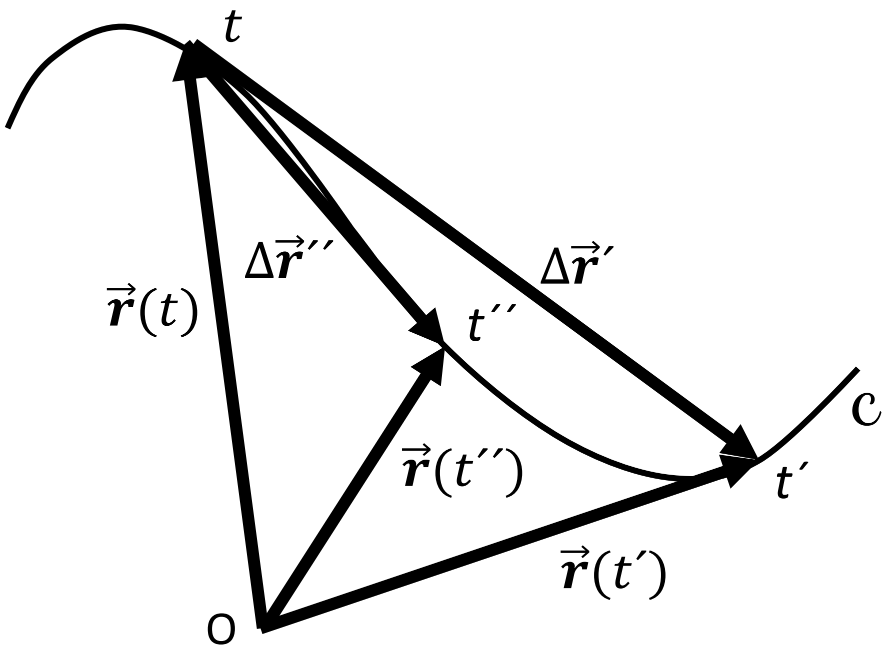


Figura 5. La velocidad instantánea es el caso límite de la velocidad media.

Velocidad instantánea

La velocidad instantánea es un vector tangente en cada punto de la trayectoria. Además, la velocidad corresponde a la derivada del vector posición respecto al tiempo. En la notación de Leibniz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Usando la notación de Newton:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

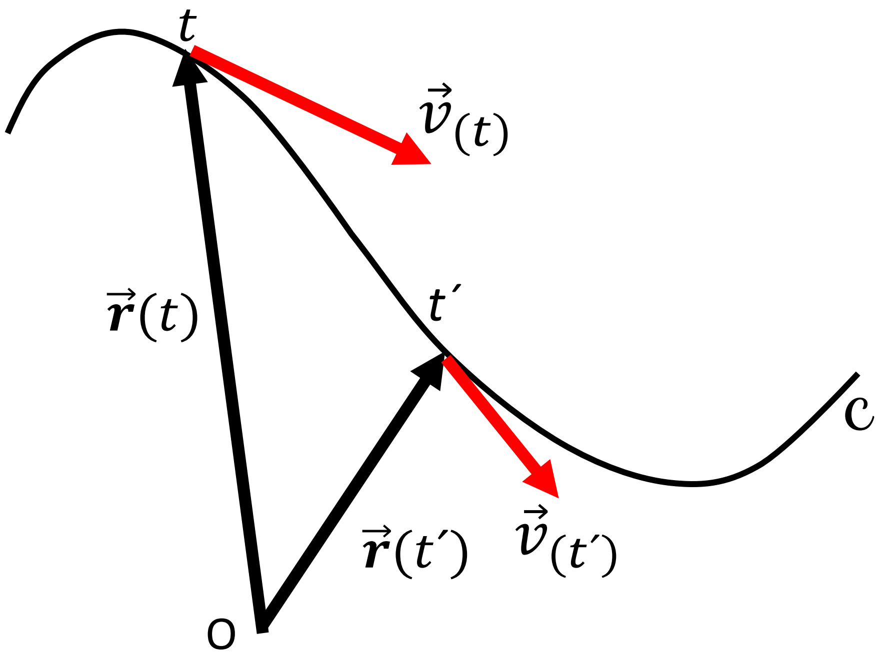


Figura 6. La velocidad instantánea tiene dirección tangente en cada punto de la trayectoria.

Velocidad instantánea en cartesianas

La derivación de la posición respecto al tiempo permite determinar la forma de la velocidad en coordenadas cartesianas.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right)$$

Esto implica seis términos:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + x\cancel{\frac{d\hat{\imath}}{dt}} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + y\cancel{\frac{d\hat{\jmath}}{dt}} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + z\cancel{\frac{d\hat{k}}{dt}}$$

Como estas coordenadas son fijas, las derivadas de los versores valen cero y se llega a la expresión vectorial:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}}$$

Aceleración media

La velocidad puede cambiar de un instante a otro. Entonces, se define una magnitud vectorial que identifica el cambio de velocidad con el tiempo, la aceleración media.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_{(t')} - \vec{v}_{(t)}$$

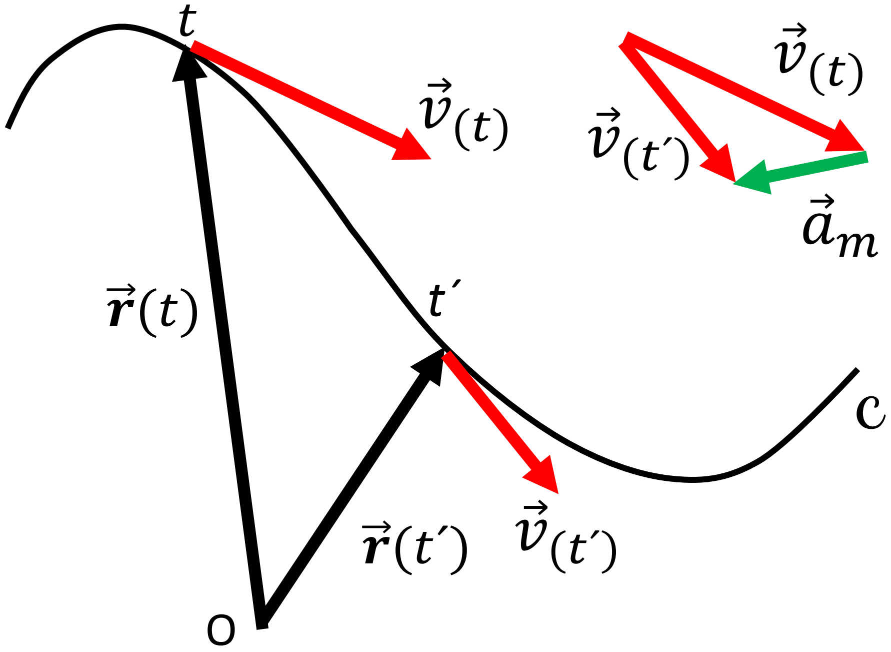


Figura 7. Aceleración media entre t y t´.

Aceleración instantánea (aceleración)

Para identificar la aceleración en un instante, hay que aplicar aproximaciones sucesivas. Este procedimiento define la aceleración instantánea.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

Aceleración instantánea (aceleración)

La derivación de la velocidad respecto al tiempo permite determinar la forma de la aceleración en coordenadas cartesianas.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(vx(t)\,\hat{\imath} + vy(t)\hat{\jmath} + vz(t)\hat{k})$$

Esto implica seis términos:

$$\vec{a}(t) = \frac{dvx}{dt}\hat{\imath} + \cancel{vx\frac{d\hat{\imath}}{dt}} + \frac{dvy}{dt}\hat{\jmath} + \cancel{vy\frac{d\hat{\jmath}}{dt}} + \frac{dvz}{dt}\hat{k} + \cancel{vz\frac{d\hat{k}}{dt}}$$

Como estas coordenadas son fijas, las derivadas de los versores valen cero y se llega a la expresión vectorial:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{dvx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dvy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dvz}{dt}\hat{k} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$

Integración de la aceleración

Es muy común que se conozcan las fuerzas que actúan sobre una partícula, entonces se puede conocer su aceleración y, a partir de ella, determinar el cambio de cada componente de la velocidad. Para determinar la ecuación de la velocidad hay que conocer las condiciones iniciales o de borde.

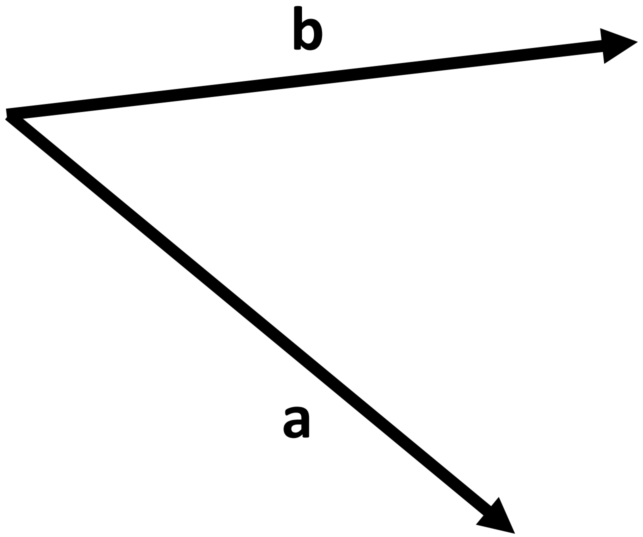
$$\Delta v_x = \int_{t_0}^{t} a_x \, dt \quad , \quad \Delta v_y = \int_{t_0}^{t} a_y \, dt \quad , \quad \Delta v_z = \int_{t_0}^{t} a_z \, dt$$

Integración de la velocidad

De la misma manera, se puede conocer la forma de la ecuación vectorial de la velocidad y se necesita encontrar el desplazamiento. Para determinar la ecuación de la posición hay que conocer las condiciones iniciales o de borde.

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v_x \, dt \quad , \quad \Delta y = \int_{t_0}^{t} v_y \, dt \quad , \quad \Delta z = \int_{t_0}^{t} v_z \, dt$$

<u>Comentario</u>: hay dos tipos de productos de vectores



c = **a.b**, c es un escalar.
Producto escalar
Multiplican las componentes PARALELAS entre sí.
Ej. Trabajo, flujo, circulación.

v = **a x b**, **v** es perpendicular a los vectores a y b.
Producto vectorial
Multiplican las componentes PERPENDICULARES entre sí. Ej. Momento angular, torque, fuerza magnética.