10-TEORÍA Y DESAFÍO TP N°1 DESIGUALDADES CLÁSICAS

ESTA LECTURA SE COMPONE DE RECORTES DE TEXTO DE LUIS SANTALO.

EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES LA LECTURA Y **LA ELECCIÓN DE UN SOLO PROBLEMA** PARA REALIZAR EN EL GEOGEBRA.

PUEDES INVESTIGAR MÁS INFO EN EL TEXTO DE ADAM PUIG ..LECCIÓN 24 PÁG 142.

1. Algunas desigualdades clásicas

La desigualdad aritmético-geométrica, es la clásica

(1) $$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

suponiendo x, y números reales positivos. La igualdad vale únicamente si $x = y$. La demostración es una consecuencia de la desigualdad

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0, \quad \text{o sea,} \quad x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0.$$

En general, para n números reales positivos, vale

(2) $$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Vamos a demostrarlo para $n = 4$, $n = 3$. La demostración general puede ser por inducción. Para $n = 4$ tenemos

$$(3)\quad (x\,y\,z\,t) = (x\,y)\,(z\,t) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \left(\frac{z+t}{2}\right)^2 \leq \left[\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{z+t}{2}\right)\right]^2$$

$$\leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4$$

y para $n = 3$, aplicando la última desigualdad

$$\sqrt[3]{x\,y\,z} = [xyz\,(xyz)^{1/3}]^{1/4} \leq \frac{x+y+z+(xyz)^{1/3}}{4}$$

de donde

$$(4)\qquad 3\sqrt[3]{xyz} \leq x+y+z\ , \quad \text{o sea } \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Las igualdades valen únicamente cuando las variables son iguales.

Otras desigualdades. Siendo $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, resulta $ab \leq (a^2+b^2)/2$. De aquí

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2x_1x_2 + \ldots + 2x_{n-1}x_n}{n^2}$$

$$\leq \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_3^2) + \ldots + (x_{n-1}^2 + x_n^2)}{n^2}$$

(5)

$$= \frac{n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}{n^2} = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

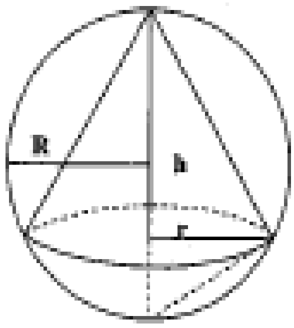
Aplicando (2) resulta también

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \right)^{1/2}$$

Desigualdades de este tipo pueden verse en BECKENBACH-BELLMAN, **Inequalities**, Springer, Berlín, 1966.

2. Aplicaciones

1. Inscribir en una esfera el cono de revolución de volumen máximo.



El volumen es $V = (1/3)\,\pi\, r^2 h$ y además, vale $r^2 = (2R - h)h$. Se puede escribir

$$V = (4\pi / 3). (h/2)\,(h/2)\,(2R - h)$$

y según la desigualdad (4)

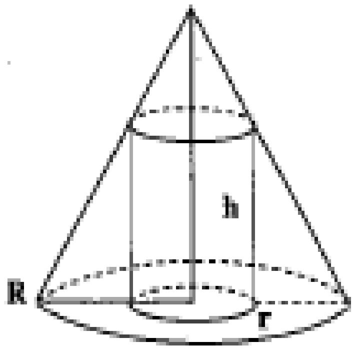
$$V \leq (4\pi / 3)\ \ (2R/3)^3$$

donde la igualdad vale cuando los 3 factores son iguales, o sea,

$$h/2 = 2R - h$$

Luego la solución se obtiene para $h = (4/3)\,R$.

2. Inscribir en un cono de revolución dado, el cilindro de volumen máximo.



Si H es la altura y R el radio de la base del cono y h, r la altura y el radio de la base del cilindro inscrito, es $V = \pi r^2 h$. Además

$$H / h = R / (R - r), \text{ de donde } h = H(R - r) / R$$

Por tanto, V se puede escribir (aplicando (4))

$$V = [(4\pi H) / R]\,[(r/2)(r/2)(R - r)] \leq (4\pi H / R)\,(R/3)^3$$

con la igualdad para $r/2 = R - r$ y por tanto $r = (2/3)R$.

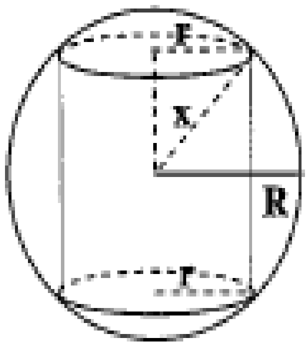
3. Se pide construir una lata cilíndrica de un volumen dado de manera que el área total (incluidas las bases) sea mínima.

Se tiene $F = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \pi rh + \pi rh + 2\pi r^2$ y por la desigualdad (4)

$$F \geq 3(2\pi^3 r^4 h^2)^{1/3}$$

La igualdad (F mínimo) vale para $\pi rh = 2\pi r^2$, o sea, $h = 2r$.

4. Inscribir en una esfera dada un cilindro circular recto de volumen máximo (KEPLER)



de donde, sumando,

$$\sqrt{x\,y} + \sqrt{y\,z} + \sqrt{x\,z} \leq x + y + z.$$

Multiplicando ambos miembros por 2 y añadiendo la suma $x + y + z$, resulta

$$(6) \qquad (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3(x + y + z)$$

donde la igualdad vale únicamente si $x = y = z$.

Problema 1. Hallar el máximo de la suma de las alturas dado el perímetro del triángulo.

Recordemos que llamando $2p$ al perímetro y F al área, es (fórmula de Heron)

$$F = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

y como también $2\,F = ah_a = bh_b = ch_c$ resulta

$$h_a = (2 / a)\,\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

Pero

$$4\,(p - b)\,(p - c) = (2p - 2b)\,(2p - 2c) = (a - (b - c))\,(a + (b - c)) =$$

$$= a^2 - (b - c)^2 \leq a^2$$

y por tanto

$$h_a \leq \sqrt{p\,(p - a)}$$

Sumando las desigualdades análogas para h_b, h_c resulta

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p}\,(\sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c})$$

y según la desigualdad (6)

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{p}\,\sqrt{3(3p - a - b - c)} = \sqrt{3}\,p$$

La igualdad valdrá solamente si $p - a = p - b = p - c$, o sea, si el triángulo es equilátero.

En resumen, se tiene la desigualdad

(7) $$0 \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}\ p$$

que se puede enunciar también: **entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de alturas.**

Problema 2. Desigualdades entre el perímetro y la suma de las bisectrices.

Se sabe que $w_a = (2 / (b + c)) \sqrt{p\, b\, c\, (p - a)}$

y como

$$b + c \geq 2 \sqrt{bc}$$

resulta

$$w_a \leq \sqrt{p\,(p - a)}$$

o sea,

$$w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{p}\ (\sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c}\ )$$

que aplicando (6) permite escribir

$$w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}\ p$$

con la igualdad solamente para el triángulo equilátero.

Para obtener una acotación inferior, llamando a_1, a_2 a los segmentos en que la bisectriz divide al lado a, y siendo un lado de un triángulo mayor o igual que la diferencia de los otros dos, se tiene

$$w_a \geq b - a_1 \ , \quad w_a \geq c - a_2 \ , \quad 2\, w_a \geq b + c - a.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para w_b , w_c y sumando, resulta

$$w_a + w_b + w_c \geq p$$

La igualdad valdrá solamente si $p - a = p - b = p - c$, o sea, si el triángulo es equilátero.

En resumen, se tiene la desigualdad

$$(7) \qquad 0 \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}\ p$$

que se puede enunciar también: **entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene máxima suma de alturas.**

Problema 2. Desigualdades entre el perímetro y la suma de las bisectrices.

Se sabe que $\quad w_a = (2 / (b + c)) \sqrt{p\, b\, c\, (p - a)}$

y como

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

resulta

$$w_a \leq \sqrt{p\,(p - a)}$$

o sea,

$$w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{p}\ (\sqrt{p - a} + \sqrt{p - b} + \sqrt{p - c}\ )$$

que aplicando (6) permite escribir

$$w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}\ p$$

con la igualdad solamente para el triángulo equilátero.

Para obtener una acotación inferior, llamando a_1, a_2 a los segmentos en que la bisectriz divide al lado a, y siendo un lado de un triángulo mayor o igual que la diferencia de los otros dos, se tiene

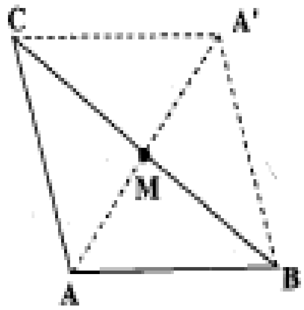
$$w_a \geq b - a_1 \ , \quad w_a \geq c - a_2 \ , \quad 2\, w_a \geq b + c - a.$$

Escribiendo las desigualdades análogas para w_b, w_c y sumando, resulta

$$w_a + w_b + w_c \geq p$$

La igualdad vale en este caso para el triángulo límite de uno isósceles cuyo ángulo desigual tienda a cero.

Problema 3. Desigualdades entre el perímetro y la suma de las medianas.



Prolongando la mediana m_a de un segmento $MA' = m_a$, resulta el paralelogramo ABA'C, del cual se deduce

$$2\, m_a \le b + c$$

Escribiendo las desigualdades análogas para las otras medianas, resulta

$$m_a + m_b + m_c \le 2p$$

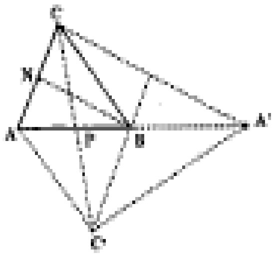
La igualdad vale únicamente para el caso límite de un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual tienda a 0.

Para hallar una acotación inferior de la suma de las medianas observemos la figura adjunta y el triángulo CC'A' que tiene por lados $2m_a$, $2m_b$, $2m_c$ y por medianas $(3/2)$ c, $(3/2)$b, $(3/2)$a. Aplicando la última desigualdad resulta

$$(3/2)(a + b + c) \le 2(m_a + m_b + m_c)$$

y por tanto

$$m_a + m_b + m_c \ge (3/2)\, p$$



El signo de igualdad vale en el mismo caso de antes.

Problema 4. Desigualdad entre el perímetro y el área.

Recordando la expresión del área F en función de los lados (HERON) y teniendo en cuenta que el producto de tres factores de suma constante es máximo cuando los 3 factores son iguales (fórmula (4) del número anterior) resulta

$$(\sqrt{3} / 36)\,(a + b + c)^2 \geq F$$

donde el signo igual vale únicamente para el triángulo equilátero.

EJERCICIOS

1. Observando la última figura de la página anterior, se obtiene fácilmente que dada la suma de las medianas, el triángulo de mayor área es el equilátero. Por tanto, vale

$$(\sqrt{3} / 27)\,(m_a + m_b + m_c)^2 \geq F$$

2. Para una suma de alturas dada, el área del triángulo puede ser tan grande como se quiera.

3. Probar la desigualdad

$$(3 / 4)\,(a^2 + b^2 + c^2) \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$$

4. Otras desigualdades:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,F\,, \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}\,F$$

5. Si P es cualquier punto interior de un triángulo, x_1, x_2, x_3 son las distancias a los vértices y p_1, p_2, p_3 sus distancias a los lados, valen las desigualdades

$$x_1\, x_2\, x_3 \geq 8\, p_1\, p_2\, p_3 \,, \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\,(p_1 + p_2 + p_3)$$

Se llaman desigualdades de ERDÖS - MORDELL (Guggenheimer, pág. 188).

6. Otras desigualdades:

$$(3/2) \leq a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) \leq 2$$

$$1/3 \leq (a^2 + b^2 + c^2)/(a+b+c)^2 < 1/2 \,.$$

$$(R+r)^2 \geq \sqrt{3}\, F \,, \quad 2/R \leq 3^{1/4}\, F^{-1/2} \leq r^{-1} .$$

OTRA BIBLIOGRAFIA. Es interesante, por la cantidad de problemas que plantea, el trabajo G. CORACH - J. McGOWAN - H. PORTA, Some inequalities for the triangle, Instituto Argentino de Matemática, preprint 124, 1987.