

Lösung zu 1a

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+8}{x+3} < 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner $(x+3)$ ist größer als Null:</i></p> <p>$x+3 > 0$ <i>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:</i> $2x+8 < 0 \cdot (x+3)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner $(x+3)$ ist kleiner als Null</i></p> <p>$x+3 < 0$ <i>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:</i> $2x+8 > 0 \cdot (x+3)$</p>
--	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$x+3 > 0$	$x+3 < 0$
$2x+8 < 0$	$2x+8 > 0$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 3.

In den beiden unteren Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 8:

$x+3 > 0$	$x+3 < 0$
$2x+8 < 0$	$2x+8 > 0$
$x > -3$	$x < -3$
$2x < -8$	$2x > -8$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 2,

$x > -3$	$x < -3$
$2x < -8$	$2x > -8$
$x > -3$	$x < -3$
$x < -4$	$x > -4$

Das linke System hat keine Lösung, das rechte System hat die Lösung $\boxed{-4 < x < -3}$.

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-4, -3)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid -4 < x < -3\}}}$$

Lösung zu 1b

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{6x + 12}{4x - 8} > 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

① Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner $(4x-8)$ ist größer als Null:</i></p> <p>$4x-8 > 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht umgedreht</u> werden:</p> <p>$6x + 12 > 0 \cdot (4x-8)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner $(4x-8)$ ist kleiner als Null</i></p> <p>$4x-8 < 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden:</p> <p>$6x + 12 < 0 \cdot (4x-8)$</p>
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$4x-8 > 0$	$4x-8 < 0$
$6x+12 > 0$	$6x+12 < 0$

⊙ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 8.

In den beiden unteren Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 12:

$4x-8 > 0$	$+8$	$4x-8 < 0$	$+8$
$6x+12 > 0$	-12	$6x+12 < 0$	-12
$4x > 8$		$4x < 8$	
$6x > -12$		$6x < -12$	

Die beiden oberen Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 4.

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 6:

$4x > 8$	$: 4$	$4x < 8$	$: 4$
$6x > -12$	$: 6$	$6x < -12$	$: 6$
$x > 2$		$x < 2$	
$x > -2$		$x < -2$	

Das linke System hat die Lösung $x > 2$, das rechte System hat die Lösung $x < -2$.

⊙ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x < -2 \text{ oder } x > 2\}}}$$

Lösung zu 1c

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x - 21}{x - 1} \leq 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner $(x-1)$ ist größer als Null:</i></p> <p>$x-1 > 0$ Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht umgedreht</u> werden: $3x - 21 \leq 0 \cdot (x-1)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner $(x-1)$ ist kleiner als Null</i></p> <p>$x-1 < 0$ Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden: $3x - 21 \geq 0 \cdot (x-1)$</p>
--	--

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$x-1 > 0$	$x-1 < 0$
$3x - 21 \leq 0$	$3x - 21 \geq 0$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 1.

In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir jeweils 21:

$x-1 > 0$	$+1$	$x-1 < 0$	$+1$
$3x - 21 \leq 0$	$+21$	$3x - 21 \geq 0$	$+21$
$x > 1$		$x < 1$	
$3x \leq 21$		$3x \geq 21$	

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 3:

$x > 1$		$x < 1$	
$3x \leq 21$	$: 3$	$3x \geq 21$	$: 3$
$x > 1$		$x < 1$	
$x \leq 7$		$x \geq 7$	

Das linke System hat die Lösung $1 < x \leq 7$, das rechte System hat keine Lösung.

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das halboffene Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (1, 7]}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid 1 < x \leq 7\}}}$$

Lösung zu 1d

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{7x - 21}{x - 1} \geq 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner $(x-1)$ ist größer als Null:</i></p> <p>$x-1 > 0$ Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht umgedreht</u> werden: $7x - 21 \geq 0 \cdot (x-1)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner $(x-1)$ ist kleiner als Null</i></p> <p>$x-1 < 0$ Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden: $7x - 21 \leq 0 \cdot (x-1)$</p>
--	--

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$x-1 > 0$	$x-1 < 0$
$7x - 21 \geq 0$	$7x - 21 \leq 0$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils 1.

In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir jeweils 21:

$x-1 > 0$	$x-1 < 0$
$7x - 21 \geq 0$	$7x - 21 \leq 0$
$x > 1$	$x < 1$
$7x \geq 21$	$7x \leq 21$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 7:

$x > 1$	$x < 1$
$7x \geq 21$	$7x \leq 21$
$x \geq 3$	$x \leq 3$

Das linke System hat die Lösung $x \geq 3$, das rechte System hat die Lösung $x < 1$

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, 1) \cup [3, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x < 1 \text{ oder } x \geq 3\}}}$$

Lösung zu 1e

① Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+6}{x+1} > 3 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

① Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner $(x+1)$ ist größer als Null:</i></p> <p>$x+1 > 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:</p> <p>$2x+6 > 3 \cdot (x+1)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner $(x+1)$ ist kleiner als Null</i></p> <p>$x+1 < 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden:</p> <p>$2x+6 < 3 \cdot (x+1)$</p>
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$x+1 > 0$	$x+1 < 0$
$2x+6 > 3 \cdot (x+1)$	$2x+6 < 3 \cdot (x+1)$

② Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 1, in den beiden unteren Ungleichungen multiplizieren wir die Klammer aus:

$x+1 > 0$	$x+1 < 0$
$2x+6 > 3 \cdot (x+1)$	$2x+6 < 3 \cdot (x+1)$
$\quad \quad \quad -1$	$\quad \quad \quad -1$
<i>ausmultiplizieren</i>	<i>ausmultiplizieren</i>

$x > -1$	$x < -1$
$2x+6 > 3x+3$	$2x+6 < 3x+3$

In den unteren Ungleichungen subtrahieren wir jeweils $2x$ und 3 :

$x > -1$	$x < -1$
$2x+6 > 3x+3$	$2x+6 < 3x+3$
$\quad \quad \quad -2x-3$	$\quad \quad \quad -2x-3$

$x > -1$	$x < -1$
$3 > x$	$3 < x$

Das linke System hat die Lösung: $\boxed{-1 < x < 3}$, das rechte System hat keine Lösung.

③ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, 3)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid -1 < x < 3\}}}$$

Lösung zu 1f

① Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{6x+4}{4x} < 2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

① Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner (4x) ist größer als Null:</i></p> <p>$4x > 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht umgedreht</u> werden:</p> <p>$6x + 4 < 2 \cdot 4x$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner (4x) ist kleiner als Null</i></p> <p>$4x < 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden:</p> <p>$6x + 4 > 2 \cdot 4x$</p>
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$4x > 0$	$4x < 0$
$6x + 4 < 2 \cdot 4x$	$6x + 4 > 2 \cdot 4x$

② Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 4, in den beiden unteren Ungleichungen subtrahieren wir jeweils 6x:

$4x > 0$	$: 4$	$4x < 0$	$: 4$
$6x + 4 < 2 \cdot 4x$	$-6x$	$6x + 4 > 2 \cdot 4x$	$-6x$

$x > 0$	$x < 0$
$4 < 2x$	$4 > 2x$

Die beiden unteren Ungleichungen dividieren wir jeweils durch 2,

$x > 0$	$x < 0$
$4 < 2x$	$4 > 2x$

$x > 0$	$x < 0$
$2 < x$	$2 > x$

Das linke System hat die Lösung: $x > 2$, das rechte System hat die Lösung $x < 0$.

③ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x < 0 \text{ oder } x > 2\}}}$$

Lösung zu 1g

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+21}{2x+1} \geq 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Ⓛ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner (2x+1) ist größer als Null:</i></p> $2x+1 > 0$ <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:</p> $3x+21 \geq 1 \cdot (2x+1)$	<p><i>Fall 2: Der Nenner (2x+1) ist kleiner als Null</i></p> $2x+1 < 0$ <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden:</p> $3x+21 \leq 1 \cdot (2x+1)$
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$2x+1 > 0$	$2x+1 < 0$
$3x+21 \geq 1 \cdot (2x+1)$	$3x+21 \leq 1 \cdot (2x+1)$

Ⓜ Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir „1“, in den unteren „21“:

$2x+1 > 0 \quad -1$	$2x+1 < 0 \quad -1$
$3x+21 \geq 2x+1 \quad -21$	$3x+21 \leq 2x+1 \quad -21$

$2x > -1$	$2x < -1$
$3x \geq 2x - 20$	$3x \leq 2x - 20$

Die oberen Ungleichungen durch 2 dividieren, und in den unteren Ungleichungen 2x subtrahieren:

$2x > -1 \quad :2$	$2x < -1 \quad :2$
$3x \geq 2x - 20 \quad -2x$	$3x \leq 2x - 20 \quad -2x$

$x > -\frac{1}{2}$	$x < -\frac{1}{2}$
$x \geq -20$	$x \leq -20$

Das linke System hat die Lösung: $x > -\frac{1}{2}$, das rechte System hat die Lösung $x \leq -20$.

Ⓝ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$L = \left(-\infty, -20 \right] \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty \right) \text{ bzw. } L = \left\{ x \mid x \leq -20 \text{ oder } x > -\frac{1}{2} \right\}$$

Lösung zu 1h

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{4x-4}{2x+3} \geq 2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

❶ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner (2x+3) ist größer als Null:</i></p> $2x+3 > 0$ <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <i>nicht</i> umgedreht werden:</p> $4x-4 \geq 2 \cdot (2x+3)$	<p><i>Fall 2: Der Nenner (2x+3) ist kleiner als Null</i></p> $2x+3 < 0$ <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <i>umgedreht</i> werden:</p> $4x-4 \leq 2 \cdot (2x+3)$
--	--

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems:

$2x+3 > 0$	$2x+3 < 0$
$4x-4 \geq 2 \cdot (2x+3)$	$4x-4 \leq 2 \cdot (2x+3)$

❷ Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „3“, die unteren multiplizieren wir aus:

$2x+3 > 0$	$2x+3 < 0$
$4x-4 \geq 2 \cdot (2x+3)$	$4x-4 \leq 2 \cdot (2x+3)$
-3	-3
<i>ausmultiplizieren</i>	<i>ausmultiplizieren</i>

$2x > -3$	$2x < -3$
$4x-4 \geq 4x+6$	$4x-4 \leq 4x+6$

Die oberen Ungleichungen durch 2 dividieren, und in den unteren Ungleichungen 4x subtrahieren:

$2x > -3$	$2x < -3$
$4x-4 \geq 4x+6$	$4x-4 \leq 4x+6$
$: 2$	$: 2$
$-4x$	$-4x$

$x > \frac{-3}{2}$	$x < \frac{-3}{2}$
$-4 \geq 6$	$-4 \leq 6$

Das linke System hat keine Lösung, das rechte System hat die Lösung $x \leq -\frac{3}{2}$.

❸ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil die Intervalle auch im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$L = \left(-\infty, -\frac{3}{2} \right) \text{ bzw. } L = \left\{ x \mid x \leq -\frac{3}{2} \right\}$$

Lösung zu 1i

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{2x+2} > 0$$

Klammere im rechten Bruch die Zahl „2“ aus, und zwar im Zähler und im Nenner:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{2(3x-1)}{2(x+1)} > 0$$

Kürze den rechten Bruch mit „2“:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} > 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+6 - (3x-1)}{x+1} > 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{2x+6 - 3x+1}{x+1} > 0$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{7-x}{x+1} > 0$$

❸ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner (x+1) ist größer als Null:</i></p> <p>$x+1 > 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <i>nicht</i> umgedreht werden:</p> <p>$7-x > 0 \cdot (x+1)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner (x+1) ist kleiner als Null</i></p> <p>$x+1 < 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <i>umgedreht</i> werden:</p> <p>$7-x < 0 \cdot (x+1)$</p>
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$x+1 > 0$	$x+1 < 0$
$7-x > 0 \cdot (x+1)$	$7-x < 0 \cdot (x+1)$

④ Ungleichungssysteme lösen:

Die beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „1“, die unteren vereinfache wir:

$$\begin{array}{l|l} x+1 > 0 & x+1 < 0 \\ \hline 7-x > 0 \cdot (x+1) & 7-x < 0 \cdot (x+1) \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x > -1 & x < -1 \\ \hline 7-x > 0 & 7-x < 0 \end{array}$$

In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir x:

$$\begin{array}{l|l} x > -1 & x < -1 \\ \hline 7-x > 0 & 7-x < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} +x \\ +x \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x > -1 & x < -1 \\ \hline 7 > x & 7 < x \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung $-1 < x < 7$, das rechte System hat keine Lösung

⑤ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, 7)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid -1 < x < 7\}}}$$

Lösung zu 1j

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6x-6}{3x+3} \geq 0$$

Klammere im rechten Bruch die Zahl „3“ aus, und zwar im Zähler und im Nenner:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{3(2x-2)}{3(x+1)} \geq 0$$

Kürze den rechten Bruch mit „3“:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{2x-2}{x+1} \geq 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+2 - (2x-2)}{x+1} \geq 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{2x+2 - 2x+2}{x+1} \geq 0$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{4}{x+1} \geq 0$$

❸ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

<p><i>Fall 1: Der Nenner (x+1) ist größer als Null:</i></p> <p>$x+1 > 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>nicht</u> umgedreht werden:</p> <p>$4 > 0 \cdot (x+1)$</p>	<p><i>Fall 2: Der Nenner (x+1) ist kleiner als Null</i></p> <p>$x+1 < 0$</p> <p>Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner <u>umgedreht</u> werden:</p> <p>$4 < 0 \cdot (x+1)$</p>
---	---

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$x+1 > 0$	$x+1 < 0$
$4 > 0$	$4 < 0$

④ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „1“:

$$\begin{array}{l|l} x+1 > 0 & -1 \\ \hline 4 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} x+1 < 0 & -1 \\ \hline 4 < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x > -1 & \\ \hline 4 > 0 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} x < -1 & \\ \hline 4 < 0 \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung $x > -1$.

Das rechte System hat keine Lösung, denn 4 ist nicht kleiner als Null.

⑤ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x > -1\}}}$$

Lösung zu 1k

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

❶ Versuche die Brüche zu kürzen:

Kürze den linken Bruch mit x:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{6x-18}{4x-12}$$

Klammere rechten Bruch die Zahl „6“ im Zähler aus, und die Zahl „4“ im Nenner:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{6(x-3)}{4(x-3)}$$

Kürze den rechten Bruch mit x-3:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{6}{4}$$

Kürze den rechten Bruch mit 2:

$$\frac{3}{2} \geq \frac{2}{2}$$

❷ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Diese Ungleichung ist für alle Zahlen aus \mathbb{R} wahr. Allerdings müssen wir beachten, dass die Zahlen 0 und 3 nicht im Definitionsbereich der gegebenen Ungleichung liegen. Daher lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}\}}}$$

Lösung zu 1I

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x+15}{2x-2} \geq \frac{6x+3}{4x-4} \quad D=\mathbb{R} \setminus \{1\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{4x-4} \geq 0$$

Klammere im Nenner des rechten Bruch die Zahl „2“ aus:

$$\frac{3x+15}{2x-2} - \frac{6x+3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Erweitere den linken Bruch mit 2:

$$\frac{2(3x+15)}{2(2x-2)} - \frac{6x+3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2(3x+15) - (6x+3)}{2(2x-2)} \geq 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Löse zuerst die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, muss man die Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{2(3x+15) - 6x - 3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Multipliziere jetzt die Klammer im Zähler aus:

$$\frac{6x+30-6x-3}{2(2x-2)} \geq 0$$

Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{27}{2(2x-2)} \geq 0$$

❸ Vereinfache den Bruch

Klammer im Nenner 2 aus der Klammer aus:

$$\frac{27}{4(x-1)} \geq 0$$

Multipliziere die Ungleichung mit $\frac{4}{27}$:

$$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{4(x-1)} \geq 0 \cdot \frac{4}{27}$$

Lösungen zu 1

Kürze den Bruch auf der linken Seite der Ungleichung. Die rechte Seite bleibt Null:

$$\frac{1}{x-1} \geq 0$$

④ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

*Fall 1: Der Nenner $(x-1)$
ist größer als Null:*

$$x-1 > 0$$

*Das Ungleichheitszeichen muss
deshalb bei der Multiplikation mit
dem Nenner nicht umgedreht werden:*

$$1 \geq 0 \cdot (x-1)$$

*Fall 2: Der Nenner $(x-1)$
ist kleiner als Null*

$$x-1 < 0$$

*Das Ungleichheitszeichen muss
deshalb bei der Multiplikation mit
dem Nenner umgedreht werden:*

$$1 \leq 0 \cdot (x-1)$$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 1 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-1 < 0 \\ 1 \leq 0 \end{array}$$

⑤ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen addieren wir jeweils „1“:

$$\begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 1 \geq 0 \end{array} +1$$

$$\begin{array}{l} x-1 < 0 \\ 1 \leq 0 \end{array} +1$$

$$\begin{array}{l} x > 1 \\ 1 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x < 1 \\ 1 \leq 0 \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung $x > 1$.

Das rechte System hat keine Lösung, denn 1 ist nicht kleiner oder gleich Null.

⑥ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil das Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (1, \infty)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid x > 1\}}}$$

Lösung zu 1m

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{4}{10} \right\}$$

❶ Versuche die Brüche zu kürzen:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{4x+2}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Klammere im Zähler des linken Bruches die Zahl „2“ aus:

$$\frac{2(2x+1)}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Kürze im linken Bruch den Term $2x+1$:

$$2 - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Klammere im Nenner des rechten Bruches die Zahl „2“ aus:

$$2 - \frac{5x+2}{2(5x+2)} < 0$$

Kürze im Bruch den Term $5x+2$:

$$2 - \frac{1}{2} < 0$$

❷ Lösungsmenge angeben

Weil die Ungleichung nicht wahr werden kann, hat die gegebene Bruchungleichung keine Lösung:

$$\underline{\underline{L = \{}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \emptyset}}$$

Lösung zu 1n

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

❶ Bringe beide Brüche auf einen Bruchstrich:

Bringe beide Brüche auf eine Seite:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{6x+9} < 0$$

Klammere im Nenner des rechten Bruch die Zahl „3“ aus:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Erweitere den linken Bruch mit 3:

$$\frac{3(x+2)}{3(2x+3)} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Weil jetzt beide Brüche gleichnamig sind, dürfen wir sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{3(x+2) - (5x+2)}{3(2x+3)} < 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Löse die Klammern im Zähler auf. Beim Auflösen der rechten Klammer muss man beachten, dass man die Rechenzeichen in der Klammer umdrehen muss, weil ein MINUS vor der Klammer steht:

$$\frac{3x+6-5x-2}{3(2x+3)} < 0$$

Vereinfache den Zähler weiter: Fasse gleiche Terme zusammen:

$$\frac{4-2x}{3(2x+3)} < 0$$

Lösungen zu 1

③ Vereinfache den Nenner

Multipliziere die Klammer im Nenner aus:

$$\frac{4-2x}{6x+9} < 0$$

④ Gleichung mit dem Nenner multiplizieren (Fallunterscheidung):

Weil wir nicht wissen, ob der Nenner positiv oder negativ ist (bei negativen Nenner muß man bekanntlich das Ungleichheitszeichen umdrehen), müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Fall 1: Der Nenner $(6x+9)$
ist größer als Null:

$$6x+9 > 0$$

Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner *nicht* umgedreht werden:

$$4-2x < 0 \cdot 6x+9$$

Fall 2: Der Nenner $(6x+9)$
ist kleiner als Null

$$6x+9 < 0$$

Das Ungleichheitszeichen muss deshalb bei der Multiplikation mit dem Nenner umgedreht werden:

$$4-2x > 0 \cdot 6x+9$$

Wir schreiben beide Fälle jeweils in Form eines Ungleichungssystems (und vereinfachen sie):

$$\begin{array}{l} 6x+9 > 0 \\ 4-2x < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x+9 < 0 \\ 4-2x > 0 \end{array}$$

⑤ Ungleichungssysteme lösen:

In den beiden oberen Ungleichungen subtrahieren wir jeweils „9“.

In den beiden unteren Ungleichungen addieren wir jeweils „2x“:

$$\begin{array}{l} 6x-9 > 0 \\ 4-2x < 0 \end{array} \begin{array}{l} -9 \\ +2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x-9 < 0 \\ 4-2x > 0 \end{array} \begin{array}{l} -9 \\ +2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x > -9 \\ 4 < 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x < -9 \\ 4 > 2x \end{array}$$

Die oberen Ungleichungen dividieren wir durch 6, die unteren durch 2:

$$\begin{array}{l} x > -\frac{9}{6} \\ 2 < x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x < -\frac{9}{6} \\ 2 > x \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung $x > 2$, das rechte hat die Lösung $x < -\frac{9}{6}$ bzw. $x < -\frac{3}{2}$.

⑥ Lösungsmenge angeben (Definitionsbereich beachten):

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden die Intervalle auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)}} \text{ bzw. } \underline{\underline{L = \{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ oder } x > 2\}}}$$

Lösung zu 2a

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+6}{x+1} > 3 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

① Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\frac{2x+6}{x+1} - 3 > 0$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3(x+1)}{(x+1)} > 0$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{2x+6-3(x+1)}{x+1} > 0$$

② Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die Klammer im Zähler aus:

$$\frac{2x+6-3x-3}{x+1} > 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{3-x}{x+1} > 0$$

③ Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3-x > 0 \\ x+1 > 0 \end{array}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{l} 3-x < 0 \\ x+1 < 0 \end{array}}$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.

In den oberen Ungleichungen müssen wir x addieren, und in den unteren 1 subtrahieren:

$$\begin{array}{l|l} 3 - x > 0 & +x \\ \hline x + 1 > 0 & -1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l|l} 3 - x < 0 & +x \\ \hline x + 1 < 0 & -1 \end{array}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} 3 > x & \\ \hline x > -1 & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l|l} 3 < x & \\ \hline x < -1 & \end{array}$$

Das rechte System hat keine Lösung, denn eine Zahl x kann nicht größer als 3 und gleichzeitig kleiner als -1 sein. Das linke System hat die Lösung:

$$-1 < x < 3$$

Weil dieses Intervall auch im Definitionsbereich liegt, bildet es auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, 3)}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{L = \{x \mid -1 < x < 3\}}}$$

Lösung zu 2b

⓪ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{6x+4}{4x} < 2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\frac{6x+4}{4x} - 2 < 0$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\frac{6x+4}{4x} - \frac{2 \cdot 4x}{4x} < 0$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{6x+4-8x}{4x} < 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{4-2x}{4x} < 0$$

Klammere „2“ aus:

$$\frac{2(2-x)}{2 \cdot 2x} < 0$$

Kürze mit 2:

$$\frac{2-x}{2x} < 0$$

❸ Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist kleiner als Null, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left. \begin{array}{l} 2-x > 0 \\ 2x < 0 \end{array} \right| \text{ oder } \left. \begin{array}{l} 2-x < 0 \\ 2x > 0 \end{array} \right|$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.

In den oberen Ungleichungen müssen wir x addieren, und in den unteren 1 subtrahieren:

$$\begin{array}{l} 2 - x > 0 \\ \underline{2x < 0} \end{array} \begin{array}{l} | +x \\ : 2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 - x < 0 \\ \underline{2x > 0} \end{array} \begin{array}{l} | +x \\ : 2 \end{array}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{array}{l} 2 > x \\ \underline{x < 0} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 < x \\ \underline{x > 0} \end{array}$$

Das linke System hat die Lösung $x < 0$, das rechte System hat die Lösung $x > 2$.

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden sie auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \{x \mid -\infty < x < 0 \text{ oder } 2 < x < \infty\}}}$$

Lösung zu 2c

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x + 21}{2x + 1} \geq 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

❶ Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\frac{3x + 21}{2x + 1} - 1 \geq 0$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\frac{3x + 21}{2x + 1} - \frac{1 \cdot (2x + 1)}{(2x + 1)} \geq 0$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{3x + 21 - (2x + 1)}{2x + 1} \geq 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Wir lösen die Klammer auf. Weil ein „Minus“ vor der Klammer steht, müssen wir alle Rechenzeichen umdrehen:

$$\frac{3x + 21 - 2x - 1}{2x + 1} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{x + 20}{2x + 1} \geq 0$$

❸ Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} x + 20 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{array} \right\} \text{ oder } \left. \begin{array}{l} x + 20 < 0 \\ 2x + 1 < 0 \end{array} \right\} \text{ oder } x + 20 = 0$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme und die einzelne Gleichung lösen.

$$\begin{array}{l} x + 20 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} -20 \\ -1 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} x + 20 < 0 \\ 2x + 1 < 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} -20 \\ -1 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad x + 20 = 0$$

In den oberen Ungleichungen müssen wir 20 subtrahieren, und in den unteren 1:
Die einzelne Gleichung kann man sofort lösen, indem man 20 auf beiden Seiten subtrahiert:

$$\begin{array}{l} x > -20 \\ 2x > -1 \end{array} \left| \right. \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} x < -20 \\ 2x < -1 \end{array} \left| \right. \quad \text{oder} \quad x = -20$$

In den unteren Ungleichungen müssen wir nun durch 2 teilen:

$$\begin{array}{l} x > -20 \\ x > \frac{-1}{2} \end{array} \left| \right. \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} x < -20 \\ x < \frac{-1}{2} \end{array} \left| \right. \quad \text{oder} \quad x = -20$$

Das linke System hat die Lösung:

$$x > -\frac{1}{2}$$

Das rechte System hat die Lösung:

$$x < -20$$

Die einzelne Gleichung hatten wir schon gelöst:

$$x = -20$$

Weil alle drei Lösungen im Definitionsbereich liegen, lautet die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \left(-\infty, -20\right] \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)}}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \left\{x \mid x \leq -20 \text{ oder } x > -\frac{1}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 2d

Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{4x-4}{2x+3} \geq 2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Bruch und Zahl auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen Bruch und Zahl auf die gleiche Seite:

$$\frac{4x-4}{2x+3} - 2 \geq 0$$

Wir erweitern die Zahl mit dem Nenner des Bruches:

$$\frac{4x-4}{2x+3} - \frac{2(2x+3)}{(2x+3)} \geq 0$$

Weil die Brüche nun den gleichen Nenner haben, können wir sie zu einem Bruch zusammenfassen:

$$\frac{4x-4-2(2x+3)}{2x+3} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die Klammer im Zähler aus:

$$\frac{4x-4-4x-6}{2x+3} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{-10}{2x+3} \geq 0$$

Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} -10 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{array} \right| \text{ oder } \left. \begin{array}{l} -10 < 0 \\ 2x+3 < 0 \end{array} \right| \text{ oder } -10=0$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung lösen.

Das linke Ungleichungssystem hat keine Lösung (weil -10 nicht größer als Null ist). Die Gleichung hat ebenfalls keine Lösung. Wir müssen also nur das Ungleichungssystem in der Mitte lösen. Dazu subtrahieren wir 3 auf beiden Seiten der unteren Ungleichung:

$$\begin{array}{l} -10 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} -10 < 0 \\ 2x + 3 < 0 \end{array} \quad -3 \quad \text{oder} \quad -10 = 0$$

Jetzt teilen wir die untere Ungleichung im mittleren System durch 2

$$\begin{array}{l} -10 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} -10 < 0 \\ 2x < -3 \end{array} : 2 \quad \text{oder} \quad -10 = 0$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} -10 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} -10 < 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{array} \quad \text{oder} \quad -10 = 0$$

Wie gesagt, haben das linke System und die rechte Gleichung keine Lösung.

Die Lösung des Systems in der Mitte kann man jetzt ablesen. Die obere Ungleichung ist immer wahr, und die untere ist wahr, wenn x kleiner als $-\frac{3}{2}$ ist.

Das Ergebnis ist also das Intervall:

$$x < -\frac{3}{2}$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \left\{x \mid x < -\frac{3}{2}\right\}}}$$

Lösung zu 2e

0 Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+6}{x+1} > \frac{6x-2}{2x+2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1 Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{6x-2}{2x+2} > 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „2“ im Zähler und im Nenner ausklammern:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{2(3x-1)}{2(x+1)} > 0$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „2“ kürzen:

$$\frac{2x+6}{x+1} - \frac{3x-1}{x+1} > 0$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+6-(3x-1)}{x+1} > 0$$

2 Vereinfache den Zähler:

Wir lösen die Klammer im Zähler auf. Weil ein MINUS vor der Klammer steht, müssen wir die Rechenzeichen in der Klammer umdrehen:

$$\frac{2x+6-3x+1}{x+1} > 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{7-x}{x+1} > 0$$

3 Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\left. \begin{array}{l} 7-x > 0 \\ x+1 > 0 \end{array} \right| \quad \text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} 7-x < 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right|$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen.

Dazu addieren wir in den oberen Ungleichungen x , und subtrahieren in den unteren Ungleichungen die Zahl 1:

$$\begin{array}{l|l} 7 - x > 0 & +x \\ \hline x + 1 > 0 & -1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l|l} 7 - x < 0 & +x \\ \hline x + 1 < 0 & -1 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{l|l} 7 > x & \\ \hline x > -1 & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l|l} 7 < x & \\ \hline x < -1 & \end{array}$$

Das rechte System hat keine Lösung, denn x kann nicht größer als 7 und gleichzeitig kleiner als -1 sein. Es bleibt also nur das linke System übrig:

$$\begin{array}{l|l} 7 > x & \\ \hline x > -1 & \end{array}$$

Das übrig gebliebene Ungleichungssystem hat als Lösung:

$$-1 < x < 7$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, 7)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \{x \mid -1 < x < 7\}}}$$

Lösung zu 2f

0 Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{2x+2}{x+1} \geq \frac{6x-6}{3x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1 Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6x-6}{3x+3} \geq 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „6“ im Zähler und die Zahl „3“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{6(x-1)}{3(x+1)} \geq 0$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „3“ kürzen:

$$\frac{2x+2}{x+1} - \frac{2(x-1)}{(x+1)} \geq 0$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{2x+2-2(x-1)}{x+1} \geq 0$$

2 Vereinfache den Zähler:

Im Zähler multiplizieren wir die Klammer aus:

$$\frac{2x+2-2x+2}{x+1} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{4}{x+1} \geq 0$$

3 Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} 4 > 0 \\ x+1 > 0 \end{array} \right| \text{ oder } \left. \begin{array}{l} 4 < 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right| \text{ oder } 4=0$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen und die Gleichung lösen.
Die Gleichung hat keine Lösung, denn 4 ist niemals gleich Null. Das rechte System hat auch keine Lösung, denn 4 ist niemals kleiner als Null:

$$\begin{array}{l} 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 4 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad 4 = 0$$

Es bleibt also nur das linke Ungleichungssystem übrig. Um es zu lösen, isolieren wir in der unteren Ungleichung x , indem wir auf beiden Seiten 1 subtrahieren:

$$\begin{array}{l} 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{array} \quad -1$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} 4 > 0 \\ x > -1 \end{array}$$

Wir lesen die Lösung des Systems ab: Die obere Ungleichung ist immer wahr. Die untere Ungleichung ist nur wahr, wenn x größer als -1 . Die Lösung des Systems lautet also:

$$x > -1$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (-1, \infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \{x \mid -1 < x\}}}$$

Lösung zu 2g

⊙ Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x}{2x} \geq \frac{6x-18}{4x-12} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$$

❶ Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{3x}{2x} - \frac{6x-18}{4x-12} \geq 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „6“ im Zähler und die Zahl „4“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{3x}{2x} - \frac{6(x-3)}{4(x-3)} \geq 0$$

Dadurch können wir jetzt den rechten Bruch mit „2“ kürzen:

$$\frac{3x}{2x} - \frac{3(x-3)}{2(x-3)} \geq 0$$

Außerdem können wir im rechten Bruch auch noch mit $(x-3)$ kürzen:

$$\frac{3x}{2x} - \frac{3}{2} \geq 0$$

Im linken Bruch können wir mit x kürzen:

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \geq 0$$

Die Brüche sind nun gleichnamig (haben gleiche Nenner) und wir können sie auf einen Bruchstrich bringen (man sieht aber auch schon, dass die linke Seite zu Null wird):

$$\frac{3-3}{2} \geq 0$$

❷ Vereinfache den Zähler:

Vereinfache den Zähler:

$$\frac{0}{2} \geq 0$$

Vereinfache linke Seite:

$$0 \geq 0$$

❸ Stelle die Lösungsmenge auf:

Diese Ungleichung ist für alle Zahlen aus \mathbb{R} wahr. Allerdings müssen wir beachten, dass die Zahlen 0 und 3 nicht im Definitionsbereich der gegebenen Ungleichung liegen. Daher lautet die Lösungsmenge:

$$L = \underline{\underline{\{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}\}}}$$

Lösung zu 2h

0 Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{3x + 15}{2x - 2} \geq \frac{6x + 3}{4x - 4} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1 Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{3x + 15}{2x - 2} - \frac{6x + 3}{4x - 4} \geq 0$$

Im linken Bruch können wir die Zahl „3“ im Zähler und die Zahl „2“ im Nenner ausklammern.

$$\frac{3(x + 5)}{2(x - 1)} - \frac{6x + 3}{4x - 4} \geq 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „3“ im Zähler und die Zahl „4“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{3(x + 5)}{2(x - 1)} - \frac{3(2x + 1)}{4(x - 1)} \geq 0$$

Jetzt erweitern wir den linken Bruch mit 2, sodass die Brüche gleichnamig werden:

$$\frac{6(x + 5)}{4(x - 1)} - \frac{3(2x + 1)}{4(x - 1)} \geq 0$$

Jetzt haben beide Brüche den gleichen Nenner, und wir können sie auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{6(x + 5) - 3(2x + 1)}{4(x - 1)} \geq 0$$

2 Vereinfache den Zähler:

Im Zähler multiplizieren wir die Klammer aus:

$$\frac{6x + 30 - 6x - 3}{4(x - 1)} \geq 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{27}{4(x - 1)} \geq 0$$

3 Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist größer als Null, wenn Zähler und Nenner größer als Null sind,
oder wenn beide kleiner als Null sind.

Der Bruch ist gleich Null, wenn der Zähler gleich Null ist.

Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen und einer Gleichung:

$$\left. \begin{array}{l} 27 > 0 \\ 4(x - 1) > 0 \end{array} \right| \text{ oder } \left. \begin{array}{l} 27 < 0 \\ 4(x - 1) < 0 \end{array} \right| \text{ oder } 27 = 0$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme und die Gleichung:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen und die Gleichung lösen.

Die Gleichung hat keine Lösung, denn 27 ist niemals gleich Null.

Das rechte System hat auch keine Lösung, denn 27 ist niemals kleiner als Null:

$$\left. \begin{array}{l} 27 > 0 \\ 4(x-1) > 0 \end{array} \right| \text{ oder } \left. \begin{array}{l} 27 < 0 \\ 4(x-1) < 0 \end{array} \right| \text{ oder } 27=0$$

Es bleibt also nur das linke Ungleichungssystem übrig. Um es zu lösen, isolieren wir in der unteren Ungleichung x , indem wir zunächst beiden Seiten durch 4 dividieren:

$$\left. \begin{array}{l} 27 > 0 \\ 4(x-1) > 0 \end{array} \right| :4$$

Wir erhalten:

$$\left. \begin{array}{l} 27 > 0 \\ x-1 > 0 \end{array} \right|$$

In der unteren Ungleichung addieren wir auf beiden Seiten „1“ und erhalten:

$$\left. \begin{array}{l} 27 > 0 \\ x > 1 \end{array} \right|$$

Wir lesen die Lösung des Systems ab: Die obere Ungleichung ist immer wahr. Die untere Ungleichung ist nur wahr, wenn x größer als 1. Die Lösung des Systems lautet also:

$$x > 1$$

Weil das Intervall im Definitionsbereich liegt, bildet das Intervall auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = (1, \infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \{x \mid x > 1\}}}$$

Lösung zu 2i

Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{4x+2}{2x+1} < \frac{5x+2}{10x+4} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} \right\}$$

Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir versuchen zunächst, beide Brüche zu kürzen, um sie leichter auf einen Bruchstrich zu bringen.

Wir bringen alle Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{4x+2}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Im linken Bruch können wir im Zähler die Zahl „2“ ausklammern:

$$\frac{2(2x+1)}{2x+1} - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Dadurch können wir im linken Bruch mit (2x+1) kürzen:

$$2 - \frac{5x+2}{10x+4} < 0$$

Im anderen Bruch können im Nenner die Zahl 2 ausklammern:

$$2 - \frac{5x+2}{2(5x+2)} < 0$$

Dadurch können wir den Bruch mit (5x+2) kürzen:

$$2 - \frac{1}{2} < 0$$

Vereinfachen:

$$\frac{3}{2} < 0$$

Weil diese Ungleichung keine Lösung hat, hat auch die gegebene Ungleichung keine Lösung:

$$\underline{\underline{L = \emptyset}} \quad \text{oder anders geschrieben:} \quad \underline{\underline{L = \{ \}}}$$

Lösung zu 2j

Gegebene Bruchungleichung:

Gegeben ist die Bruchungleichung:

$$\frac{x+2}{2x+3} < \frac{5x+2}{6x+9} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Beide Brüche auf einen Bruchstrich bringen:

Wir bringen beide Brüche auf die gleiche Seite:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{6x+9} < 0$$

Im rechten Bruch können wir die Zahl „3“ im Nenner ausklammern:

$$\frac{x+2}{2x+3} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Wenn wir jetzt den linken Bruch mit 3 erweitern, dann haben beide Brüche den gleichen Nenner:

$$\frac{3(x+2)}{3(2x+3)} - \frac{5x+2}{3(2x+3)} < 0$$

Weil jetzt beide Brüche den gleichen Nenner haben, kann man sie einen Bruchstrich schreiben:

$$\frac{3(x+2) - (5x+2)}{3(2x+3)} < 0$$

Vereinfache den Zähler:

Wir multiplizieren die linke Klammer im Zähler aus, und lösen die rechte Klammer auf:

$$\frac{3x+6-5x-2}{3(2x+3)} < 0$$

Vereinfache den Zähler, indem du gleiche Terme zusammenfaßt:

$$\frac{4-2x}{3(2x+3)} < 0$$

Klammere im Zähler „2“ aus:

$$\frac{2(2-x)}{3(2x+3)} < 0$$

Multipliziere die Ungleichung mit 3/2 und kürze dann:

$$\frac{2-x}{2x+3} < 0$$

③ Wende den Satz über das Vorzeichen eines Bruches an

Wende den folgenden Satz an:

Ein Bruch ist kleiner als Null, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies führt zu zwei Ungleichungssystemen:

$$\begin{array}{l} 2 - x > 0 \\ \underline{2x + 3 < 0} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 - x < 0 \\ \underline{2x + 3 > 0} \end{array}$$

④ Löse die beiden Ungleichungssysteme:

Jetzt müssen wir die beiden Ungleichungssysteme lösen. Dazu addieren wir in den oberen Ungleichungen x , und die unteren Ungleichungen subtrahieren wir 3 :

$$\begin{array}{l} 2 - x > 0 \\ \underline{2x + 3 < 0} \end{array} \begin{array}{l} +x \\ -3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 - x < 0 \\ \underline{2x + 3 > 0} \end{array} \begin{array}{l} +x \\ -3 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$\begin{array}{l} 2 > x \\ \underline{2x < -3} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 < x \\ \underline{2x > -3} \end{array}$$

Die unteren Ungleichungen müssen durch 2 dividieren:

$$\begin{array}{l} 2 > x \\ \underline{x < -\frac{3}{2}} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 2 < x \\ \underline{x > -\frac{3}{2}} \end{array}$$

Das linke System hat als Lösung:

$$x < -\frac{3}{2}$$

Das rechte System hat die Lösung:

$$x > 2$$

Weil beide Intervalle im Definitionsbereich liegen, bilden die Intervalle auch die Lösungsmenge:

$$\underline{\underline{L = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)}}$$

bzw.

$$\underline{\underline{L = \left\{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ oder } x > 2\right\}}}$$

