

Lembar kerja 2 Jarak dua titik di bumi

1. Lintasan terpendek dua titik di permukaan bumi



Gambar di atas merupakan tangkapan layar dari google earth. Titik A terletak di $30^{\circ}LU\ 40^{\circ}BT$, titik B di $30^{\circ}LU\ 110^{\circ}BT$ (Tanda +) dengan LU dan BT berturut-turut menyatakan posisi lintang dan bujur.

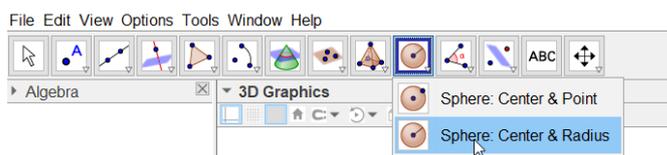
1. Lukislah pada gambar di atas, lintasan terpendek dari A ke B.
2. Lukislah pada globe (peta bola bumi), lintasan terpendek dari A ke B.
3. Buka google map, cocokkan jalur yang anda buat dengan hasil di google map. Adakah perbedaan? Mengapa?

Jawab:

2. Mendapatkan jarak terpendek di permukaan bola dengan GeoGebra

Menggunakan aplikasi GeoGebra:

1. Buka GeoGebra 3dimensi.
View → 3D graphics
2. Buat bola berpusat di (0,0) berjari-jari 1 menggunakan tool



3. Buat titik B dan C pada permukaan bola. (Klik tool new point, arahkan ke bola, klik. Ulangi untuk titik satunya. Tool:  Point .
4. Membuat jalur terpendek dari A ke B dengan tool circular arc, klik A (pusat bola), klik B, klik C.
Tool:  Circular Arc .
5. Lihat di jendela aljabar, panjang busur ini.

Untuk aktivitas 2 dan 3, jika belum tersedia aplikasi, klik tautan

<https://www.geogebra.org/m/sayuzycp> atau QR:

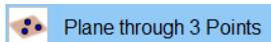


3. Posisi Busur Jarak dan Lingkaran Terbesar Bola.

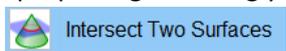
Terletak di bidang apa tali busur yang merepresentasikan jarak terpendek di atas?

Dengan file hasil sebelumnya, kalian akan menyelidiki posisi busur ini.

1. Buat bidang melalui titik A, B, C menggunakan tool plane through 3 points



2. Tentukan perpotongan bidang yang dihasilkan dengan bola menggunakan tool intersect two surfaces



3. Amati busur yang menghubungkan titik B dan C dengan lingkaran hasil perpotongan bola dan bidang. Lingkaran hasil perpotongan antara bola dengan bidang melalui pusat lingkaran merupakan lingkaran terbesar yang dapat dibuat pada bola.

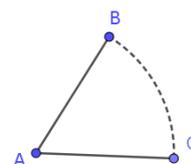
4. Apa yang dapat kalian simpulkan tentang posisi busur yang menyatakan jarak BC?

Jawab:

4. Bagaimana mencari jarak B ke C.

Hubungan sudut pusat dan panjang busur.

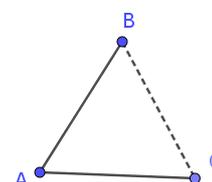
1. Ingat kembali bagaimana Eratosthenes mengukur keliling bumi, jika $AB = AC$ diketahui, apa yang diperlukan agar kalian bisa menghitung panjang busur BC ?



Jawab:

Menentukan besar sudut BAC .

2. Perhatikan segitiga ABC . Kalian akan bisa mengukur sudut BAC jika panjang diketahui.



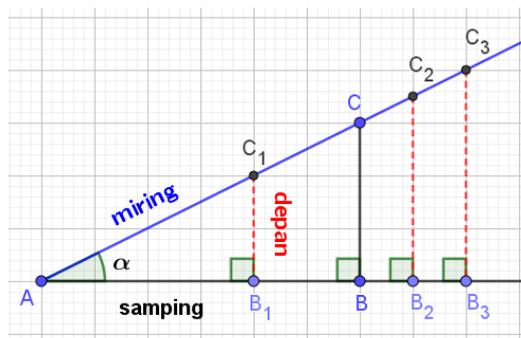
5. Bagaimana menentukan panjang ruas garis BC ?

Kalian harus mengubah sistem koordinat lintang bujur ke koordinat kartesius 3 dimensi.

Prasyarat 1: perbandingan trigonometri

Jika diberikan segitiga siku-siku ABC

1. Pada gambar di atas, bagaimana nilai $\frac{BC}{AC}$, $\frac{B_1C_1}{AC_1}$, $\frac{B_2C_2}{AC_2}$, dan $\frac{B_3C_3}{AC_3}$. Untuk memudahkan mengingat biasa disingkat *depan miring* atau *de mi*.
2. Perbandingan pada no. 1 di atas dinamakan sebagai sinus sudut α dan dinotasikan dengan $\sin \alpha$. Pada segitiga ABC , maka



$$\sin \alpha = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$$

- Pada gambar di atas, bagaimana nilai $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AB_1}{AC_1}$, $\frac{AB_2}{AC_2}$, dan $\frac{AB_3}{AC_3}$. Untuk memudahkan mengingat, biasa disingkat dengan $\frac{\text{samping}}{\text{miring}}$ atau $\frac{sa}{mi}$.
- Perbandingan pada no. 3 di atas dinamakan sebagai cosinus sudut α dan dinotasikan dengan $\cos \alpha$. Pada segitiga ABC, maka

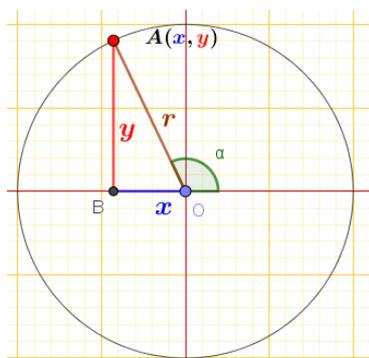
$$\cos \alpha = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$$

Gambar berikut digunakan untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut dan besar sudut jika nilai perbandingannya diketahui.

	<ol style="list-style-type: none"> Mencari nilai sinus dan cosinus suatu sudut. <ol style="list-style-type: none"> $\sin 32^\circ =$ $\cos 32^\circ =$ Mencari besar sudut jika diketahui nilai perbandingan trigonometrinya. <ol style="list-style-type: none"> Jika $\sin \alpha = 0,63$ maka $\alpha =$ $^\circ$ Jika $\cos \alpha = 0,53$ maka $\alpha =$ $^\circ$
--	--

Prasyarat 2: Perluasan Perbandingan Trigonometri.

Perbandingan trigonometri di atas hanya berlaku pada segitiga siku-siku, sehingga sudut yang dilayani hanya di antara 0° dan 90° . Bagaimana jika sudutnya di luar rentang 0° dan 90° . Perlu kesepakatan baru, coba aktivitas di tautan <https://www.geogebra.org/m/kbg8ehg7> atau QR di samping.



Pada gambar kiri ini,

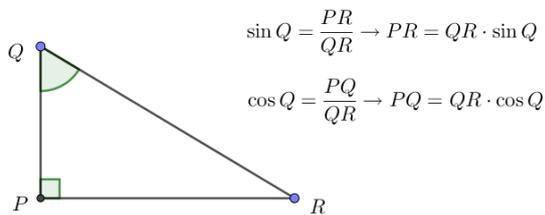
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Prasyarat 3: Mengubah koord. Lintang dan Bujur ke koord. kartesius.

*) Diberikan titik $B(40^\circ LU, 30^\circ BT)$ dan $C(20^\circ LU, 110^\circ BT)$

Ingat:



Posisi titik B ditentukan dengan cara:

Dimulai dari titik $P(0^\circ LU, 0^\circ BT)$ diputar sepanjang garis katulistiwa ke arah timur sejauh 30° menuju titik P_1 , selanjutnya diputar sepanjang garis bujur sejauh 40° ke arah utara sehingga diperoleh titik B .



Visualisasi: <https://www.geogebra.org/m/s52n3kj5> atau QR di samping.

	<p>Misal</p> <p>AP adalah arah x positif, AG arah y positif, dan AU arah z positif. Bumi berjari-jari $AP = AB = r$. $r = 6371 \text{ km}$</p> <p>Karena $\triangle ABB'$ siku-siku di B', maka $BB' = AB \sin 40^\circ$ $= r \cdot 0,6428 \rightarrow$ $z_B = r \cdot 0,6428$ $z_B = 6371 \cdot 0,6428$ $z_B =$</p> <p>dan</p> <p>$AB' = AB \cos 40^\circ = r \cdot 0,7660$</p> <p>Karena $\triangle AB_1B$ siku-siku di B_1 maka $AB_1 = AB' \cos 30^\circ \rightarrow$ $x_B = r \cdot 0,7660 \cdot 0,8660$ $x_B = 6371 \cdot 0,7660 \cdot 0,8660$ $x_B =$</p> <p>Karena $\triangle AB'B_2$ siku-siku di B_2, maka $AB_2 = AB' \sin 30^\circ \rightarrow$ $y_B = r \cdot 0,7660 \cdot 0,5$ $y_B = 6371 \cdot 0,7660 \cdot 0,5$ $y_B =$</p> <p>Sehingga</p> <p>$B(\quad , \quad , \quad)$</p>
--	--

Dengan cara yang sama, tentukan koordinat kartesius titik C .

Karena $\triangle ACC'$ siku-siku di C' , maka

$$CC' = AC \sin 20^\circ$$

$$= r \cdot 0,3420 \rightarrow$$

$$z_C = r \cdot 0,3420$$

$$z_C = 6371 \cdot 0,3420$$

$$z_C =$$

dan

$$AC' = AC \cos 20^\circ = r \cdot 0,9400$$

Karena $\triangle AC_1C$ siku-siku di C_1 maka

$$AC_1 = AC' \cos 110^\circ \rightarrow$$

$$x_C = r \cdot 0,9400 \cdot (-0,3420)$$

$$x_C = 6371 \cdot 0,9400 \cdot (-0,3420)$$

$$x_C =$$

Karena $\triangle AC'C_2$ siku-siku di C_2 , maka

$$AC_2 = AC' \sin 110^\circ \rightarrow$$

$$y_C = r \cdot 0,9400 \cdot 0,9400$$

$$y_C = 6371 \cdot 0,9400 \cdot 0,9400$$

$$y_C =$$

Sehingga

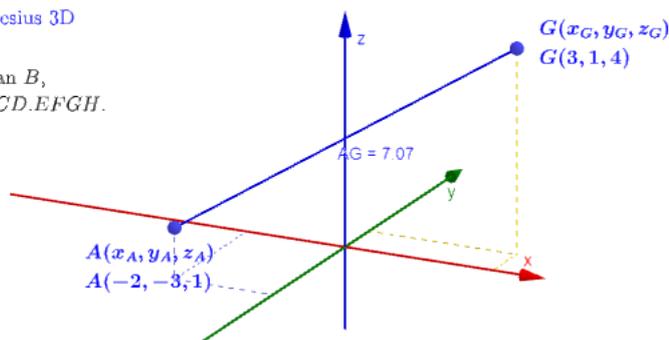
$$C(\quad , \quad , \quad)$$

Prasyarat 4: Jarak antara titik A dan G dalam koordinat Kartesius

Pelajari aktivitas di <https://www.geogebra.org/m/xadx9my> untuk mencari jarak dua titik pada koordinat kartesius 3 dimensi.

Menentukan Jarak Titik A dan G dalam Koordinat Kartesius 3D

Geser titik A dan B , buat balok $ABCD.EFGH$.



Anda akan mendapatkan jarak titik $A(x_A, y_A, z_A)$ ke titik $G(x_G, y_G, z_G)$ adalah

$$AG = \sqrt{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2 + (z_A - z_G)^2}$$

Pada masalah *), tentukan jarak BC (gunakan kalkulator).

$$BC = \sqrt{(\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2}$$

$$=$$

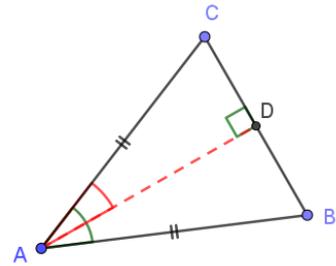
Prasyarat 5: Sudut suatu segitiga jika ketiga sisinya diketahui.

Kembali ke titik B dan C di permukaan bumi. Dengan prasyarat 5, kalian bisa menentukan panjang BC . Selanjutnya sudut A bisa dicari dengan menggunakan aturan cosinus.

$\triangle ABC$ sama kaki karena panjang $AB = AC$.

Ambil titik D di tengah BC , maka

$$\angle CAD = \frac{\angle A}{2}$$



Gunakan definisi sinus untuk segitiga ACD , untuk mencari $\angle CAD$. Misal $\angle CAB = \alpha$.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\dots}{\dots} = \dots \quad (\text{gunakan kalkulator untuk mencari nilai desimalnya}).$$

Dari sini kalian bisa mencari besar sudut $\frac{\alpha}{2}$. (Gunakan kalkulator, sudut dalam derajat)

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin(\dots) = \dots \quad (\text{gunakan kalkulator})$$

$$\angle BAC = \alpha = \dots$$

Penyelesaian Masalah

Anda telah mendapatkan bekal materi prasyarat. Tibalah saatnya untuk menyelesaikan problem di nomor 1. Titik $B(40^\circ LU, 30^\circ BT)$ dan $C(20^\circ LU, 110^\circ BT)$.

$$\frac{\text{busur } BC}{\text{keliling}} = \frac{(\text{ukuran sudut } A)}{360}$$

$$\frac{\text{busur } AB}{2 \cdot \pi \cdot 6371} = \frac{\dots}{360}$$

$$(\text{busur } AB) = \dots \cdot \dots = \dots$$

Jadi jarak di permukaan bumi antara titik $B(40^\circ LU, 30^\circ BT)$ dan $C(20^\circ LU, 110^\circ BT)$

adalah \dots km.