

Question

Exercice 1

Exercice 4

5 points

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

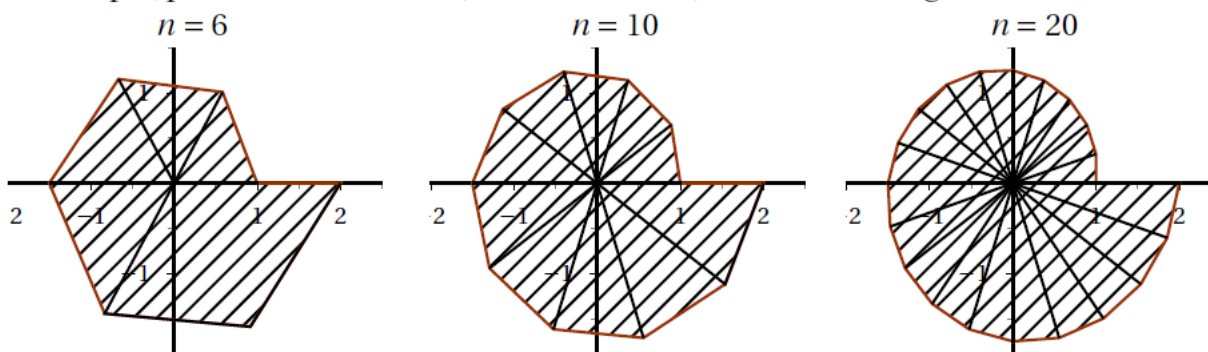
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n , on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k .

Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$.

Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k .

Question

2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.

En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.

3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à

$a_k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à $n-1$ A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour
SORTIE	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

Titre

Question

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7,2$. On ne demande pas de déterminer n .

```

L1  VARIABLES :      A est un nombre réel
L2                               k est un entier
L3                               n est un entier
L4  TRAITEMENT :    n prend la valeur 2
L5                               A prend la valeur 0
L6  Tant que.....
L7                               n prend la valeur n + 1
L8                               A prend la valeur 0
L9                               Pour k allant de 0 à n - 1
L10                              A prend la valeur
                                   $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ 
                                  Fin Pour
L12                              Fin Tant que
L13 SORTIE :      Afficher ...

```

*

Question Exercice 2

EXERCICE 2

4 POINTS

Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

- Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .
 - Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .
 - Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
Prouver cette conjecture.
- Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.
- Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?*

Exercice 3

- On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

$$(E): \quad z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

- Pour toute valeur de a , (E) n'a pas de solution dans \mathbb{C} .
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

Question Exercice 4

EXERCICE 2

3 points

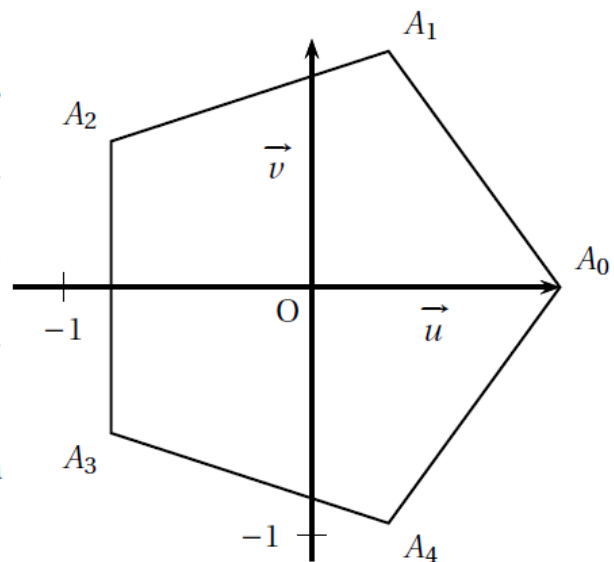
Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.



Question

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.

Le cercle \mathcal{C} de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K .

Calculer BJ , puis en déduire BK .

2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2 . Justifier brièvement.
b. Démontrer que $BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

► Calcul formel	
1	$\cos(4 \cdot \pi / 5)$ $\rightarrow \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$
2	$\text{sqrt}((3 - \text{sqrt}(5))/2)$ $\rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.*