INTERPRETACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

DESCRIPCIÓN

El presente aplicativo permite insertar tres vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ por medio de casillas de entrada, que permite modificar el valor de sus componentes. Para ordenar la información se organizan en cinco casos y en cada uno de los casos:

- Calcula el producto mixto, que es un número real, y lo relaciona con la representación gráfica de los vectores, mostrando si los vectores son o no coplanares.
- Si los vectores no son coplanares, dichos vectores son linealmente independientes (L. I.), y se muestra la gráfica del tetraedro o del paralelepípedo formado.
- Calcula el valor del volumen respectivo, incluyendo los casos de volumen 0.

ACTIVIDADES

Para reforzar el apoyo en el aprendizaje de vectores mediante este aplicativo, sugerimos resolver los ejercicios y problemas propuestos mostrados a continuación

Nota. Los ejercicios y problemas propuestos corresponden al Capitulo 1.6 del texto Álgebra Lineal. F. Hoyos, M. Mitacc, G. Gómez. Universidad de Lima. 2017.

Ejercicios y problemas propuestos 1.6

1. Dados los vectores $\overrightarrow{a}=(2;3;4)$, $\overrightarrow{b}=(2;-1;3)$, $\overrightarrow{c}=(3;2;-1)$ y los puntos $A(4;6;1)$, $B(3;4;1)$, $C(1;-1;3)$ y $D(0;2;6)$. En cada caso, determine los siguientes vectores.

   a) $\overrightarrow{m}=2\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}-3\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$

   b) $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BC}-\left(2\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{AC}\right)$

   c) $\overrightarrow{q}=\overrightarrow{a}\times\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)-\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\times\overrightarrow{BD}$

   d) $\overrightarrow{r}=(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{a}\right)\times\overrightarrow{AD}$

2. Dados los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que $\measuredangle\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right)=120^\circ$, $||\overrightarrow{a}||=3$ y $||\overrightarrow{b}||=4$. Calcule el módulo del vector:

$$\left(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$$

3. Dados los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ tal que $\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{c}=8$. Calcule el valor del escalar:

$$k=(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{c})\cdot\left[\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}\right)\right]$$

4. Halle las componentes de un vector $\overrightarrow{c}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ de longitud igual a $\sqrt{6}\ u$, y que es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{a}=(4;3;2)$ y $\overrightarrow{b}=(1;-1;-3)$.

5. Sean A, B, C y D puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que $\overrightarrow{AC}=(3;2;4)$ y $\overrightarrow{BD}=(5;4;6)$. Calcule el área de la región plana limitada por el paralelogramo $ABCD$.

6. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $A(1;2;3)$, $B(-5;11;-15)$, $C(-7;18;-19)$ y $D(-1;9;-1)$

   a) En el espacio $\mathbb{R}^3$ grafique el cuadrilátero $ABCD$ y pruebe que es un paralelogramo.

   b) Calcule el área de la región plana limitada por el paralelogramo $ABCD$.

   c) Calcule la longitud de la altura del paralelogramo, relativa al vértice A.

7. Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ que representan a las aristas consecutivas de un paralelepípedo cuyo volumen del sólido limitado por dicho paralelepípedo es $8\ u^3$. Calcule el volumen del sólido limitado por un nuevo paralelepípedo cuyas aristas consecutivas son los vectores $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{r}$ donde $\overrightarrow{m}=\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{r}=2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}$.

8. Determine las componentes de un vector $\overrightarrow{a}$ que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{b}=(-2;1;-3)$ y $\overrightarrow{c}=(4;2;3)$, si se sabe además que $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right)=-362$.

9. Halle un vector $\overrightarrow{a}$ que es paralelo al vector $\overrightarrow{b}=(2;1;-2)$ y forma con el vector $\overrightarrow{c}=(1;-1;3)$ un paralelogramo, de tal manera que el área de la región plana limitada por dicho paralelogramo es $2\sqrt{74}\ \mathrm{u}^2$.

10. Sean $\overrightarrow{a}=(4;-2;4)$ y $\overrightarrow{b}=(1;-2;2)$ vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ que tienen el mismo origen en el punto $R(2;3;-4)$.

    a) Calcule el área de la región plana limitada por el triángulo RMN, donde M y N son los puntos extremos de los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, respectivamente.

    b) Calcule la medida del ángulo RMN.

    c) Si $\overrightarrow{RQ}$ es un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ tal que $||\overrightarrow{RQ}||=4\sqrt{17}$ u, determine las coordenadas del punto Q.

11. Sean $\overrightarrow{AB}=(2x;x;2x)$ y $\overrightarrow{AD}=(-2x;4x;0)$ $(x>0)$ vectores que representan los lados consecutivos del paralelogramo $ABCD$. Si el área de la región plana limitada por el paralelogramo $ABCD$ es $24\sqrt{5}\ \mathrm{u}^2$, determine:

    a) Las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

    b) La longitud de la altura DH del paralelogramo (H es un punto sobre la base AB)

    c) El volumen del sólido limitado por el paralelepípedo que tiene como aristas consecutivas los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$,