Přehled důležitých křivek

V matematické kartografii existují důležité křivky, které jdou po povrchu referenční plochy.

Mají využití při navigaci, námořní či letecké dopravě.

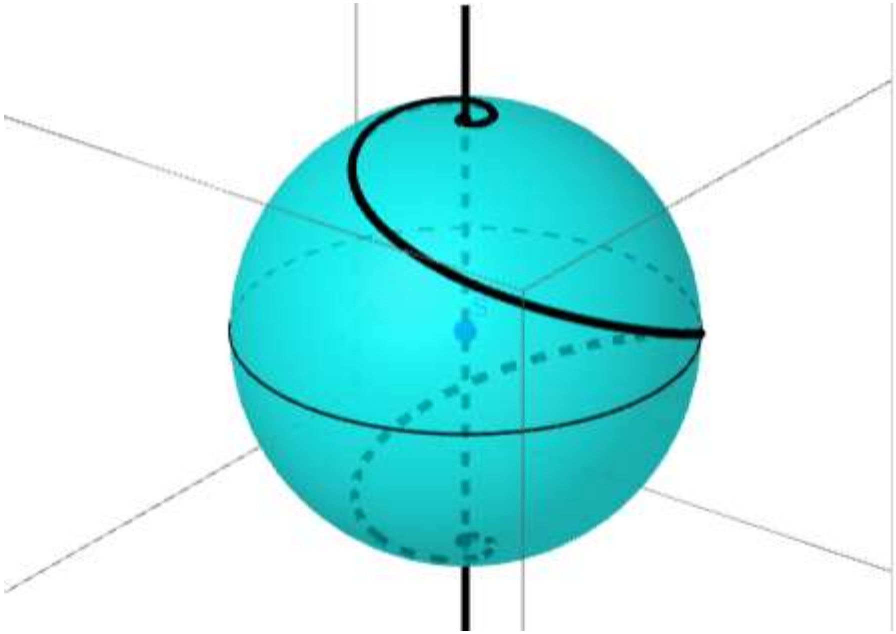
Ve vybraných kartografických zobrazeních se zobrazují jako přímky, tato zobrazení používána v minulosti pro námořní navigaci.

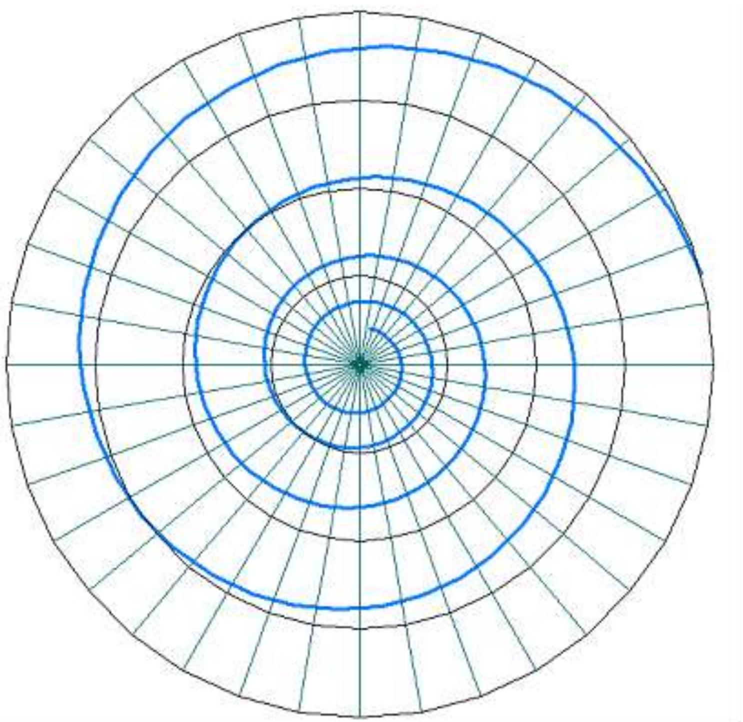
Ve vybraných kartografických zobrazeních se zobrazují jako úsečky, přímky, či polopřímky.

Křivky:

- Geodetická křivka (elipsoid)
- Ortodroma (koule->GČ)
- Loxodroma

Loxodroma (azimutální zobrazení)





Znázornění loxodromy v azimutálním ekvidistantním zobrazení:

Loxodroma

- Křivka, která protíná poledníky pod konstantním azimutem A.
- Délka l=∞.
- Není nejkratší spojnicí dvou bodů na referenční ploše (s výjimkou rovníku).
- Spirálovitě se blíží k severnímu/jižnímu pólu, kterého však nikdy nedosáhne.
- V Mercatorově zobrazení se zobrazí jako úsečka => použití pro námořní navigaci.

Využití: letecká, námořní doprava

Pro: A = 0 -> loxodroma splývá poledníkem

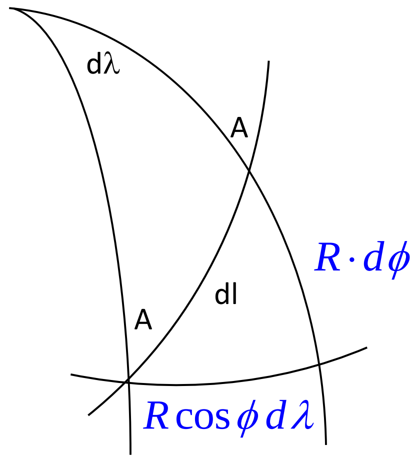
A = 90 -> loxodroma splývá s rovnoběžkou

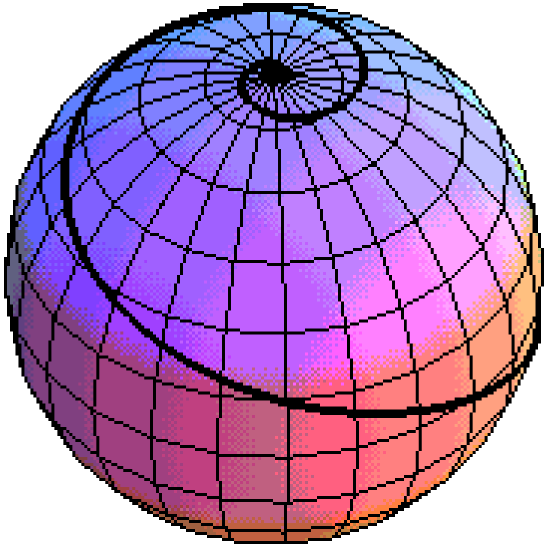
Loxodroma

křivka na referenční ploše, která protíná poledníky bod stále stejný úhlem – azimutem A

A = 0° poledník

A = 90° rovnoběžka





$$\operatorname{tg} A = \frac{R\cos\phi d\lambda}{R d\phi} \Rightarrow d\lambda = \frac{d\phi}{\cos\phi}\tan A$$

$$\lambda = \operatorname{tg} A \cdot \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + c$$

Ortodroma

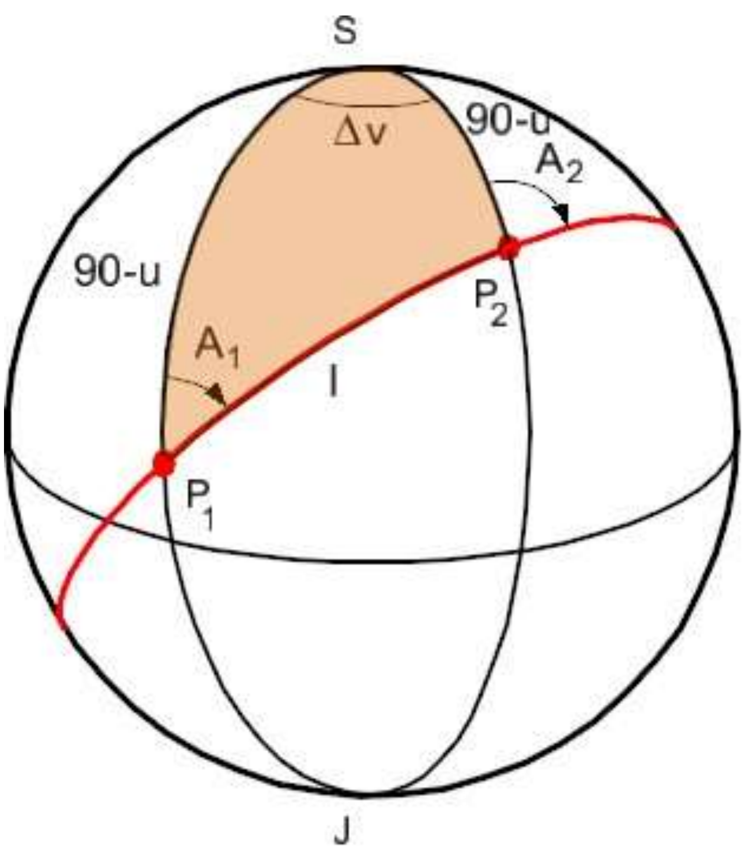
- Nejkratší spojnice dvou bodů na kouli (je to geodetická křivka na kouli)
- Představuje hlavní kružnici, tj. průsečnici roviny procházející středem koule a koule.
- Poledník je ortodroma, rovnoběžka s výjimkou rovníku není ortodromou.
- Její délka je vždy kratší než délka loxodromy (s výjimkou rovníku a poledníku).
- V kartografických zobrazeních se zobrazuje jako obecná křivka.
- V gnomonické projekci se zobrazí jako úsečka.
- Zobrazení, u kterých se zobrazí téměř jako úsečka (malé vzdutí) nazýváme **ortodromickými**.

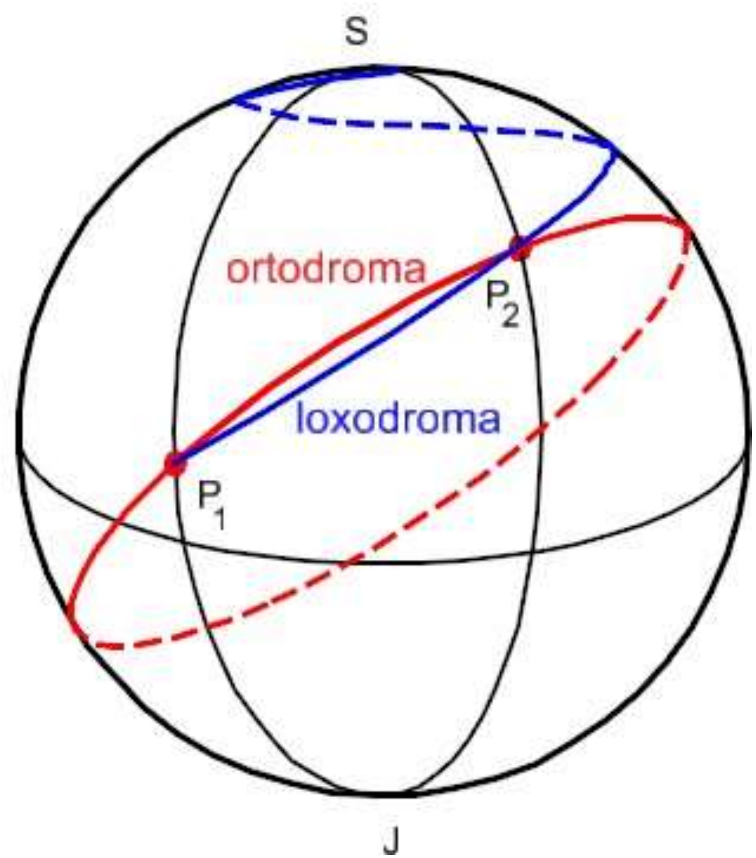
Použití: geodézie, letecká či námořní doprava.

Znázornění ortodromy a loxodromy

Vlevo ortodroma, vpravo srovnání ortodromy a loxodromy.

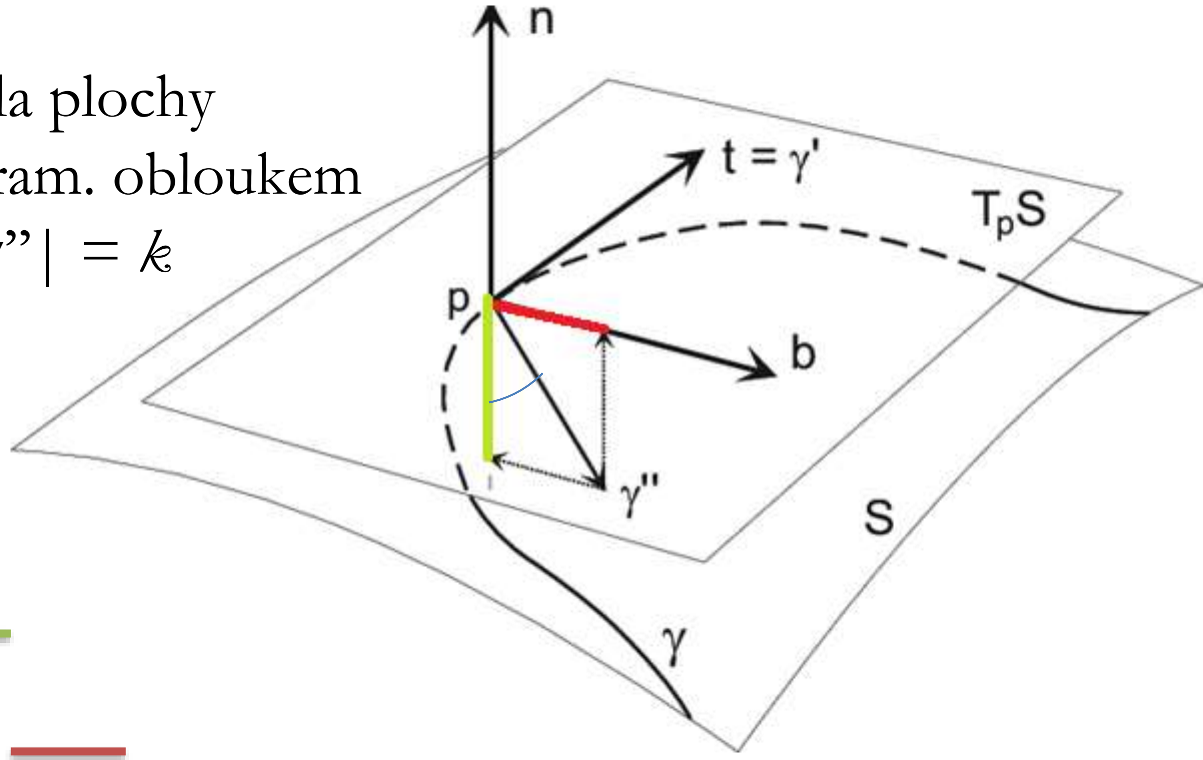
Výpočty parametrů ortodromy řešením sférického trojúhelníku.





Geodetická a normálová křivost

n – jednotková normála plochy
$\gamma(s)$ – křivka na ploše param. obloukem
$\gamma''(s)$ – vektor křivosti, $|\gamma''| = k$
T_pS – tečná rovina plochy



$$\alpha = \measuredangle(n\gamma'')$$

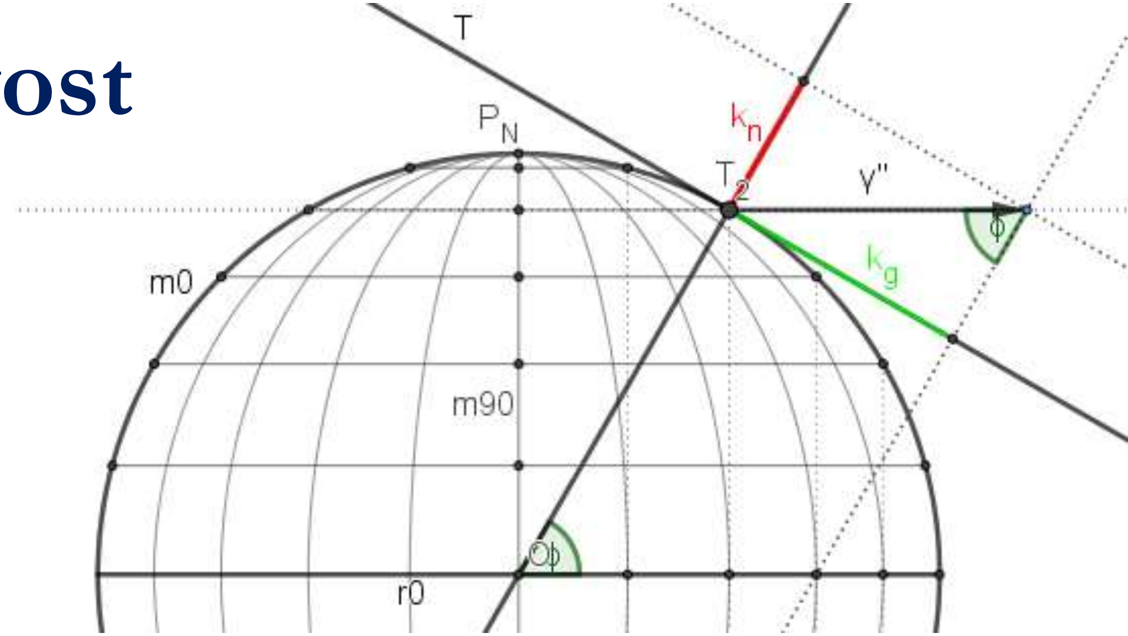
$$|k_n| = \gamma'' \cdot n = k \cos\alpha$$

$$|k_g| = (n \times \gamma')\gamma'' = k \sin\alpha$$

$$k_g^{\,2} + k_n^{\,2} = k^2$$

Každý bod geodetické křivky je buď inflexním bodem, nebo je v něm normála plochy rovna hlavní normále křivky.

Geodetická křivost rovnoběžek



$$k = \frac{1}{r} = \frac{1}{R\cos\varphi}$$

$$\varphi = \measuredangle\left(n\gamma''\right)$$

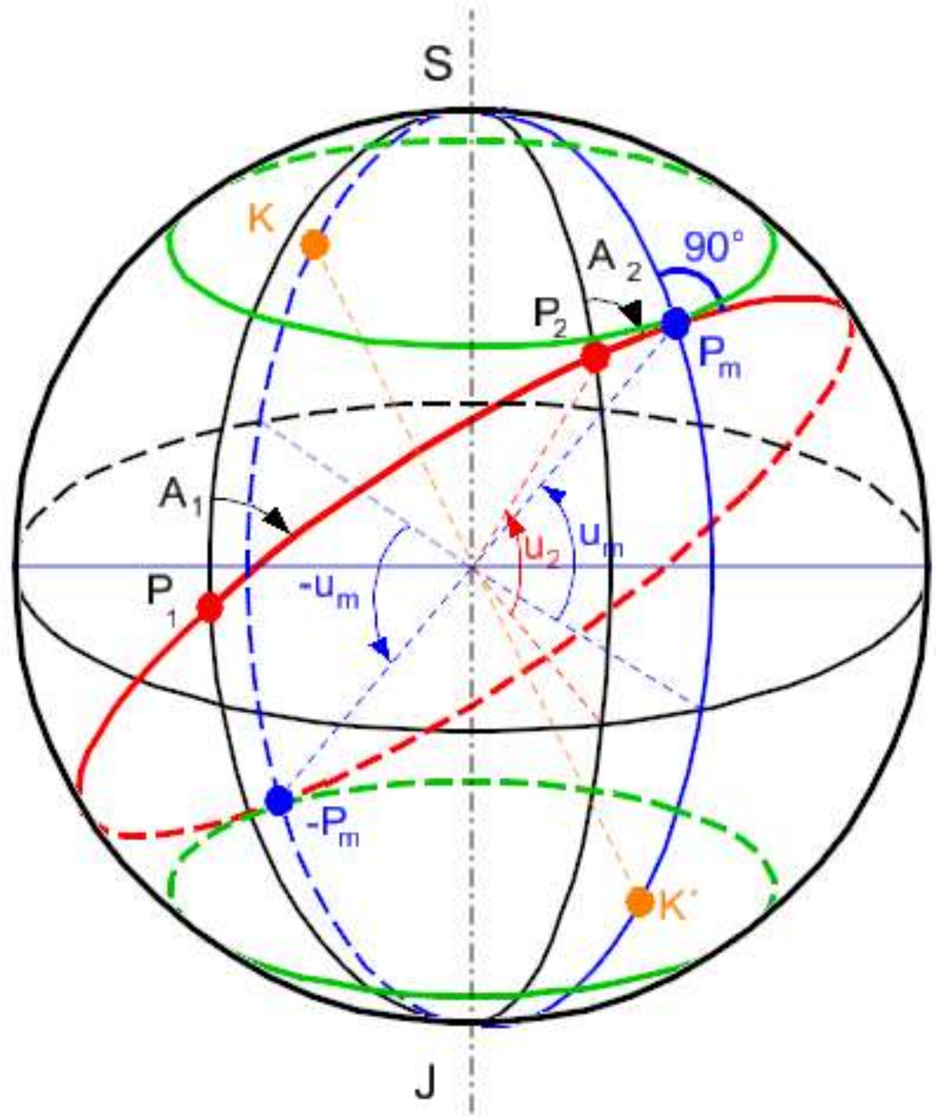
$$\left|k_n\right| = \gamma'' \cdot n = k\cos\varphi = \frac{1}{R}$$

$$\left|k_g\right| = \left(n \times \gamma'\right)\gamma'' = k\sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{r}$$

Geodetická křivost meridiánu a rovníku je 0.

Průběh ortodromy

- Maximální a minimální zeměpisná šířka v bodě P_m=> nejjižnější a nejsevernější bod.
- V bodě Pm má ortodroma azimut ±90°.
- Rovník protíná ve dvou bodech se symetrickými hodnotami v.

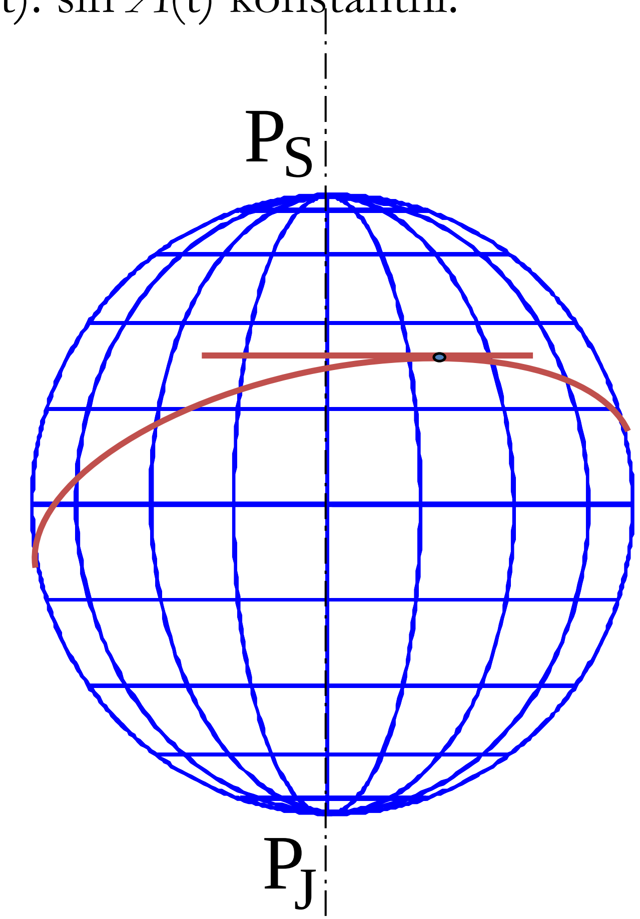


Clairautova věta

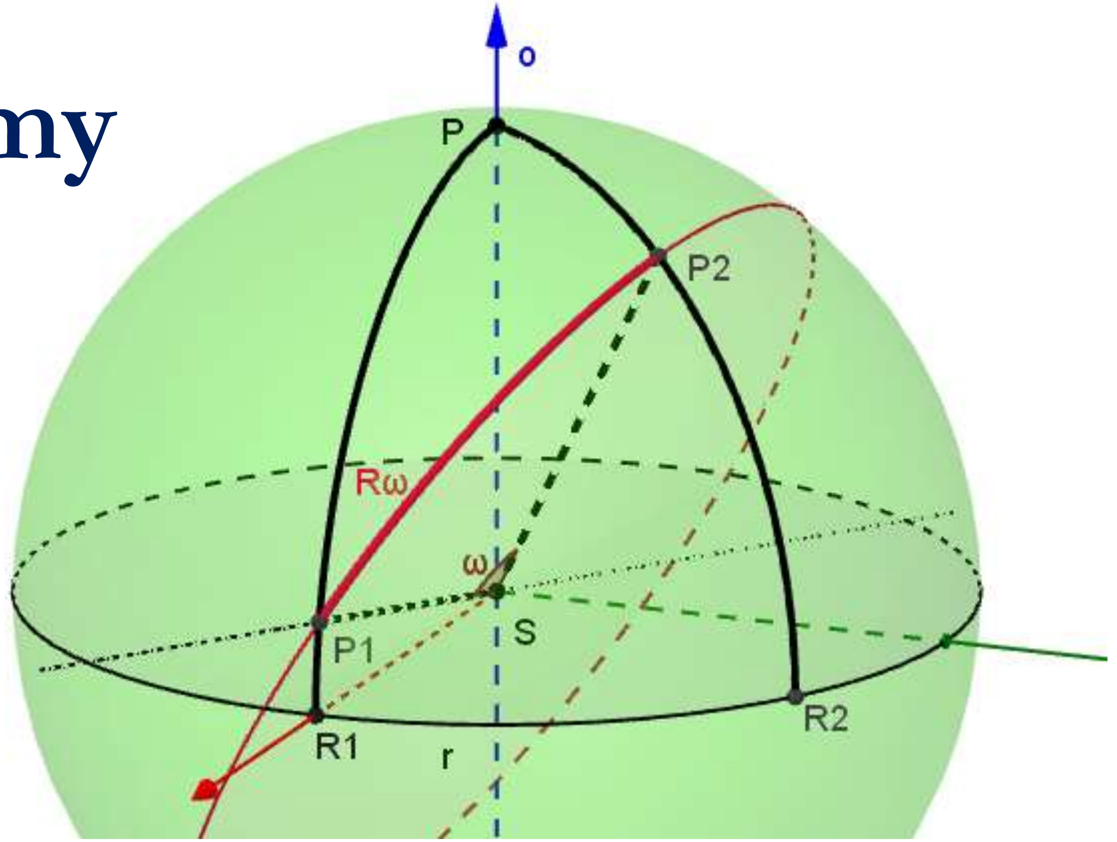
Uvažujme křivku *G*(t) na rotační ploše. Označme *A*(t) azimut a *r*(t) vzdálenost bodu křivky od osy rotace.
Křivka *G*(t) je geodetikou právě tehdy když je součin *r*(t). sin *A*(t) konstantní.

Součin sinu azimutu a kosinu zeměpisné šířky je konstantní a je roven kosinu maximální zeměpisné šířky ortodromy.

$$\cos\phi \cdot \sin A = \cos\phi_{\max}$$



Délka ortodromy



Body jsou dány body P_1, P_2 zeměpisnými souřadnicemi $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$, $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$
Pro délku ortodromy R .ω platí:

$$\cos\omega = \sin\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)$$

Důkaz: užití sférické trigonometrie

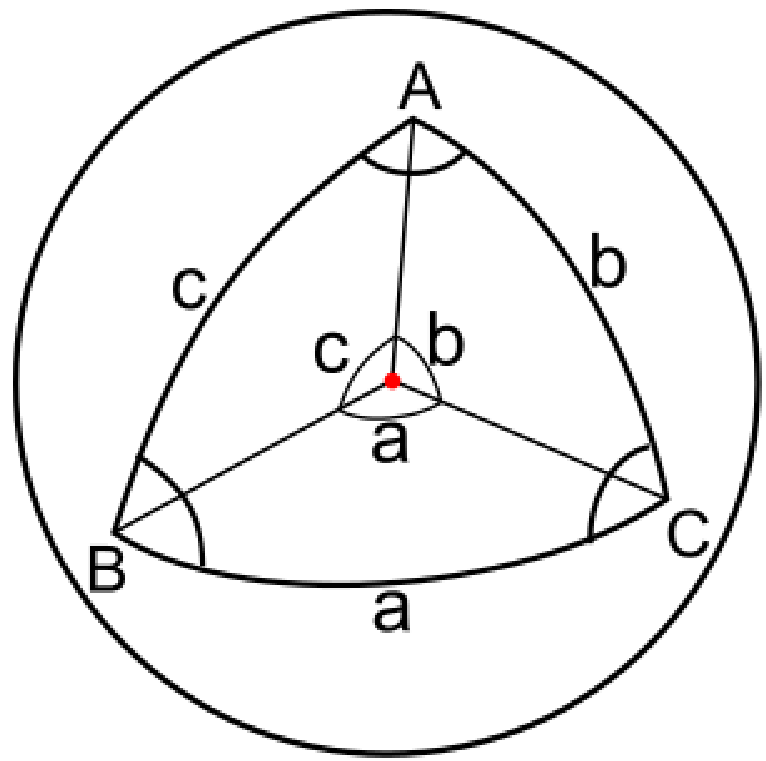
Sférický trojúhelník

Vrcholy A, B, C - tři různé body na sféře, nekomplanární se středem S sféry

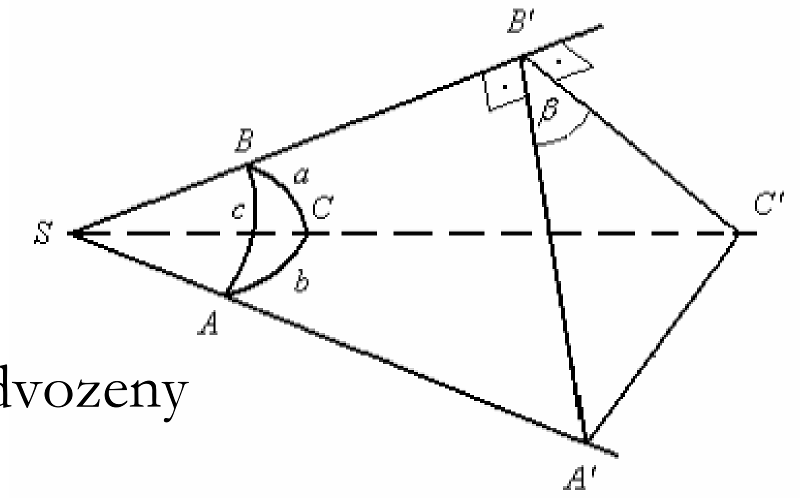
Strany *a, b, c* – tři oblouky hlavních kružnic, velikosti jsou rovny velikostem středových úhlů

α, β, γ – úhly, které svírají příslušné oblouky hlavních kružnic

Exces : $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$



Kosinová věta



Základní věta, všechny ostatní jsou z ní odvozeny

$$\cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos \beta$$

Libovolným bodem B’ proložíme rovinu kolmou k hraně SB’. Středové průměty zbývajících bodů označíme A’ a C’. Pro rovinné trojúhelníky A’B’C’ A’C’S platí:

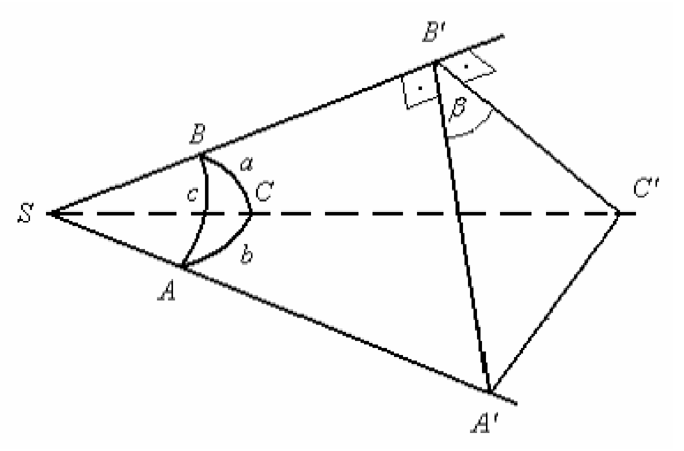
$$|A'C'|^2 = |A'B'|^2 + |B'C'|^2 - 2|A'B'|\cdot|B'C'|\cdot\cos\beta$$

$$|A'C'|^2 = |SA'|^2 + |SC'|^2 - 2|SA'|\cdot|SC'|\cdot\cos b$$

Kosinová věta

$$|A'C'|^2 = |A'B'|^2 + |B'C'|^2 - 2|A'B'|\cdot|B'C'|\cdot\cos\beta$$

$$|A'C'|^2 = |SA'|^2 + |SC'|^2 - 2|SA'|\cdot|SC'|\cdot\cos b$$



Rovnice porovnáme a dosadíme z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky A’B’S a C’B’S

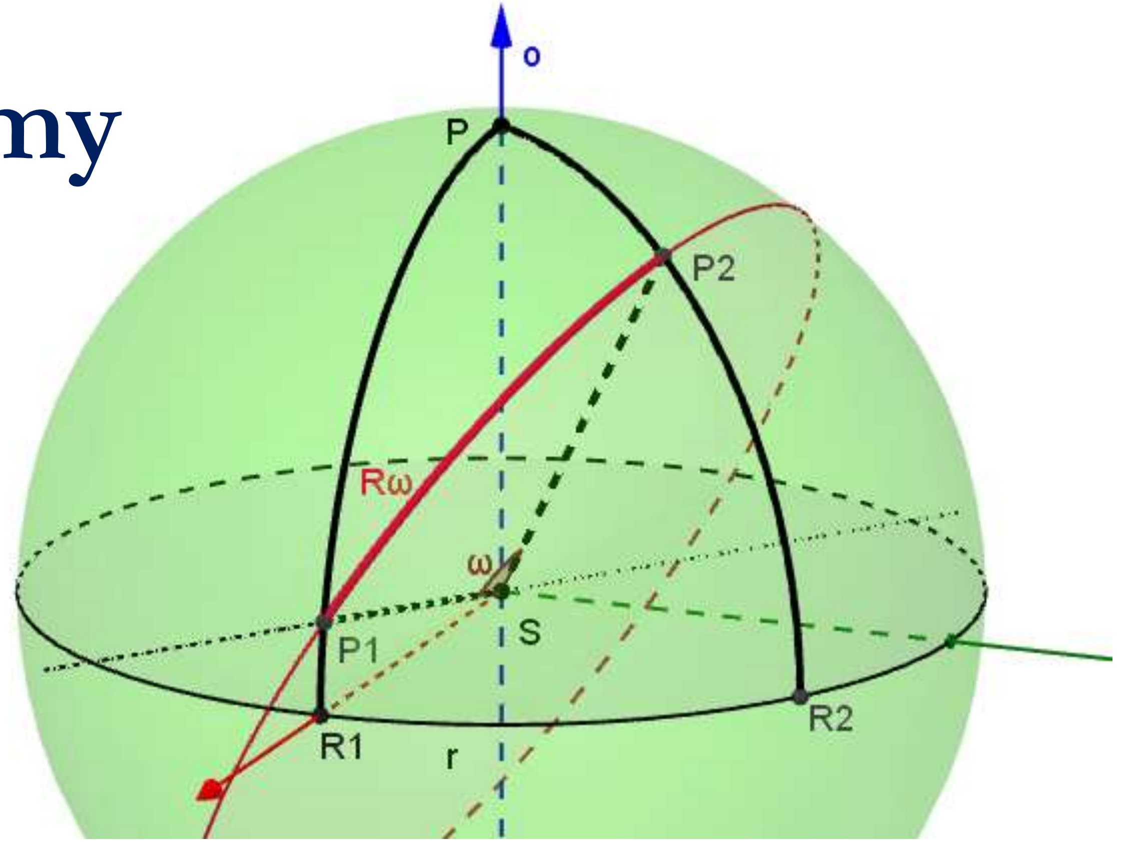
$$2|SA'|\cdot|SC'|\cdot\cos b = 2|SB'| + 2|A'B'|\cdot|B'C'|\cdot\cos\beta$$

$$\cos b = \frac{|SB'|}{|SA'|}\cdot\frac{|SB'|}{|SC'|} + \frac{|A'B'|}{|SA'|}\cdot\frac{|B'C'|}{|SC'|}\cdot\cos\beta$$

cos *b* = cos *a* . cos *c* + sin *a* . sin *c* . cos β

Ležovič, P: Užití sférické geometrie v zeměpise a astronomii, str. 7, 8, 13

Délka ortodromy



Body jsou dány body P_1, P_2 zeměpisnými souřadnicemi $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$, $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$

Pro délku ortodromy R .ω platí:

$$\cos\omega = \sin\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)$$

Sférická trigonometrie

Sinová věta: $\sin(\alpha):\sin(\beta):\sin(\gamma)= \sin(a):\sin(b):\sin(c)$

I. kosinová věta: $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$

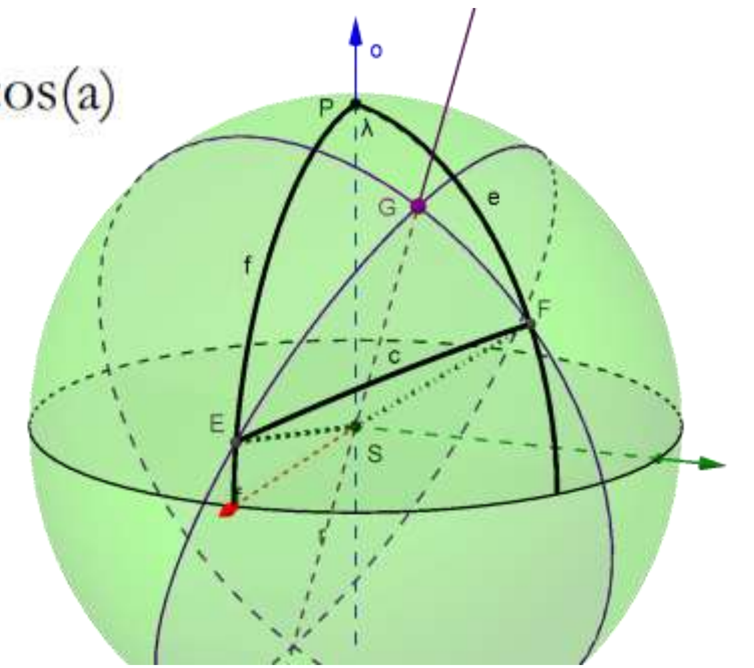
II. kosinová věta: $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a)$

I. sinuskosinová věta:

$\sin(a)\cos(\beta) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(\alpha)$

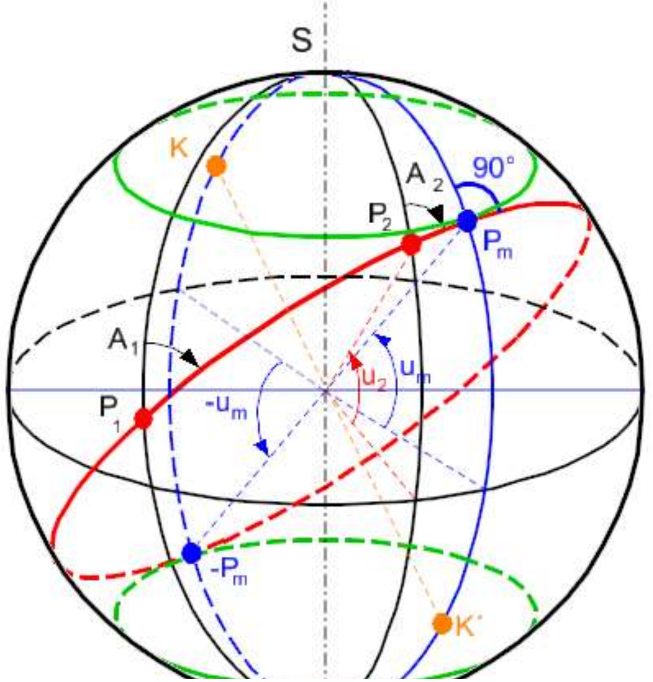
II. sinuskosinová věta:

$\sin(a)\cos(b) = \cos(b)\sin(g) + \sin(b)\cos(g)\cos(a)$



Azimut ortodromy

- Wikipedie



Azimut ortodromy se průběžně mění. Důležitý je zejména výchozí azimut α . Ze sinové věty pro sférický trojúhelník pro něj dostaneme

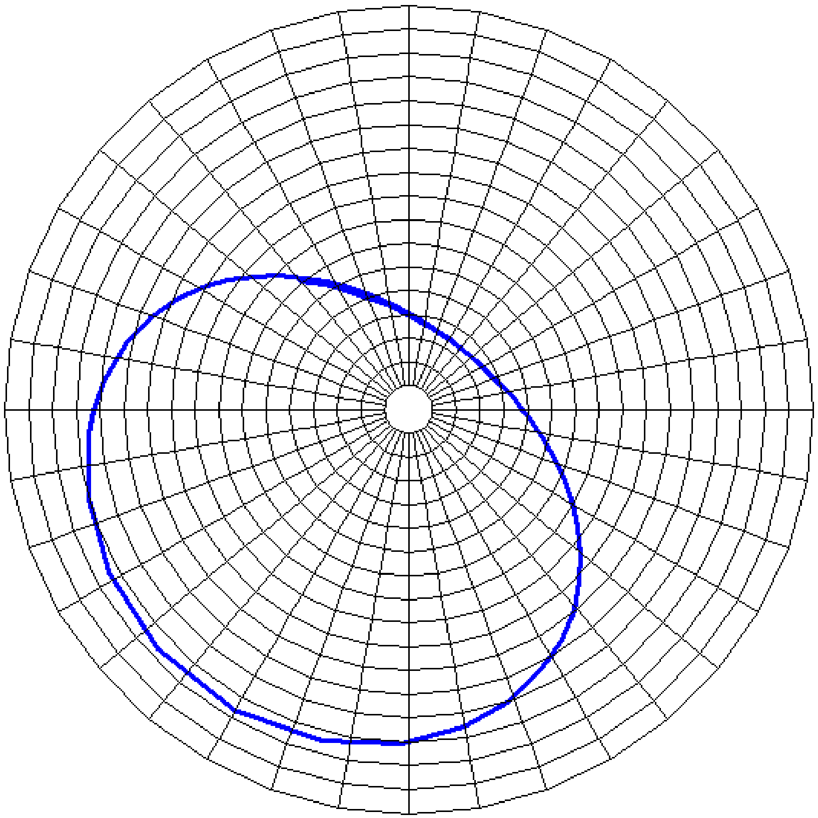
$$\sin\alpha = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\sigma}\sin(\lambda_2 - \lambda_1),$$

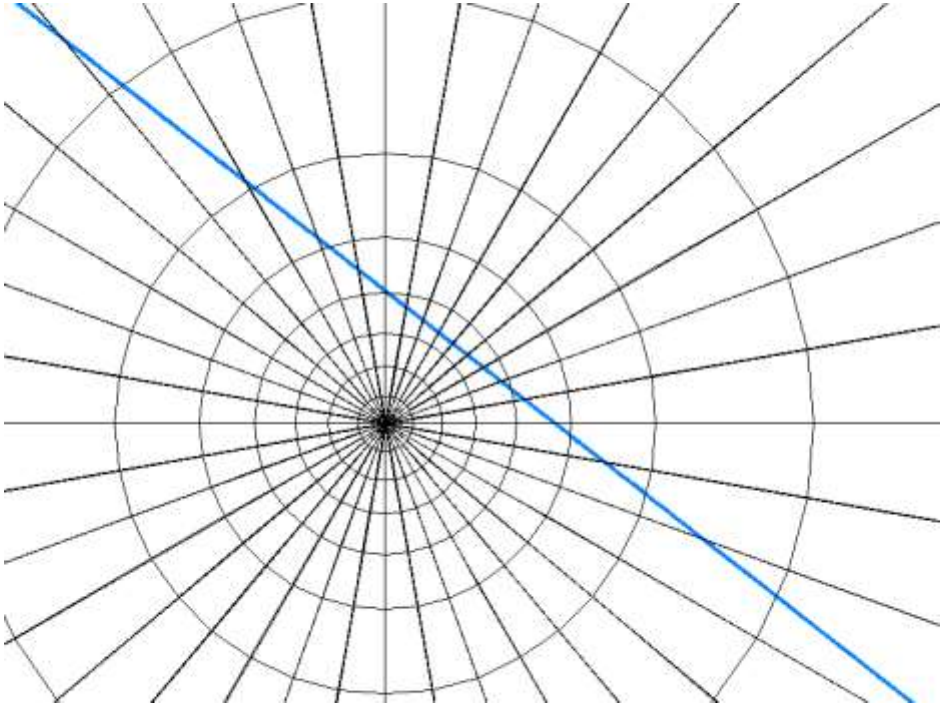
kde σ je dříve vypočtená délka ortodromy.

Obě strany rovnice vydělíme cos α a po aplikaci sinuskosinové věty dostáváme:

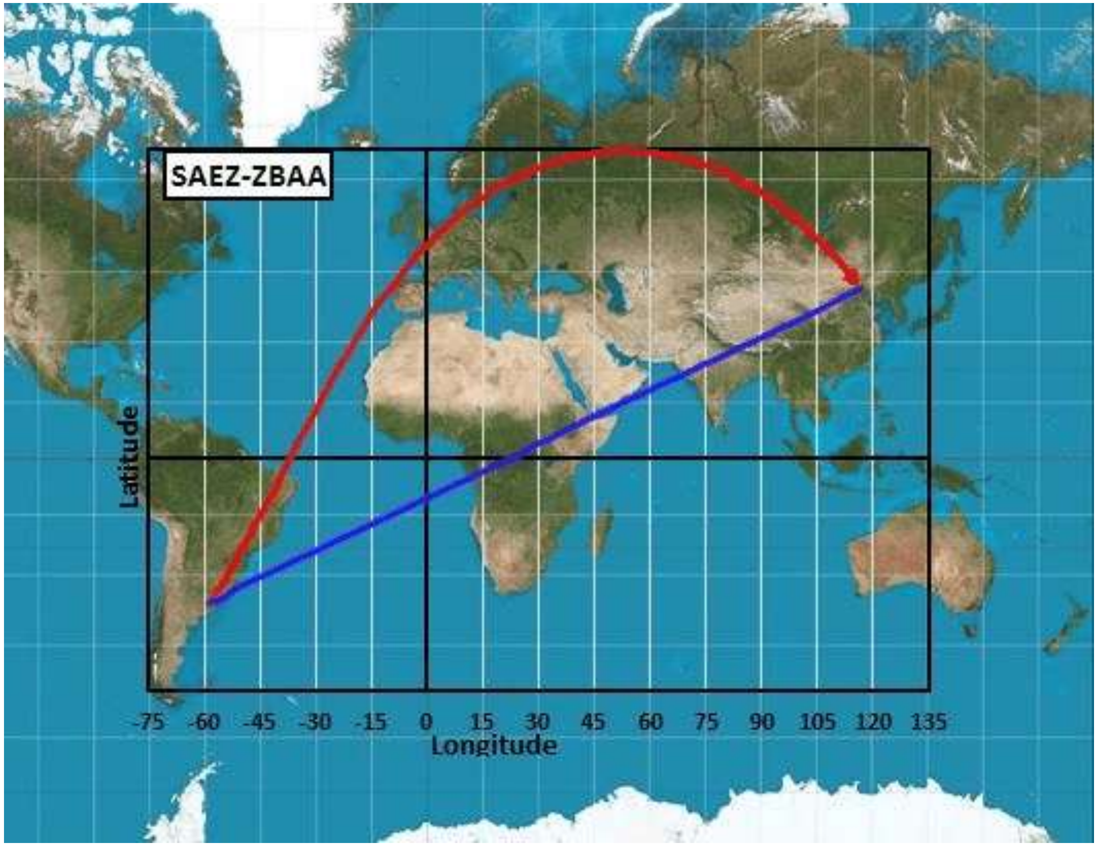
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\varphi_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Ortodroma (azimutální zobrazení)





Ortodroma a loxodroma v Mercatorově projekci



SAEZ – Buenos Aires
ZBAA - Peking

Geodetická křivka na elipsoidu

- Nejkratší spojnice dvou bodů na elipsoidu
- Její normála je v každém okamžiku totožná s normálou plochy.
- Na rozdíl od ortodromy se nevrací do původního bodu, vlní se mezi oběma rovnoběžkami.
- Její délka je nekonečná.
- Výjimkou jsou poledníky, mezi dvěma póly existuje nekonečně mnoho geodetických křivek s azimutem A=90°.