Exercícios de Pré-Cálculo *

Grupo do Pré-Cálculo/UFBA

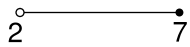
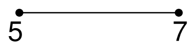
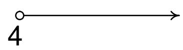
Fevereiro 2024

Sumário

*Exercícios traduzidos e adaptados do livro Precalculus, 3rd Edition, disponibilizado de acordo com a licença Creative Commons (CC BY-NC-SA 3.0) pelos professores Carl Stitz e Jeff Zeager.

1 Intervalos e Plano Cartesiano

1. Preencha o quadro abaixo:

Conjunto de números reais	Notação de intervalo	Região na reta real
$\{x \mid -1 \leq x < 5\}$		
	$[0, 3)$	
		
$\{x \mid -5 < x \leq 0\}$		
	$(-3, 3)$	
		
$\{x \mid x \leq 3\}$		
	$(\infty, 9)$	
		
$\{x \mid x \geq -3\}$		

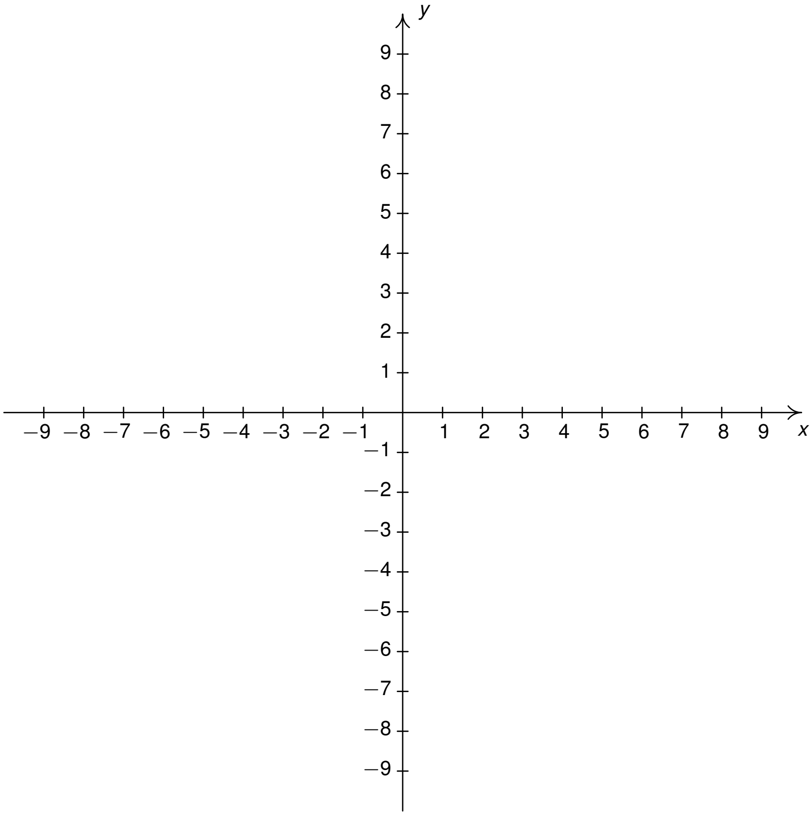
Nos exercícios 2 - 7, encontre a interseção ou união indicada e simplifique se possível. Expresse suas respostas em notação de intervalo.

2. $(-1, 5] \cap [0, 8)$
3. $(-1, 1) \cup [0, 6]$
4. $(-\infty, 4] \cap (0, \infty)$
5. $(-\infty, 0) \cap [1, 5]$
6. $(-\infty, 0) \cup [1, 5]$
7. $(-\infty, 5] \cap [5, 8)$

Nos exercícios 8 - 19, escreva o conjunto usando notação de intervalo.

8. $\{x \mid x \neq 5\}$
9. $\{x \mid x \neq -1\}$
10. $\{x \mid x \neq -3,\ 4\}$
11. $\{x \mid x \neq 0,\ 2\}$
12. $\{x \mid x \neq 2,\ -2\}$
13. $\{x \mid x \neq 0,\ \pm 4\}$
14. $\{x \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
15. $\{x \mid x < 3 \text{ ou } x \geq 2\}$
16. $\{x \mid x \leq -3 \text{ ou } x > 0\}$
17. $\{x \mid x \leq 5 \text{ ou } x = 6\}$
18. $\{x \mid x > 2 \text{ ou } x = \pm 1\}$
19. $\{x \mid -3 < x < 3 \text{ ou } x = 4\}$

20. Marque e rotule os pontos $A(-3, -7)$, $B(1.3, -2)$, $C(\pi, \sqrt{10})$, $D(0, 8)$, $E(-5.5, 0)$, $F(-8, 4)$, $G(9.2, -7.8)$ e $H(7, 5)$ no plano cartesiano dado abaixo.



21. Para cada ponto dado no exercício 20 acima

- Identifique o quadrante ou eixo em que o ponto está.
- Encontre o ponto simétrico ao ponto dado em torno do eixo x.
- Encontre o ponto simétrico ao ponto dado em torno do eixo y.
- Encontre o ponto simétrico ao ponto dado em torno da origem.

Nos exercícios 22 - 29, encontre a distância d entre os pontos e o ponto médio M do segmento de reta que os conecta.

22. $(1, 2)$, $(-3, 5)$
23. $(3, -10)$, $(-1, 2)$
24. $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$
25. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, 2\right)$
26. $\left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{19}{5}\right)$.
27. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{8}, -\sqrt{12}\right)$
28. $\left(2\sqrt{45}, \sqrt{12}\right)$, $\left(\sqrt{20}, \sqrt{27}\right)$.
29. $(0, 0)$, (x, y)
30. Encontre todos os pontos da forma $(x, -1)$ que estão a 4 unidades do ponto $(3, 2)$.
31. Encontre todos os pontos do eixo y que estão a 5 unidades do ponto $(-5, 3)$.
32. Encontre todos os pontos do eixo x que estão a 2 unidades do ponto $(-1, 1)$.
33. Encontre todos os pontos da forma $(x, -x)$ que estão a 1 unidade da origem.
34. Vamos assumir por um momento que nós estamos de pé sobre a origem com o eixo y positivo apontando para o Norte e o eixo x positivo para o Leste. Nosso detector de mapinguaris[1] nos diz que o mapinguari está a 3 milhas a oeste e 4 milhas ao sul da nossa posição atual. Quais são as coordenadas de sua posição. Quão longe ele está de nós? Se ele correr 7 milhas para leste, qual será sua nova posição?
35. Verifique a formula da distância nos casos em que:
    (a) Os pontos estão alinhados verticalmente. (Dica: Use $P(a, y_0)$ e $Q(a, y_1)$.)
    (b) Os pontos estão alinhados horizontalmente. (Dica: Use $P(x_0, b)$ e $Q(x_1, b)$.)
    (c) Os pontos são de fato o mesmo ponto. (Sem dicas!)
36. Verifique a fórmula do ponto médio mostrando que a distância entre $P(x_1, y_1)$ e M e a distância entre M e $Q(x_2, y_2)$ são ambas iguais a metade da distância entre P e Q.
37. Mostre que os pontos A, B e C abaixo são vértices de um triângulo retângulo.
    (a) $A(-3, 2)$, $B(-6, 4)$, e $C(1, 8)$
    (b) $A(-3, 1)$, $B(4, 0)$ e $C(0, -3)$
38. Encontre o ponto $D(x, y)$ tal que os pontos $A(-3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, -3)$ e D são os cantos de um quadrado. Justifique sua resposta.
39. Discuta com seus colegas quantos números existem no intervalo $(0, 1)$.
40. O mundo não é plano. Assim, o plano cartesiano não pode ser o fim da história. Discuta com seus colegas como vocês estenderian as coordenadas cartesianas para representar o mundo tridimensional. Como ficariam as fórmulas da distância e do ponto médio, assumindo que esses conceitos façam sentido?

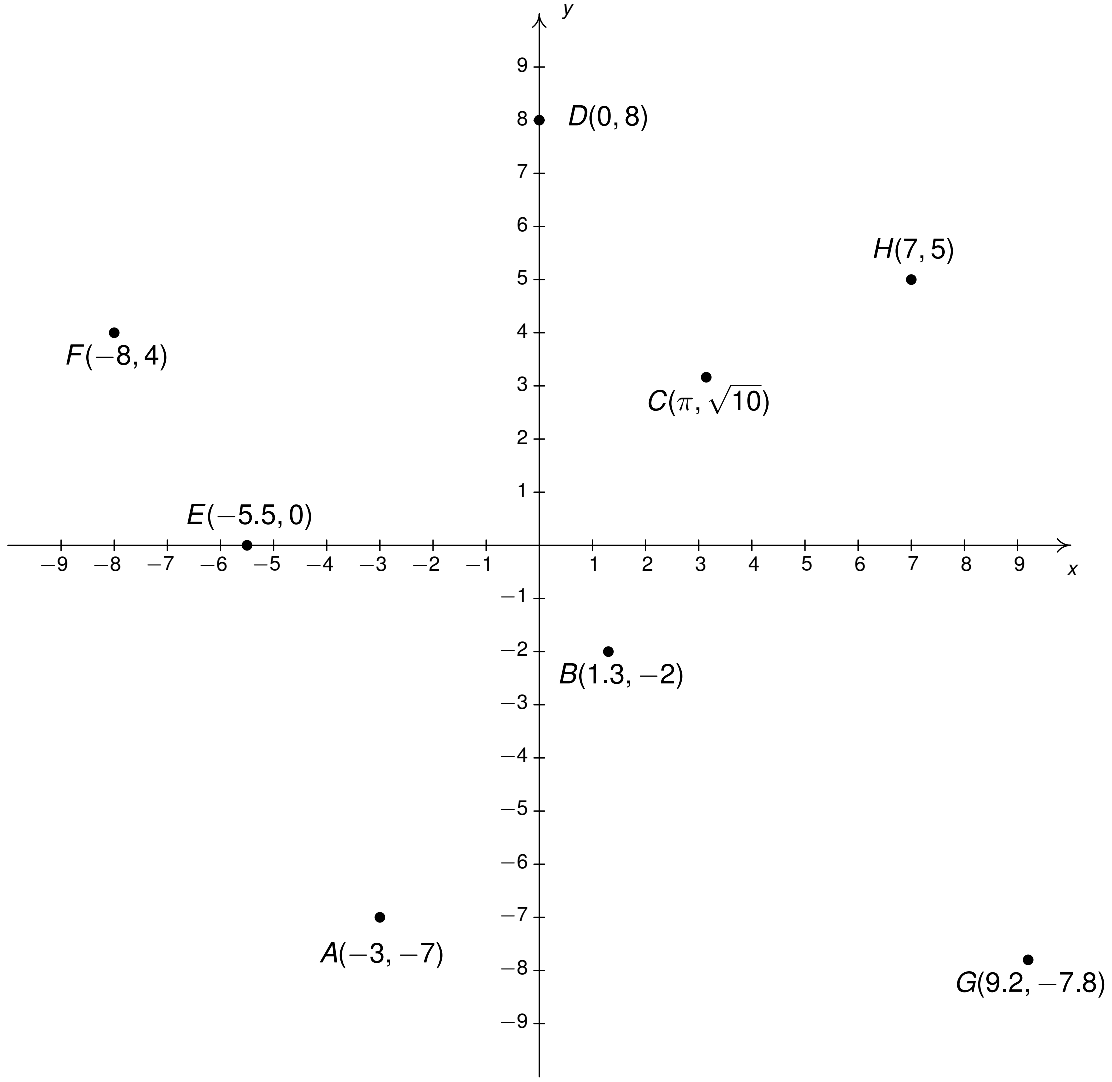
[1] O Mapinguari é uma criatura lendária da Amazônia. Usamos mapinguari sempre que o problema original faz referência a um *Sasquatch* (Pé grande).

RESPOSTAS

1.

Conjunto de números reais	Notação de intervalo	Região na reta real
$\{x \mid -1 \leq x < 5\}$	$[-1, 5)$	-1 5
$\{x \mid 0 \leq x < 3\}$	$[0, 3)$	0 3
$\{x \mid 2 < x \leq 7\}$	$(2, 7]$	2 7
$\{x \mid -5 < x \leq 0\}$	$(-5, 0]$	-5 0
$\{x \mid -3 < x < 3\}$	$(-3, 3)$	-3 3
$\{x \mid 5 \leq x \leq 7\}$	$[5, 7]$	5 7
$\{x \mid x \leq 3\}$	$(\infty, 3]$	3
$\{x \mid x < 9\}$	$(\infty, 9)$	9
$\{x \mid x > 4\}$	$(4, \infty)$	4
$\{x \mid x \geq -3\}$	$[-3, \infty)$	-3

2. $(-1, 5] \cap [0, 8) = [0, 5]$
3. $(-1, 1) \cup [0, 6] = (-1, 6]$
4. $(-\infty, 4] \cap (0, \infty) = (0, 4]$
5. $(-\infty, 0) \cap [1, 5] = \emptyset$
6. $(-\infty, 0) \cup [1, 5] = (-\infty, 0) \cup [1, 5]$
7. $(-\infty, 5] \cap [5, 8) = \{5\}$
8. $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$
9. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
10. $(-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty)$
11. $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$
12. $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$
13. $(-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$
14. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
15. $(-\infty, 3) \cup [2, \infty)$
16. $(-\infty, -3] \cup (0, \infty)$
17. $(-\infty, 5] \cup \{6\}$
18. $\{-1\} \cup \{1\} \cup (2, \infty)$
19. $(-3, 3) \cup \{4\}$
20. Os pontos requeridos $A(-3, -7)$, $B(1.3, -2)$, $C(\pi, \sqrt{10})$, $D(0, 8)$, $E(-5.5, 0)$, $F(-8, 4)$, $G(9.2, -7.8)$, e $H(7, 5)$ estão marcados no plano cartesiano abaixo.


$D(0, 8)$
$H(7, 5)$
$F(-8, 4)$
$C(\pi, \sqrt{10})$
$E(-5.5, 0)$
$B(1.3, -2)$
$A(-3, -7)$
$G(9.2, -7.8)$
x
y

21. (a) O ponto $A(-3,-7)$
    - está no Quadrante III
    - é simétrico em torno do eixo x com $(-3,7)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(3,-7)$
    - é simétrico em torno da origem com $(3,7)$

    (b) O ponto $B(1.3,-2)$
    - está no Quadrante IV
    - é simétrico em torno do eixo x com $(1.3,2)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(-1.3,-2)$
    - é simétrico em torno da origem com $(-1.3,2)$

    (c) O ponto $C(\pi,\sqrt{10})$
    - está no Quadrante I
    - é simétrico em torno do eixo x com $(\pi,-\sqrt{10})$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(-\pi,\sqrt{10})$
    - é simétrico em torno da origem com $(-\pi,-\sqrt{10})$

    (d) O ponto $D(0,8)$
    - está sobre o eixo $y$positivo
    - é simétrico em torno do eixo x com $(0,-8)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(0,8)$
    - é simétrico em torno da origem com $(0,-8)$

    (e) O ponto $E(-5.5,0)$
    - está sobre o eixo x negativo
    - é simétrico em torno do eixo x com $(-5.5,0)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(5.5,0)$
    - é simétrico em torno da origem com $(5.5,0)$

    (f) O ponto $F(-8,4)$
    - está no Quadrante II
    - é simétrico em torno do eixo x com $(-8,-4)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(8,4)$
    - é simétrico em torno da origem com $(8,-4)$

    (g) O ponto $G(9.2,-7.8)$
    - está no Quadrante IV
    - é simétrico em torno do eixo x com $(9.2,7.8)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(-9.2,-7.8)$
    - é simétrico em torno da origem com $(-9.2,7.8)$

    (h) O ponto $H(7,5)$
    - está no Quadrante I
    - é simétrico em torno do eixo x com $(7,-5)$
    - é simétrico em torno do eixo y com $(-7,5)$
    - é simétrico em torno da origem com $(-7,-5)$

22. $d = 5$, $M = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$

23. $d = 4\sqrt{10}$, $M = (1,-4)$

24. $d = \sqrt{26}$, $M = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

25. $d = \frac{\sqrt{37}}{2}$, $M = \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{4}\right)$

26. $d = \sqrt{74}$, $M = \left(\frac{13}{10}, -\frac{13}{10}\right)$

27. $d = 3\sqrt{5}$, $M = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

28. $d = \sqrt{83}$, $M = \left(4\sqrt{5}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

29. $d = \sqrt{x^2+y^2}$, $M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

30. $(3+\sqrt{7},-1)$, $(3-\sqrt{7},-1)$

31. $(0,3)$

32. $(-1+\sqrt{3},0)$, $(-1-\sqrt{3},0)$

33. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

34. $(-3,-4)$, 5 milhas, $(4,-4)$

37. (a) A distância de A a B é $|AB| = \sqrt{13}$, a distância de A a C é $|AC| = \sqrt{52}$, e a distância de B a C is $|BC| = \sqrt{65}$. Uma vez que $\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{52}\right)^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2$, podemos garantir pelo recíproco do Teorema de Pitágoras que o triângulo é um triângulo retângulo.

(b) Mostre que $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

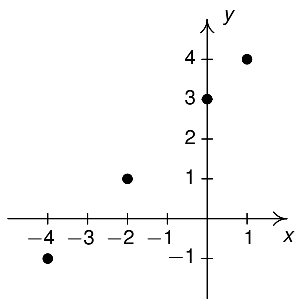
2 RELAÇÕES

Nos exercícios 1 - 20, esboce o gráfico da relação dada.

1. $\{(-3,9),\ (-2,4),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\}$
2. $\{(-2,0),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (0,2),\ (0,-2),\ (1,3),\ (1,-3)\}$
3. $\{(m,2m) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2\}$
4. $\left\{\left(\frac{6}{k},k\right) \mid k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\right\}$
5. $\left\{\left(n, 4-n^2\right) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2\right\}$
6. $\left\{\left(\sqrt{j}, j\right) \mid j = 0, 1, 4, 9\right\}$
7. $\{(x,-2) \mid x > -4\}$
8. $\{(x,3) \mid x \leq 4\}$
9. $\{(-1,y) \mid y > 1\}$
10. $\{(2,y) \mid y \leq 5\}$
11. $\{(-2,y) \mid -3 < y \leq 4\}$
12. $\{(3,y) \mid -4 \leq y < 3\}$
13. $\{(x,2) \mid -2 \leq x < 3\}$
14. $\{(x,-3) \mid -4 < x \leq 4\}$
15. $\{(x,y) \mid x > -2\}$
16. $\{(x,y) \mid x \leq 3\}$
17. $\{(x,y) \mid y < 4\}$
18. $\{(x,y) \mid x \leq 3,\ y < 2\}$
19. $\{(x,y) \mid x > 0,\ y < 4\}$
20. $\{(x,y) \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \frac{2}{3},\ \pi < y \leq \frac{9}{2}\}$

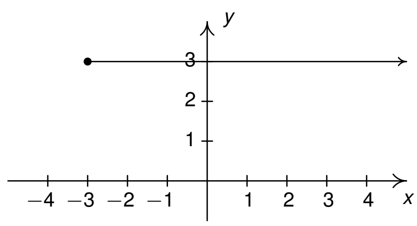
Nos exercícios 21 - 30, descreva a relação dada por enumeração ou por compreensão.

21.



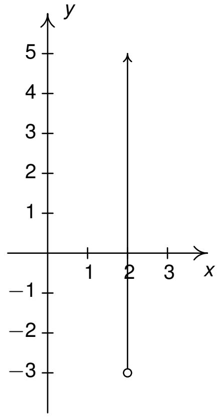
Relação A

22.



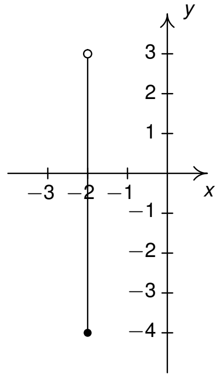
Relação B

23.



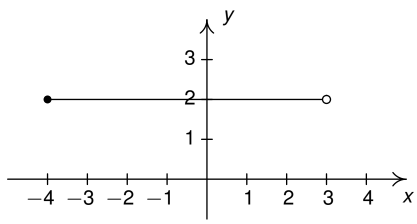
Relação C

24.



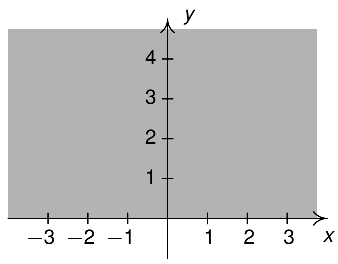
Relação D

25.



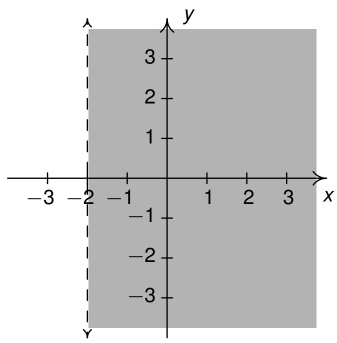
Relação E

26.



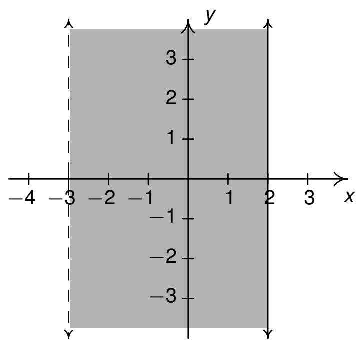
Relação F

27.



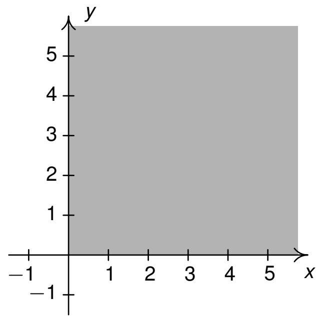
Relação G

28.



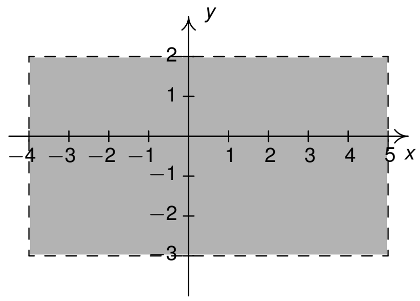
Relação H

29.



Relação I

30.



Relação J

Nos exercícios 31 - 36, esboce o gráfico da reta dada.

31. $x = -2$

32. $x = 3$

33. $y = 3$

34. $y = -2$

35. $x = 0$

36. $y = 0$

Algumas relações são bem fáceis de descrever em palavras ou por enumeração mas bastante difíceis, se não impossíveis, de se representar graficamente. Discuta com seus colegas como esboçar o gráfico das relações dadas nos exercícios 37 - 40. Note que na notação abaixo estamos usando as reticências, $\ldots$, para denotar que a lista não termina, mas continua seguindo o padrão estabelecido indefinidamente. Para as relações nos exercícios 37 e 38, dê dois exemplos de pontos que pertencem a relação e dois pontos que não pertencem.

37. $\{(x, y) \mid x$ é um inteiro ímpar, e y é um inteiro par.$\}$

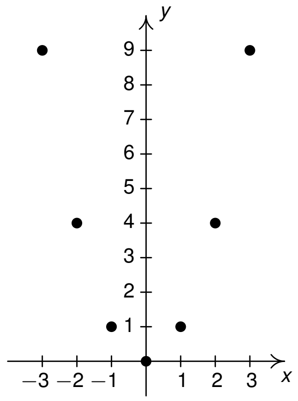
38. $\{(x, 1) \mid x$ é um número irracional$\}$

39. $\{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3), (16, 4), (32, 5), \ldots\}$

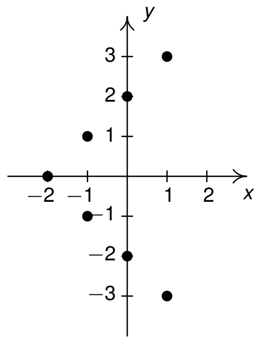
40. $\{\ldots, (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$

RESPOSTAS

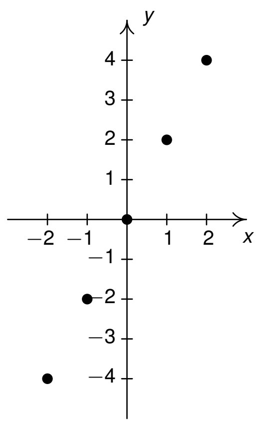
1.



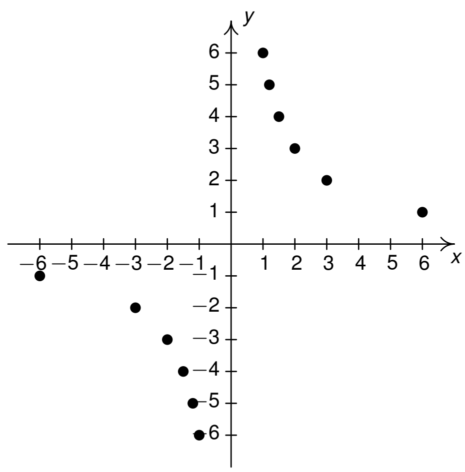
2.



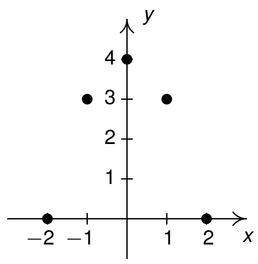
3.



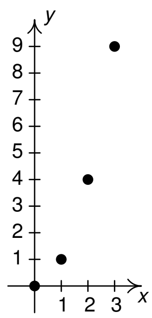
4.



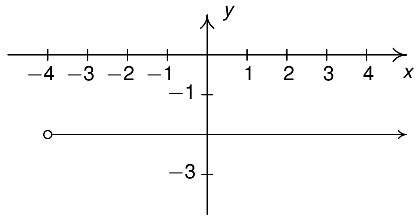
5.



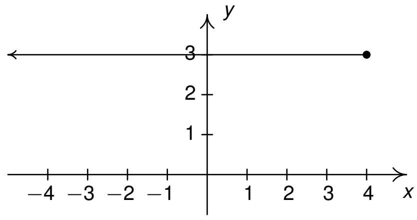
6.



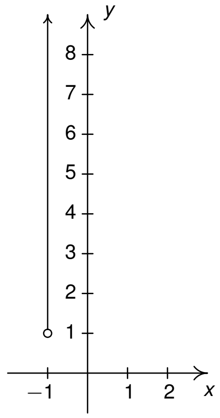
7.


y
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 x
−1
−3

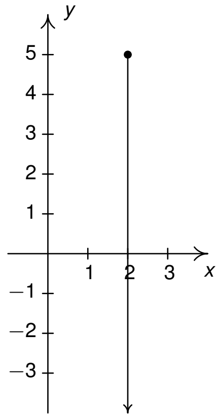
8.


y
3
2
1
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 x

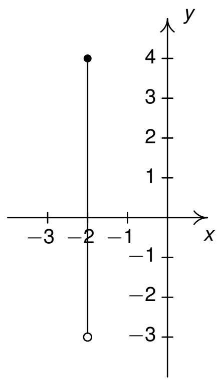
9.


y
8
7
6
5
4
3
2
1
−1 1 2 x

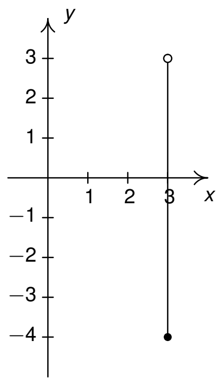
10.


y
5
4
3
2
1
1 2 3 x
−1
−2
−3

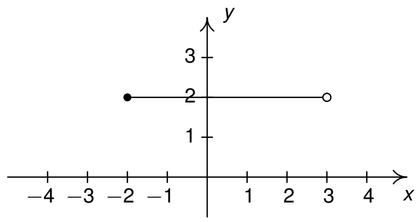
11.


y
4
3
2
1
−3 −2 −1 x
−1
−2
−3

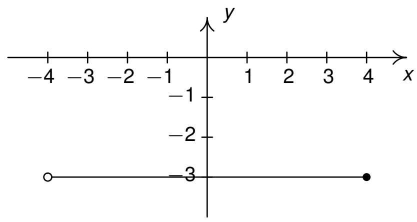
12.


y
3
2
1
1 2 3 x
−1
−2
−3
−4

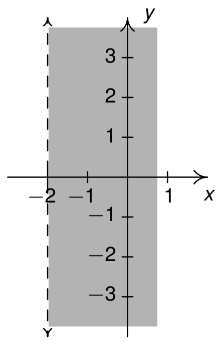
13.



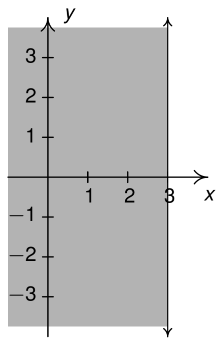
14.



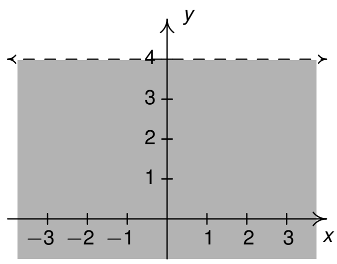
15.



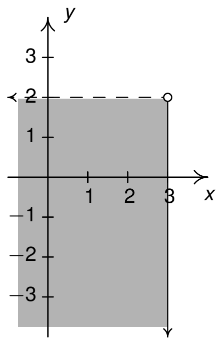
16.



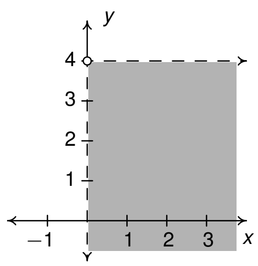
17.



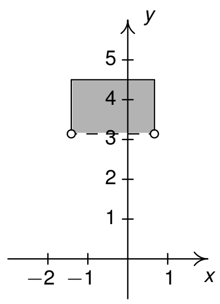
18.



19.



20.



21. $A = \{(-4,-1),(-2,1),(0,3),(1,4)\}$

22. $B = \{(x,3) \mid x \geq -3\}$

23. $C = \{\big(2,y\big) \mid y > -3\}$

24. $D = \{\big(-2,y\big) \mid -4 \leq y < 3\}$

25. $E = \{(x,2) \mid -4 < x \leq 3\}$

26. $F = \{\big(x,y\big) \mid y \geq 0\}$

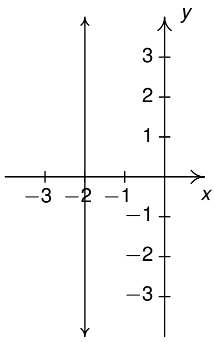
27. $G = \{(x,y) \mid x > -2\}$

28. $H = \{(x,y) \mid -3 < x \leq 2\}$

29. $I = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

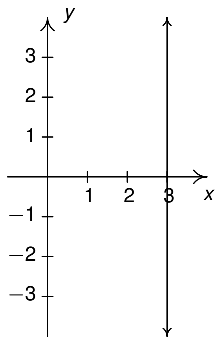
30. $J = \{(x, y) \mid -4 < x < 5,\ -3 < y < 2\}$

31.



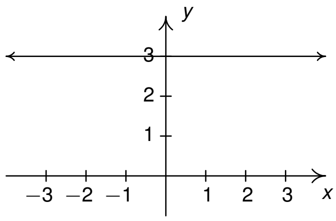
A reta $x = -2$

32.



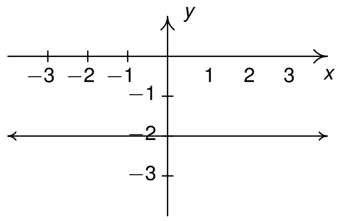
A reta $x = 3$

33.



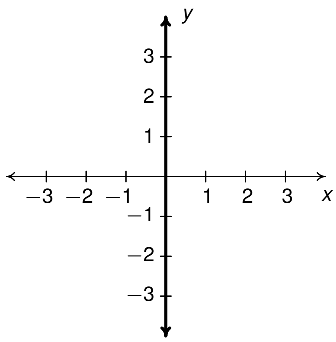
A reta $y = 3$

34.



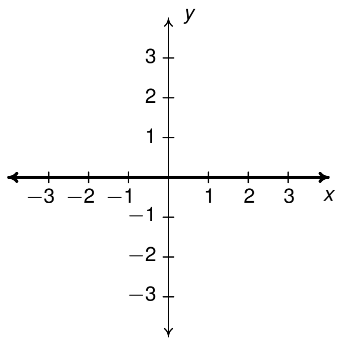
A reta $y = -2$

35.



A reta $x = 0$ é o eixo y

36.



A reta $y = 0$ é o eixo x

3 Introdução à Funções

Nos exercícios 1 - 12, determine se a relação representa y como uma função de x. Encontre o domínio e a imagem daquelas relações que são funções.

1. $\{(-3,9),\ (-2,4),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\}$

2. $\{(-3,0),(1,6),(2,-3),(4,2),(-5,6),(4,-9),(6,2)\}$

3. $\{(-3,0),(-7,6),(5,5),(6,4),(4,9),(3,0)\}$

4. $\{(1,2),(4,4),(9,6),(16,8),(25,10),(36,12),\ldots\}$

5. $\{(x,y) \mid x$ é um inteiro ímpar e y é um inteiro par$\}$

6. $\{(x,1) \mid x$ é um número irracional$\}$

7. $\{(1,0),\ (2,1),\ (4,2),\ (8,3),\ (16,4),\ (32,5),\ \ldots\}$

8. $\{\ldots,\ (-3,9),\ (-2,4),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ \ldots\}$

9. $\{(-2,y) \mid -3 < y < 4\}$

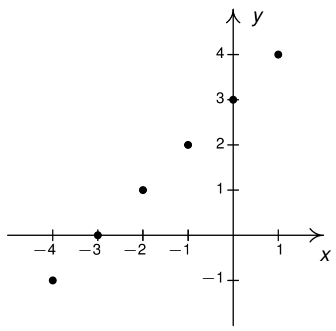
10. $\{(x,3) \mid -2 \leq x < 4\}$

11. $\{(x,x^2) \mid x$ é um número real$\}$

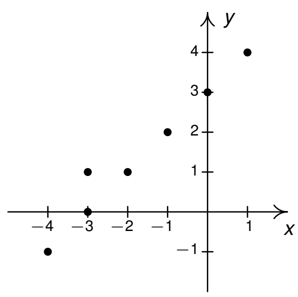
12. $\{(x^2,x) \mid x$ é um número real$\}$

Nos exercícios 13 - 32, determine se a relação representa y como uma função de x. Encontre o domínio e a imagem daquelas relações que são funções.

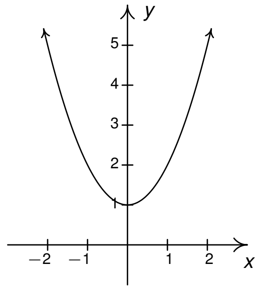
13.



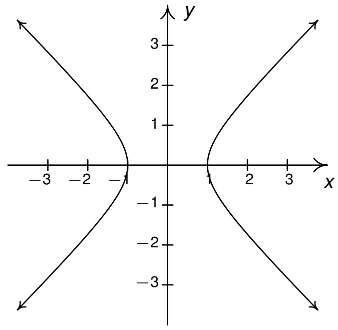
14.



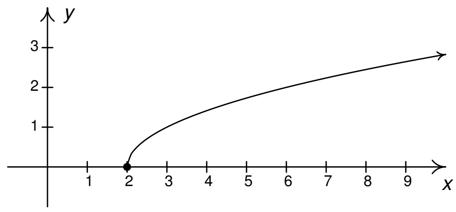
15.



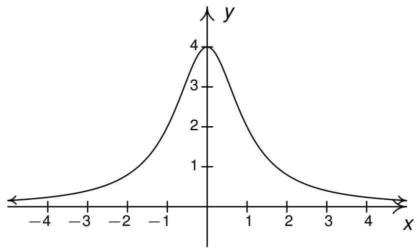
16.



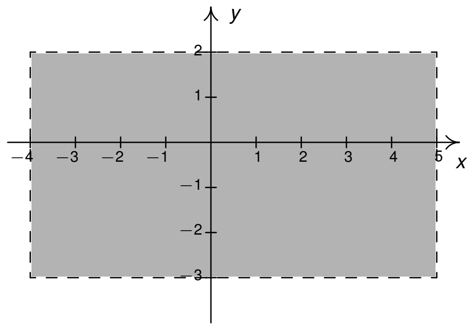
17.



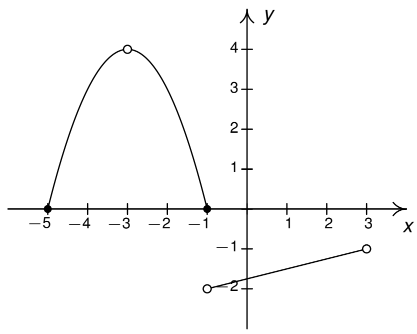
18.



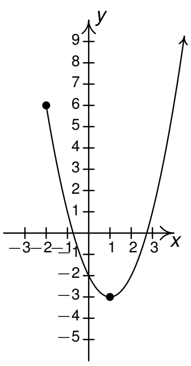
19.



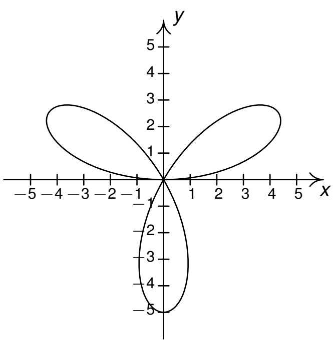
20.



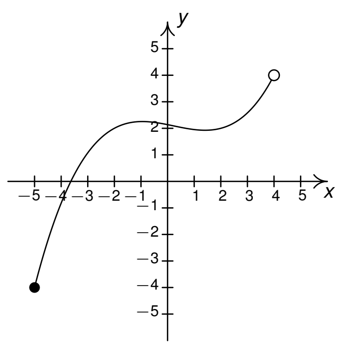
21.



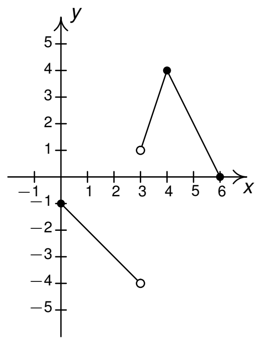
22.



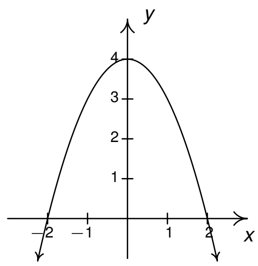
23.



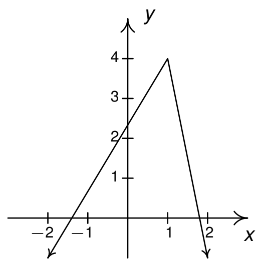
24.



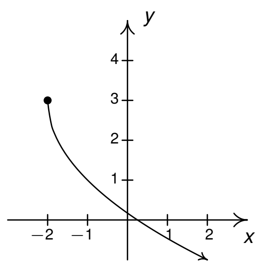
25.



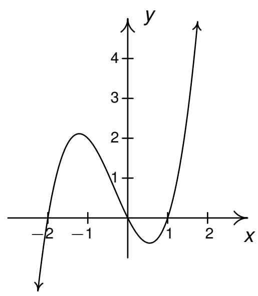
26.



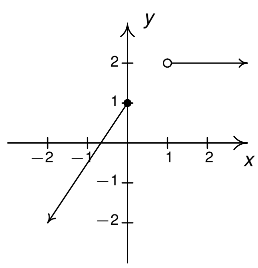
27.



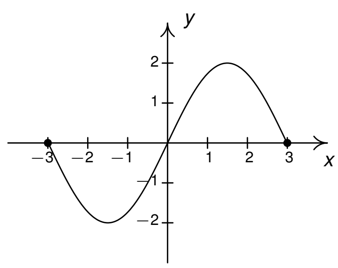
28.



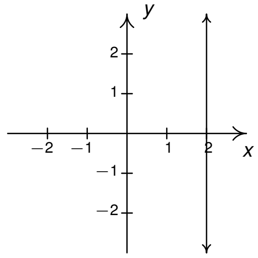
29.



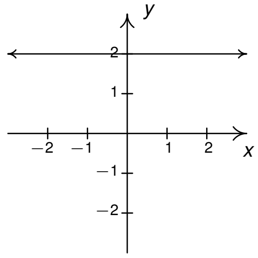
30.



31.



32.



Nos exercícios 33 - 47, determine se a equação representa y como uma função de x.

33. $y = x^3 - x$
34. $y = \sqrt{x-2}$
35. $x^3 y = -4$
36. $x^2 - y^2 = 1$
37. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$
38. $x = -6$
39. $x = y^2 + 4$
40. $y = x^2 + 4$
41. $x^2 + y^2 = 4$
42. $y = \sqrt{4 - x^2}$
43. $x^2 - y^2 = 4$
44. $x^3 + y^3 = 4$
45. $2x + 3y = 4$
46. $2xy = 4$
47. $x^2 = y^2$
48. Explique porque a população P de mapiguaris em uma dada area é uma função do tempo t. Qual a imagem dessa função?
49. Explique porque a relação entre seus colegas e seus endereços de *email* pode não ser uma função. E se trocarmos *email* por CPF?

Nem sempre é possível isolar o y em uma equação, mas isso não quer dizer que y não é uma função de x. O que é necessário é dois pontos com a mesma coordenada x e coordenadas y diferentes que satisfaçam a equação, de modo que o gráfico falha no Teste da Reta Vertical (TRV). Discuta com seus colegas como encontrar tais pontos para as relações dadas nos exercícios 50 - 53.

50. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$
51. $x^4 = x^2 + y^2$
52. $y^2 = x^3 + 3x^2$
53. $(x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3$

RESPOSTAS

1. Função
domínio = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
imagem = $\{0, 1, 4, 9\}$

2. Não é função

3. Função
domínio = $\{-7, -3, 3, 4, 5, 6\}$
imagem = $\{0, 4, 5, 6, 9\}$

4. Função
domínio = $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$
= $\{x \mid x$ é um quadrado perfeito$\}$
imagem = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
= $\{y \mid y$ é um inteiro positivo par$\}$

5. Não é função

6. Função
domínio = $\{x \mid x$ é irracional$\}$
imagem = $\{1\}$

7. Função
domínio = $\{x \mid x = 2^n$ para algum número inteiro $n\}$
imagem = $\{y \mid y$ é um número inteiro qualquer $\}$

8. Função
domínio = $\{x \mid x$ é um inteiro qualquer$\}$
imagem = $\{y \mid y = n^2$ para algum inteiro $n\}$

9. Não é função

10. Função
domínio = $[-2, 4)$, imagem = $\{3\}$

11. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $[0, \infty)$

12. Não é função

13. Função
domínio = $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
imagem = $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

14. Não é função

15. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $[1, \infty)$

16. Não é função

17. Função
domínio = $[2, \infty)$
imagem = $[0, \infty)$

18. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $(0, 4]$

19. Não é função

20. Função
domínio = $[-5, -3) \cup (-3, 3)$
imagem = $(-2, -1) \cup [0, 4)$

21. Função
domínio = $[-2, \infty)$
imagem = $[-3, \infty)$

22. Não é função

23. Função
domínio = $[-5, 4)$
imagem = $[-4, 4)$

24. Função
domínio = $[0, 3) \cup (3, 6]$
imagem = $(-4, -1] \cup [0, 4]$

25. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $(-\infty, 4]$

26. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $(-\infty, 4]$

27. Função
domínio = $[-2, \infty)$
imagem = $(-\infty, 3]$

28. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $(-\infty, \infty)$

29. Função
domínio = $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$
imagem = $(-\infty, 1] \cup \{2\}$

30. Função
domínio = $[-3, 3]$
imagem = $[-2, 2]$

31. Não é função

32. Função
domínio = $(-\infty, \infty)$
imagem = $\{2\}$

33. Função

34. Função

35. Função

36. Não é função

37. Função

38. Não é função

39. Não é função

40. Função

41. Não é função

42. Função

43. Não é função

44. Função

45. Função

46. Função

47. Não é função

4 Notação de Função

Nos exercícios 1 - 10, encontre uma expressão para $f(x)$ e determine seu domínio.

1. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) multiplica por 2; (2) soma 3; (3) divide por 4.
2. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) soma 3; (2) multiplica por 2; (3) divide por 4.
3. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) divide por 4; (2) soma 3; (3) multiplica por 2.
4. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) multiplica por 2; (2) soma 3; (3) toma a raiz quadrada.
5. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) soma 3; (2) multiplica por 2; (3) toma a raiz quadrada.
6. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) soma 3; (2) toma a raiz quadrada; (3) multiplica por 2.
7. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) toma a raiz quadrada; (2) subtrai 13; (3) faz a quantidade o denominador de uma fração com numerador 4.
8. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) subtrai 13; (2) toma a raiz quadrada; (3) faz a quantidade o denominador de uma fração com numerador 4.
9. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) toma a raiz quadrada; (2) faz a quantidade o denominador de uma fração com numerador 4; (3) subtrai 13.
10. f é uma função que toma um número real x e efetua os três passos seguintes na ordem dada: (1) faz a quantidade o denominador de uma fração com numerador 4; (2) toma a raiz quadrada; (3) subtrai 13.

Nos exercícios 11 - 18, avalie a função f, simplificando o resultado:

- $f(3)$
- $f(-1)$
- $f\left(\frac{3}{2}\right)$
- $f(4x)$
- $4f(x)$
- $f(-x)$
- $f(x-4)$
- $f(x)-4$
- $f\left(x^2\right)$

11. $f(x) = 2x + 1$
12. $f(x) = 3 - 4x$
13. $f(x) = 2 - x^2$
14. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
15. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
16. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

17. $f(x) = 6$

18. $f(x) = 0$

Nos exercícios 19 - 26, avalie a função f, simplificando o resultado:

- $f(2)$
- $f(-2)$
- $f(2a)$
- $2f(a)$
- $f(a+2)$
- $f(a) + f(2)$
- $f\left(\frac{2}{a}\right)$
- $\frac{f(a)}{2}$
- $f(a+h)$

19. $f(x) = 2x - 5$

20. $f(x) = 5 - 2x$

21. $f(x) = 2x^2 - 1$

22. $f(x) = 3x^2 + 3x - 2$

23. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

24. $f(x) = 117$

25. $f(x) = \dfrac{x}{2}$

26. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

Nos exercícios 27 - 34, avalie $f(0)$ e resolva a equação $f(x) = 0$:

27. $f(x) = 2x - 1$

28. $f(x) = 3 - \frac{2}{5}x$

29. $f(x) = 2x^2 - 6$

30. $f(x) = x^2 - x - 12$

31. $f(x) = \sqrt{x+4}$

32. $f(x) = \sqrt{1-2x}$

33. $f(x) = \dfrac{3}{4-x}$

34. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12x}{4 - x^2}$

35. Seja $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq -3 \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 < x \leq 3 \\ -x+5, & x > 3 \end{cases}$ Calcule o valor da função.

(a) $f(-4)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(3)$

(d) $f(3.001)$ (e) $f(-3.001)$ (f) $f(2)$

36. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad -1 < x \leq 1 \\ x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ Calcule o valor da função.

(a) $f(4)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(1)$

(d) $f(0)$ (e) $f(-1)$ (f) $f(-0.999)$

Nos exercícios 37 - 62, encontre o domínio implícito da função.

37. $f(x) = x^4 - 13x^3 + 56x^2 - 19$

38. $f(x) = x^2 + 4$

39. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+x-2}$

41. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

42. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-3}$

43. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-36}$

44. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-2}$

45. $f(x) = \sqrt{3-x}$

46. $f(x) = \sqrt{2x+5}$

47. $f(x) = 9x\sqrt{x+3}$

48. $f(x) = \dfrac{\sqrt{7-x}}{x^2+1}$

49. $f(x) = \sqrt{6x-2}$

50. $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{6x-2}}$

51. $f(x) = \sqrt[3]{6x-2}$

52. $f(x) = \dfrac{6}{4-\sqrt{6x-2}}$

53. $f(x) = \dfrac{\sqrt{6x-2}}{x^2-36}$

54. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{6x-2}}{x^2+36}$

55. $s(t) = \dfrac{t}{t-8}$

56. $Q(r) = \dfrac{\sqrt{r}}{r-8}$

57. $b(\theta) = \dfrac{\theta}{\sqrt{\theta-8}}$

58. $A(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{9-x}$

59. $\alpha(y) = \sqrt[3]{\dfrac{y}{y-8}}$

60. $g(v) = \dfrac{1}{4-\dfrac{1}{v^2}}$

61. $T(t) = \dfrac{\sqrt{t}-8}{5-t}$

62. $u(w) = \dfrac{w-8}{5-\sqrt{w}}$

63. A área A delimitada por um quadrado, em polegadas quadradas, é uma função do comprimento de um seus lados x, quando medidos em polegadas. Essa relação é expressa pela fórmula $A(x) = x^2$ para $x > 0$. Encontre $A(3)$ e resolva $A(x) = 36$. Interprete suas respostas. Por que x está restrito a $x > 0$?

64. A área A delimitada por círculo, em metros quadrados, é uma função de seu raio r, quando medido em metros. Essa relação é expressa pela fórmula $A(r) = \pi r^2$ para $r > 0$. Encontre $A(2)$ e resolva $A(r) = 16\pi$. Interprete suas respostas. Por que r está restrito a $r > 0$?

65. O volume V delimitado por um cube, em centímetros cúbicos, é uma função do comprimento x de um de seus lados, quando medido em centímetros. Essa relação é expressa pela fórmula $V(x) = x^3$ para $x > 0$. Encontre $V(5)$ e resolva $V(x) = 27$. Interprete suas respostas. Por que x está restrito a $x > 0$?

66. O volume V delimitado por uma esfera, em pés cúbicos, é uma função do raio r da esfera, quando medido em pés. Essa relação é expressa pela fórmula $V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$ para $r > 0$. Encontre $V(3)$ e resolva $V(r) = \frac{32\pi}{3}$. Interprete suas respostas. Por que r está restrito a $r > 0$?

67. A altura de um objeto solto do teto de prédio de oito andares é modelada por: $h(t) = -16t^2 + 64$, $0 \leq t \leq 2$. Aqui, h é a altura do objeto com relação ao solo, em pés, t segundos após o objeto ser solto. Encontre $h(0)$ e resolva $h(t) = 0$. Interprete suas respostas. Por que t está restrito a $0 \leq t \leq 2$?

68. A temperatura T em graus Fahrenheit t horas após as 6 da manhã é dada por $T(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 3$ para $0 \leq t \leq 12$. Encontre e interprete $T(0)$, $T(6)$ e $T(12)$.

69. A função $C(x) = x^2 - 10x + 27$ modela o custo, em *centenas* de dólares, para produzir x *milhares de* canetas. Encontre e interprete $C(0)$, $C(2)$ e $C(5)$.

70. Usando dados do Agência de Estatísticas de Transporte, a economia média de combustível F em milhas por galão por passageiro nos EUA pode ser modelada por $F(t) = -0.0076t^2 + 0.45t + 16$, $0 \leq t \leq 28$, onde t é o número de anos desde 1980. Use sua calculadora para encontrar $F(0)$, $F(14)$ e $F(28)$. Arredonde suas respostas para duas casas decimais e interprete suas respostas.

71. A população de mapinguaris do Amazonas pode ser modelada pela função $P(t) = \frac{150t}{t+15}$, onde t representa o número de anos desde 1803. Encontre e interprete $P(0)$ e $P(205)$. Discuta com seus colegas quais devem ser o domínio e a imagem de P.

72. Para imprimir n cópias do livro *Eu e Meu Mapinguari*, uma gráfica cobra $C(n)$ dólares, onde $C(n)$ é determinada pela fórmula

$$C(n) = \begin{cases} 15n & \text{se} \quad 1 \leq n \leq 25 \\ 13.50n & \text{se} \quad 25 < n \leq 50 \\ 12n & \text{se} \quad n > 50 \end{cases}$$

   (a) Encontre e interprete $C(20)$.
   (b) Quanto custa encomendar 50 cópias do livro? E 51 cópias?
   (c) Sua resposta para 72b deve ter deixado você pensando. Suponha que uma livraria estima vender 50 cópias do livro. Quantos livros podem de fato ser encomendados pelo mesmo preço daquelas 50 cópias? (Arredonde sua resposta para um número inteiro de livros.)

73. Uma distribuidora de revistas em quadrinhos cobra seus custos de envio de acordo com a seguinte fórmula

$$S(n) = \begin{cases} 1.5n + 2.5 & \text{se} \quad 1 \leq n \leq 14 \\ 0 & \text{se} \quad n \geq 15 \end{cases}$$

   onde n é o número de revistas compradas e $S(n)$ é o custo de envio em dólares.

   (a) Qual o custo de se enviar 10 revistas?
   (b) Qual o significado da fórmula $S(n) = 0$ para $n \geq 15$?

74. O custo C (em dólares) para falar m minutos ao mês em um plano de celular é modelado por

$$C(m) = \begin{cases} 25 & \text{se} \quad 0 \leq m \leq 1000 \\ 25 + 0.1(m - 1000) & \text{se} \quad m > 1000 \end{cases}$$

(a) Quanto custa falar 750 minutos por mês?

(b) Quanto custa falar 20 horas por mês?

(c) Explique os termos do plano verbalmente.

75. Seja $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números inteiros.[2] A **função piso inteiro de** x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro k com $k \leq x$.

    (a) Encontre $\lfloor 0.785 \rfloor$, $\lfloor 117 \rfloor$, $\lfloor -2.001 \rfloor$, e $\lfloor \pi + 6 \rfloor$

    (b) Discuta com seus colegas como $\lfloor x \rfloor$ pode ser descrito como uma função definida por várias sentenças.

    Dica: Existem infinitas sentenças!

    (c) Sempre é verdade que $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$? O que acontece se a ou b são inteiros? Teste alguns valores, faça uma conjectura e explique seu resultado.

76. Tentamos convencê-los através de exemplos que $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ em geral. Nossa experiência é que os alunos se recusam a acreditar nisso, portanto vamos tentar outra vez usando uma abordagem diferente. Com ajuda de seus colegas, encontre uma função f que satisfaz as seguintes propriedades:

    (a) $f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$

    (b) $f(5) = f(2+3) = f(2) + f(3)$

    (c) $f(-6) = f(0-6) = f(0) - f(6)$

    (d) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ sem importar os valores de a e b.

    Quantas funções você encontra que não satisfazem as condições acima? $f(x) = x^2$ funciona? E $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = 3x + 7$ ou $f(x) = \dfrac{1}{x}$? O que as funções que satisfazem a condição têm em comum? Deve haver algo, pois apenas uma família especial de funções realmente funciona. Voltamos assim ao fato anterior, $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ **em geral**.

[2] O uso da letra $\mathbb{Z}$ para inteiros vem da palavra *zahlen* que significa 'números' em alemão.

RESPOSTAS

1. $f(x) = \frac{2x+3}{4}$
   domínio: $(-\infty, \infty)$

2. $f(x) = \frac{2(x+3)}{4} = \frac{x+3}{2}$
   domínio: $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = 2\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{1}{2}x + 6$
   domínio: $(-\infty, \infty)$

4. $f(x) = \sqrt{2x+3}$
   domínio: $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$

5. $f(x) = \sqrt{2(x+3)} = \sqrt{2x+6}$
   domínio: $[-3, \infty)$

6. $f(x) = 2\sqrt{x+3}$
   domínio: $[-3, \infty)$

7. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-13}$
   domínio: $[0, 169) \cup (169, \infty)$

8. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-13}}$
   domínio: $(13, \infty)$

9. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 13$
   domínio: $(0, \infty)$

10. $f(x) = \sqrt{\frac{4}{x}} - 13 = \frac{2}{\sqrt{x}} - 13$
    domínio: $(0, \infty)$

11. Para $f(x) = 2x + 1$
    - $f(3) = 7$
    - $f(-1) = -1$
    - $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4$
    - $f(4x) = 8x + 1$
    - $4f(x) = 8x + 4$
    - $f(-x) = -2x + 1$
    - $f(x-4) = 2x - 7$
    - $f(x) - 4 = 2x - 3$
    - $f\left(x^2\right) = 2x^2 + 1$

12. Para $f(x) = 3 - 4x$
    - $f(3) = -9$
    - $f(-1) = 7$
    - $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$
    - $f(4x) = 3 - 16x$
    - $4f(x) = 12 - 16x$
    - $f(-x) = 4x + 3$
    - $f(x-4) = 19 - 4x$
    - $f(x) - 4 = -4x - 1$
    - $f\left(x^2\right) = 3 - 4x^2$

13. Para $f(x) = 2 - x^2$

- $f(3) = -7$
- $f(-1) = 1$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
- $f(4x) = 2 - 16x^2$
- $4f(x) = 8 - 4x^2$
- $f(-x) = 2 - x^2$
- $f(x-4) = -x^2+8x-14$
- $f(x) - 4 = -x^2 - 2$
- $f\left(x^2\right) = 2 - x^4$

14. Para $f(x) = x^2 - 3x + 2$

- $f(3) = 2$
- $f(-1) = 6$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
- $f(4x) = 16x^2 - 12x + 2$
- $4f(x) = 4x^2 - 12x + 8$
- $f(-x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x-4) = x^2-11x+30$
- $f(x) - 4 = x^2 - 3x - 2$
- $f\left(x^2\right) = x^4 - 3x^2 + 2$

15. Para $f(x) = \frac{x}{x-1}$

- $f(3) = \frac{3}{2}$
- $f(-1) = \frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 3$
- $f(4x) = \frac{4x}{4x-1}$
- $4f(x) = \frac{4x}{x-1}$
- $f(-x) = \frac{x}{x+1}$
- $f(x - 4) = \frac{x-4}{x-5}$
- $f(x) - 4 = \frac{x}{x-1} - 4$
  $= \frac{4-3x}{x-1}$
- $f\left(x^2\right) = \frac{x^2}{x^2-1}$

16. Para $f(x) = \frac{2}{x^3}$

- $f(3) = \frac{2}{27}$
- $f(-1) = -2$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{27}$
- $f(4x) = \frac{1}{32x^3}$
- $4f(x) = \frac{8}{x^3}$
- $f(-x) = -\frac{2}{x^3}$
- $f(x - 4) = \frac{2}{(x-4)^3}$
  $= \frac{2}{x^3-12x^2+48x-64}$
- $f(x) - 4 = \frac{2}{x^3} - 4$
  $= \frac{2-4x^3}{x^3}$
- $f\left(x^2\right) = \frac{2}{x^6}$

17. Para $f(x) = 6$

- $f(3) = 6$
- $f(-1) = 6$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 6$
- $f(4x) = 6$
- $4f(x) = 24$
- $f(-x) = 6$
- $f(x - 4) = 6$
- $f(x) - 4 = 2$
- $f\left(x^2\right) = 6$

18. Para $f(x) = 0$

- $f(3) = 0$
- $f(-1) = 0$
- $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
- $f(4x) = 0$
- $4f(x) = 0$
- $f(-x) = 0$
- $f(x-4) = 0$
- $f(x) - 4 = -4$
- $f\left(x^2\right) = 0$

19. Para $f(x) = 2x - 5$

- $f(2) = -1$
- $f(-2) = -9$
- $f(2a) = 4a - 5$
- $2f(a) = 4a - 10$
- $f(a+2) = 2a - 1$
- $f(a) + f(2) = 2a - 6$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{4}{a} - 5 = \frac{4-5a}{a}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{2a-5}{2}$
- $f(a+h) = 2a + 2h - 5$

20. Para $f(x) = 5 - 2x$

- $f(2) = 1$
- $f(-2) = 9$
- $f(2a) = 5 - 4a$
- $2f(a) = 10 - 4a$
- $f(a+2) = 1 - 2a$
- $f(a) + f(2) = 6 - 2a$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = 5 - \frac{4}{a} = \frac{5a-4}{a}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{5-2a}{2}$
- $f(a+h) = 5 - 2a - 2h$

21. Para $f(x) = 2x^2 - 1$

- $f(2) = 7$
- $f(-2) = 7$
- $f(2a) = 8a^2 - 1$
- $2f(a) = 4a^2 - 2$
- $f(a+2) = 2a^2 + 8a + 7$
- $f(a) + f(2) = 2a^2 + 6$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{8}{a^2} - 1 = \frac{8-a^2}{a^2}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{2a^2-1}{2}$
- $f(a+h) = 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 1$

22. Para $f(x) = 3x^2 + 3x - 2$

- $f(2) = 16$
- $f(-2) = 4$
- $f(2a) = 12a^2 + 6a - 2$
- $2f(a) = 6a^2 + 6a - 4$
- $f(a+2) = 3a^2 + 15a + 16$
- $f(a) + f(2) = 3a^2 + 3a + 14$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{12}{a^2} + \frac{6}{a} - 2 = \frac{12+6a-2a^2}{a^2}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{3a^2+3a-2}{2}$
- $f(a+h) = 3a^2 + 6ah + 3h^2 + 3a + 3h - 2$

23. Para $f(x) = \sqrt{2x+1}$

- $f(2) = \sqrt{5}$
- $f(-2)$ não é real
- $f(2a) = \sqrt{4a+1}$
- $2f(a) = 2\sqrt{2a+1}$
- $f(a+2) = \sqrt{2a+5}$
- $f(a)+f(2) = \sqrt{2a+1}+\sqrt{5}$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = \sqrt{\frac{4}{a}+1} = \sqrt{\frac{a+4}{a}}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{\sqrt{2a+1}}{2}$
- $f(a+h) = \sqrt{2a+2h+1}$

24. Para $f(x) = 117$

- $f(2) = 117$
- $f(-2) = 117$
- $f(2a) = 117$
- $2f(a) = 234$
- $f(a+2) = 117$
- $f(a) + f(2) = 234$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = 117$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{117}{2}$
- $f(a+h) = 117$

25. Para $f(x) = \frac{x}{2}$

- $f(2) = 1$
- $f(-2) = -1$
- $f(2a) = a$
- $2f(a) = a$
- $f(a+2) = \frac{a+2}{2}$
- $f(a) + f(2) = \frac{a}{2} + 1 = \frac{a+2}{2}$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a}$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{a}{4}$
- $f(a+h) = \frac{a+h}{2}$

26. Para $f(x) = \frac{2}{x}$

- $f(2) = 1$
- $f(-2) = -1$
- $f(2a) = \frac{1}{a}$
- $2f(a) = \frac{4}{a}$
- $f(a+2) = \frac{2}{a+2}$
- $f(a) + f(2) = \frac{2}{a} + 1$ $= \frac{a+2}{2}$
- $f\left(\frac{2}{a}\right) = a$
- $\frac{f(a)}{2} = \frac{1}{a}$
- $f(a+h) = \frac{2}{a+h}$

27. Para $f(x) = 2x - 1$, $f(0) = -1$ e $f(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}$

28. Para $f(x) = 3 - \frac{2}{5}x$, $f(0) = 3$ e $f(x) = 0$ quando $x = \frac{15}{2}$

29. Para $f(x) = 2x^2 - 6$, $f(0) = -6$ e $f(x) = 0$ quando $x = \pm\sqrt{3}$

30. Para $f(x) = x^2 - x - 12$, $f(0) = -12$ e $f(x) = 0$ quando $x = -3$ ou $x = 4$

31. Para $f(x) = \sqrt{x+4}$, $f(0) = 2$ e $f(x) = 0$ quando $x = -4$

32. Para $f(x) = \sqrt{1-2x}$, $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ quando $x = \frac{1}{2}$

33. Para $f(x) = \frac{3}{4-x}$, $f(0) = \frac{3}{4}$ e $f(x)$ nunca é igual a 0

34. Para $f(x) = \frac{3x^2-12x}{4-x^2}$, $f(0) = 0$ e $f(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = 4$

35. (a) $f(-4) = 1$ (b) $f(-3) = 2$ (c) $f(3) = 0$
(d) $f(3.001) = 1.999$ (e) $f(-3.001) = 1.999$ (f) $f(2) = \sqrt{5}$

36. (a) $f(4) = 4$ (b) $f(-3) = 9$ (c) $f(1) = 0$
(d) $f(0) = 1$ (e) $f(-1) = 1$ (f) $f(-0.999) \approx 0.0447$

37. $(-\infty, \infty)$

38. $(-\infty, \infty)$

39. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

40. $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

41. $(-\infty, \infty)$

42. $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

43. $(-\infty, -6) \cup (-6, 6) \cup (6, \infty)$

44. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

45. $(-\infty, 3]$

46. $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$

47. $[-3, \infty)$

48. $(-\infty, 7]$

49. $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

50. $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

51. $(-\infty, \infty)$

52. $\left[\frac{1}{3}, 3\right) \cup (3, \infty)$

53. $\left[\frac{1}{3}, 6\right) \cup (6, \infty)$

54. $(-\infty, \infty)$

55. $(-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

56. $[0, 8) \cup (8, \infty)$

57. $(8, \infty)$

58. $[7, 9]$

59. $(-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

60. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

61. $[0, 5) \cup (5, \infty)$

62. $[0, 25) \cup (25, \infty)$

63. $A(3) = 9$, assim a área delimitada pelo quadrado com um lado de comprimento 3 polegadas é 9 polegadas quadradas. As soluções de $A(x) = 36$ são $x = \pm 6$. Uma vez que x é restrito a $x > 0$, só mantemos $x = 6$. Isso significa que para a área delimitada pelo quadrado ser 36 polegadas quadradas, o comprimento do lado precisa ser de 6 polegadas. Uma vez que x representa um comprimento, $x > 0$.

64. $A(2) = 4\pi$, assim a área delimitado por um círculo de raio 2 metros é 4π metros quadrados. As soluções de $A(r) = 16\pi$ são $r = \pm 4$. Uma vez que r é restrito a $r > 0$, só mantemos $r = 4$. Isso significa que para a área delimitada pelo círculo ser 16π metros quadrados, o raio precisa ter 4 metros. Uma vez que r representa um raio (um comprimento), $r > 0$.

65. $V(5) = 125$, assim o volume delimitado por um cubo com um lado de comprimento 5 centímetros é 125 centímetros cúbicos. A solução de $V(x) = 27$ é $x = 3$. Isso significa que para o volume delimitado pelo cubo ser 27 centímetros cúbicos, o comprimento do lado precisa ser 3 centímetros. Uma vez que x representa um comprimento, $x > 0$.

66. $V(3) = 36\pi$, assim a volume delimitado por uma esfera com raio 3 pés é 36π pés cúbicos. A solução de $V(r) = \frac{32\pi}{3}$ é $r = 2$. Isso significa que para o volume delimitado pela esfera ser $\frac{32\pi}{3}$ pés cúbicos, o raio precisa ser 2 pés. Uma vez que r representa um raio (um comprimento), $r > 0$.

67. $h(0) = 64$, portanto no momento da soltura, o objeto está a 64 pés do solo. As soluções de $h(t) = 0$ são $t = \pm 2$. Uma vez que restringimos $0 \leq t \leq 2$, só mantemos $t = 2$. Isso significa que 2 segundos após a soltura do objeto, ele está a 0 pés do solo. De outra forma, o objeto toca o solo após 2 segundos. A condição $0 \leq t \leq 2$ restringe o tempo para entre o momento da soltura do objeto e o momento que ele atinge o solo.

68. $T(0) = 3$, portanto às 6 da manhã (0 horas após as 6), está fazendo 3° Fahrenheit. $T(6) = 33$, portanto ao meio-dia (6 horas após as 6), a temperatura é de 33° Fahrenheit. $T(12) = 27$, portanto às 6 da tarde (12 horas após as 6), está fazendo 27° Fahrenheit.

69. $C(0) = 27$, portanto custa \$2700 para fazer 0 canetas[3] . $C(2) = 11$, portanto para fazer 2000 canetas, custa \$1100. $C(5) = 2$, portanto para fazer 5000 canetas, custa \$200.

70. $F(0) = 16.00$, portanto em 1980 (0 anos após 1980), a economia média de combustível por passageiro nos EUA foi de 16.00 millhas por galão. $F(14) = 20.81$, portanto em 1994 (14 anos após 1980), a economia média foi de 20.81 milhas por galão. $F(28) = 22.64$, portanto em 2008 (28 anos após 1980), a economia média foi de 22.64 milhas por galão.

71. $P(0) = 0$ o que significa que não havia mapinguaris no Amazonas em 1803 (0 anos após1803). $P(205) = \frac{3075}{22} \approx 139.77$, portanto em 2008 (205 anos após 1803), havia entre 139 e 140 mapinguaris no Amazonas.

[3] Esse é o 'custo fixo'.

72. (a) $C(20) = 300$. Custa \$300 para 20 cópias do livro.
    (b) $C(50) = 675$, portanto custa \$675 para 50 cópias do livro. $C(51) = 612$, portanto custa \$612 para 51 cópias do livro.
    (c) 56 livros.

73. (a) $S(10) = 17.5$, portanto custa \$17.50 para enviar 10 revistas.
    (b) Existe envio grátis em pedidos acima de 15 livros.

74. (a) $C(750) = 25$, portanto custa \$25 para falar 750 minutos por mês nesse plano.
    (b) Uma vez que 20 horas = 1200 minutos, fazemos $m = 1200$ e temos que $C(1200) = 45$. Portanto custa \$45 para falar 20 horas por mês com esse plano.
    (c) Custa \$25 até 1000 minutos e 10 centavos por minuto para cada minuto acima de 1000 minutos.

75. (a) $\lfloor 0.785 \rfloor = 0$, $\lfloor 117 \rfloor = 117$, $\lfloor -2.001 \rfloor = -3$, e $\lfloor \pi + 6 \rfloor = 9$

5 Aritmética das Funções

Nos exercícios 1 - 10, use o par de funções f e g para encontrar os seguintes valores, caso existam.

- $(f+g)(2)$
- $(f-g)(-1)$
- $(g-f)(1)$
- $(fg)\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$

1. $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 4 - x$
2. $f(x) = x^2$ e $g(x) = -2x + 1$
3. $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 12 - x^2$
4. $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = -x^2 - 2x - 3$
5. $f(x) = \sqrt{x+3}$ e $g(x) = 2x - 1$
6. $f(x) = \sqrt{4-x}$ e $g(x) = \sqrt{x+2}$
7. $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
8. $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{3}{2x-3}$
9. $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
10. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Nos exercícios 11 - 20, use o par de f e g para encontrar o domínio da função indicada, em seguida encontre e simplifique a expressão para ela.

- $(f+g)(x)$
- $(f-g)(x)$
- $(fg)(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

11. $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - 2$
12. $f(x) = 1 - 4x$ e $g(x) = 2x - 1$
13. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x - 1$
14. $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 7x$
15. $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 3x + 6$
16. $f(x) = -x^2 + x + 6$ e $g(x) = x^2 - 9$
17. $f(x) = \dfrac{x}{2}$ e $g(x) = \dfrac{2}{x}$
18. $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$
19. $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$
20. $f(x) = \sqrt{x-5}$ e $g(x) = f(x) = \sqrt{x-5}$

Nos exercícios 21 - 45, encontre e simplifique o quociente da diferença $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para a função dada.

21. $f(x) = 2x - 5$
22. $f(x) = -3x + 5$
23. $f(x) = 6$
24. $f(x) = 3x^2 - x$
25. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
26. $f(x) = 4x^2$
27. $f(x) = x - x^2$
28. $f(x) = x^3 + 1$
29. $f(x) = mx + b$ onde $m \neq 0$
30. $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$
31. $f(x) = \dfrac{2}{x}$
32. $f(x) = \dfrac{3}{1-x}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

34. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$

35. $f(x) = \dfrac{1}{4x-3}$

36. $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x-9}$

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$

39. $f(x) = \sqrt{x-9}$

40. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

41. $f(x) = \sqrt{-4x+5}$

42. $f(x) = \sqrt{4-x}$

43. $f(x) = \sqrt{ax+b}$, onde $a \neq 0$.

44. $f(x) = x\sqrt{x}$

45. $f(x) = \sqrt[3]{x}$. **Dica:** $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 - b^3$

Nos exercícios 46 - 50, $C(x)$ denota o *custo* para produzir x itens, $\overline{C}(x) = C(x)/x$ é o *custo médio*, $p(x)$ denota a função *preço-demanda* por item, $R(x) = xp(x)$ denota o *a receita bruta* e $P(x) = (R-C)(x)$ denota o *lucro*. Em cada exercício, faça o seguinte:

- encontre e interprete $C(0)$.
- encontre e interprete $\overline{C}(10)$.
- encontre e interprete $p(5)$
- encontre e simplifique $R(x)$.
- encontre e simplifique $P(x)$.
- resolva $P(x) = 0$ e interprete.

46. O custo em dólares para produzir x camisetas "Prefiro ser um Mapinguari" é $C(x) = 2x + 26$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 30 - 2x$, $0 \leq x \leq 15$.

47. O custo em dólares para produzir x garrafas de Guaraná Mapinguari é $C(x) = 10x+100$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 35 - x$, $0 \leq x \leq 35$.

48. O custo em centavos de dólar para produzir x copos de Limonada Mapinguari é $C(x) = 18x + 240$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 90 - 3x$, $0 \leq x \leq 30$.

49. O custo diário em dólares para produzir x Tortas de Banana Mapinguari é $C(x) = 3x + 36$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 12 - 0.5x$, $0 \leq x \leq 24$.

50. O custo mensal em centenas de dólares para produzir x motocicletas elétricas é $C(x) = 20x + 1000$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 140 - 2x$, $0 \leq x \leq 70$.

Nos exercícios 51 - 62, sejam f a função definida por

$$f = \{(-3,4), (-2,2), (-1,0), (0,1), (1,3), (2,4), (3,-1)\}$$

e g a função definida por

$$g = \{(-3,-2), (-2,0), (-1,-4), (0,0), (1,-3), (2,1), (3,2)\}.$$

Calcule o valor indicado, caso exista.

51. $(f+g)(-3)$

52. $(f-g)(2)$

53. $(fg)(-1)$

54. $(g+f)(1)$

55. $(g-f)(3)$

56. $(gf)(-3)$

57. $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

58. $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

59. $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

60. $\left(\frac{g}{f}\right)(-1)$

61. $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$

62. $\left(\frac{g}{f}\right)(-3)$

RESPOSTAS

1. Para $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 4 - x$

   - $(f + g)(2) = 9$
   - $(f - g)(-1) = -7$
   - $(g - f)(1) = -1$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{35}{4}$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{1}{4}$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = -\frac{6}{5}$

2. Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = -2x + 1$

   - $(f + g)(2) = 1$
   - $(f - g)(-1) = -2$
   - $(g - f)(1) = -2$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 0$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{5}{4}$

3. Para $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 12 - x^2$

   - $(f + g)(2) = 10$
   - $(f - g)(-1) = -9$
   - $(g - f)(1) = 11$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{16}$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 0$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{4}{3}$

4. Para $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = -x^2 - 2x - 3$

   - $(f + g)(2) = 5$
   - $(f - g)(-1) = 0$
   - $(g - f)(1) = -8$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{16}$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 0$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{3}{16}$

5. Para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ e $g(x) = 2x - 1$

   - $(f + g)(2) = 3 + \sqrt{5}$
   - $(f - g)(-1) = 3 + \sqrt{2}$
   - $(g - f)(1) = -1$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = -\sqrt{3}$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = -5$

6. Para $f(x) = \sqrt{4 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x + 2}$

   - $(f + g)(2) = 2 + \sqrt{2}$
   - $(f - g)(-1) = -1 + \sqrt{5}$
   - $(g - f)(1) = 0$
   - $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{35}}{2}$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \sqrt{2}$
   - $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = 0$

7. Para $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2x+1}$

- $(f+g)(2) = \frac{21}{5}$
- $(f-g)(-1) = -1$
- $(g-f)(1) = -\frac{5}{3}$
- $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 0$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{1}{12}$

8. Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{3}{2x-3}$

- $(f+g)(2) = 7$
- $(f-g)(-1) = \frac{8}{5}$
- $(g-f)(1) = -4$
- $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 0$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = -\frac{3}{28}$

9. Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$

- $(f+g)(2) = \frac{17}{4}$
- $(f-g)(-1) = 0$
- $(g-f)(1) = 0$
- $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$ é indefinida.
- $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{1}{16}$

10. Para $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- $(f+g)(2) = \frac{26}{5}$
- $(f-g)(-1) = \frac{3}{2}$
- $(g-f)(1) = -\frac{3}{2}$
- $(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = 1$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = \frac{1}{25}$

11. Para $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - 2$

- $(f+g)(x) = 3x - 1$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f-g)(x) = x + 3$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = 2x^2 - 3x - 2$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
  domínio: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

12. Para $f(x) = 1 - 4x$ e $g(x) = 2x - 1$

- $(f+g)(x) = -2x$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f-g)(x) = 2 - 6x$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = -8x^2 + 6x - 1$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-4x}{2x-1}$
  domínio: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

13. Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x - 1$

- $(f + g)(x) = x^2 + 3x - 1$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f - g)(x) = x^2 - 3x + 1$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = 3x^3 - x^2$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{3x-1}$
  domínio: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

14. Para $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 7x$

- $(f + g)(x) = x^2 + 6x$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f - g)(x) = x^2 - 8x$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = 7x^3 - 7x^2$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{7}$
  domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

15. Para $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 3x + 6$

- $(f + g)(x) = x^2 + 3x + 2$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f - g)(x) = x^2 - 3x - 10$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12x - 24$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-2}{3}$
  domínio: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

16. Para $f(x) = -x^2 + x + 6$ e $g(x) = x^2 - 9$

- $(f + g)(x) = x - 3$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f - g)(x) = -2x^2 + x + 15$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(fg)(x) = -x^4 + x^3 + 15x^2 - 9x - 54$
  domínio: $(-\infty, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\frac{x+2}{x+3}$
  domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

17. Para $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{2}{x}$

- $(f + g)(x) = \frac{x^2+4}{2x}$
  domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $(f - g)(x) = \frac{x^2-4}{2x}$
  domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $(fg)(x) = 1$
  domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{4}$
  domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

18. Para $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x-1}$

   - $(f + g)(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$
     domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
   - $(f - g)(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$
     domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
   - $(fg)(x) = 1$
     domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^2 - 2x + 1$
     domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

19. Para $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$

   - $(f + g)(x) = x + \sqrt{x + 1}$
     domínio: $[-1, \infty)$
   - $(f - g)(x) = x - \sqrt{x + 1}$
     domínio: $[-1, \infty)$
   - $(fg)(x) = x\sqrt{x + 1}$
     domínio: $[-1, \infty)$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$
     domínio: $(-1, \infty)$

20. Para $f(x) = \sqrt{x - 5}$ e $g(x) = f(x) = \sqrt{x - 5}$

   - $(f + g)(x) = 2\sqrt{x - 5}$
     domínio: $[5, \infty)$
   - $(f - g)(x) = 0$
     domínio: $[5, \infty)$
   - $(fg)(x) = x - 5$
     domínio: $[5, \infty)$
   - $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$
     domínio: $(5, \infty)$

21. 2

22. -3

23. 0

24. $6x + 3h - 1$

25. $-2x - h + 2$

26. $8x + 4h$

27. $-2x - h + 1$

28. $3x^2 + 3xh + h^2$

29. m

30. $2ax + ah + b$

31. $\dfrac{-2}{x(x + h)}$

32. $\dfrac{3}{(1 - x - h)(1 - x)}$

33. $\dfrac{-(2x + h)}{x^2(x + h)^2}$

34. $\dfrac{-2}{(x + 5)(x + h + 5)}$

35. $\dfrac{-4}{(4x - 3)(4x + 4h - 3)}$

36. $\dfrac{3}{(x + 1)(x + h + 1)}$

37. $\dfrac{-9}{(x - 9)(x + h - 9)}$

38. $\dfrac{2x^2 + 2xh + 2x + h}{(2x + 1)(2x + 2h + 1)}$

39. $\dfrac{1}{\sqrt{x + h - 9} + \sqrt{x - 9}}$

40. $\dfrac{2}{\sqrt{2x + 2h + 1} + \sqrt{2x + 1}}$

41. $\dfrac{-4}{\sqrt{-4x - 4h + 5} + \sqrt{-4x + 5}}$

42. $\dfrac{-1}{\sqrt{4 - x - h} + \sqrt{4 - x}}$

43. $\dfrac{a}{\sqrt{ax+ah+b}+\sqrt{ax+b}}$

44. $\dfrac{3x^2+3xh+h^2}{(x+h)^{3/2}+x^{3/2}}$

45. $\dfrac{1}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}$

46.
- $C(0) = 26$, portanto os custos fixos são \$26.
- $\overline{C}(10) = 4.6$, assim quando 10 camisetas são produzidas, o custo por camiseta é \$4.60.
- $p(5) = 20$, portanto para vender 5 camisetas, coloque o preço a \$20 por camiseta.
- $R(x) = -2x^2 + 30x$, $0 \leq x \leq 15$
- $P(x) = -2x^2 + 28x - 26$, $0 \leq x \leq 15$
- $P(x) = 0$ quando $x = 1$ e $x = 13$. Esses são os pontos do 'zero-a-zero', portanto vender uma camiseta ou 13 camisetas garante que receita cobre exatamente o custo de produção.

47.
- $C(0) = 100$, portanto os custos fixos são \$100.
- $\overline{C}(10) = 20$, assim quando 10 garrafas de guaraná são produzidas, o custo por garrafa é \$20.
- $p(5) = 30$, portanto para vender 5 garrafas, coloque o preço a \$30 por garrafa.
- $R(x) = -x^2 + 35x$, $0 \leq x \leq 35$
- $P(x) = -x^2 + 25x - 100$, $0 \leq x \leq 35$
- $P(x) = 0$ quando $x = 5$ e $x = 20$. Esses são os pontos do 'zero-a-zero', portanto vender 5 ou 20 garrafas de guaraná garante que receita cobre exatamente o custo de produção.

48.
- $C(0) = 240$, portanto os custos fixos são 240¢ ou \$2.40.
- $\overline{C}(10) = 42$, assim quando 10 copos de limonada são feitos, o custo por copo é 42¢.
- $p(5) = 75$, portanto para vender 5 copos de limonada, coloque o preço a 75¢ por copo.
- $R(x) = -3x^2 + 90x$, $0 \leq x \leq 30$
- $P(x) = -3x^2 + 72x - 240$, $0 \leq x \leq 30$
- $P(x) = 0$ quando $x = 4$ e $x = 20$. Esses são os pontos do 'zero-a-zero', portanto vender 4 ou 20 copos de limonada garante que receita cobre exatamente o custo de produção.

49. • $C(0) = 36$, portanto os custos fixos diários são \$36.
   - $\overline{C}(10) = 6.6$, assim quando 10 tortas são feitas, o custo por torta é \$6.60.
   - $p(5) = 9.5$, portanto para vender 5 tortas por dia, coloque o preço a \$9.50 por torta.
   - $R(x) = -0.5x^2 + 12x$, $0 \leq x \leq 24$
   - $P(x) = -0.5x^2 + 9x - 36$, $0 \leq x \leq 24$
   - $P(x) = 0$ quando $x = 6$ e $x = 12$. Esses são os pontos do 'zero-a-zero', portanto vender 6 ou 12 tortas por dia garante que receita cobre exatamente o custo de produção.

50. • $C(0) = 1000$, portanto os custos fixos mensais são 1000 *centenas* de dólares, ou \$100,000.
   - $\overline{C}(10) = 120$, assim quando 10 motocicletas são feitas, o custo por motocicleta é 120 centenas de dólares, ou \$12,000.
   - $p(5) = 130$, portanto para vender 5 motocicletas por mês, coloque o preço a 130 centenas de dólares, ou \$13,000 por motocicleta.
   - $R(x) = -2x^2 + 140x$, $0 \leq x \leq 70$
   - $P(x) = -2x^2 + 120x - 1000$, $0 \leq x \leq 70$
   - $P(x) = 0$ quando $x = 10$ e $x = 50$. Esses são os pontos do 'zero-a-zero', portanto vender 10 ou 50 motocicletas por mês garante que receita cobre exatamente o custo de produção.

51. $(f + g)(-3) = 2$
52. $(f - g)(2) = 3$
53. $(fg)(-1) = 0$
54. $(g + f)(1) = 0$
55. $(g - f)(3) = 3$
56. $(gf)(-3) = -8$
57. $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ não existe
58. $\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = 0$
59. $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 4$
60. $\left(\frac{g}{f}\right)(-1)$ não existe
61. $\left(\frac{g}{f}\right)(3) = -2$
62. $\left(\frac{g}{f}\right)(-3) = -\frac{1}{2}$

6 Gráficos de Equações

1. Para cada equação dada abaixo

   - Encontre as interseções do gráfico com os eixos x e y , caso existam.
   - Isole a variável y e atribua valores à variável x para criar uma tabela de pontos sobre o gráfico da equação.
   - Marque os pontos amostrais e crie uma esboço aproximado do gráfico da equação.
   - Teste por simetria com relação aos eixos x (o par $(x, -y)$ satisfaz a equação sempre que o par (x, y) satisfaz) e y (o par $(-x, y)$ satisfaz a equação sempre que o par (x, y) satisfaz) e com relação à origem (o par $(-x, -y)$ satisfaz a equação sempre que o par (x, y) satisfaz). Se a equação falha em qualquer dos teste de simetria, encontre um ponto do gráfico que viola a simetria.

   (a) $y = x^2 + 1$
   (b) $y = x^2 - 2x - 8$
   (c) $y = x^3 - x$
   (d) $y = \frac{x^3}{4} - 3x$
   (e) $y = \sqrt{x - 2}$
   (f) $y = 2\sqrt{x + 4} - 2$
   (g) $3x - y = 7$
   (h) $3x - 2y = 10$
   (i) $(x + 2)^2 + y^2 = 16$
   (j) $x^2 - y^2 = 1$
   (k) $4y^2 - 9x^2 = 36$
   (l) $x^3 y = -4$

2. O procedimento resumido no exercício acima só funciona porque as equações são “bem-comportadas”. Nem tudo na Matemática é tão simples assim, como as equações seguintes demonstram. Discuta com sua colegas como traçar o gráfico das equações dadas nos exercícios abaixo. Que dificuldades surgem quando se tenta aplicar o procedimento dado nesta seção?

   (a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ Fólio de Descartes
   (b) $x^4 = x^2 + y^2$ Kampyle de Eudoxo
   (c) $y^2 = x^3 + 3x^2$ Cúbica de Tschirnhausen
   (d) $(x^2 + y^2)^2 = x^3 + y^3$ Curva do Ovo Curvado

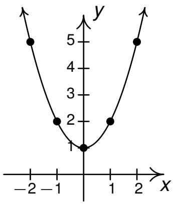
RESPOSTAS

1. (a) $y = x^2 + 1$

O gráfico não tem interseções com o eixo x

interseção com eixo y: $(0, 1)$

x	y	(x, y)
-2	5	$(-2, 5)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	$(0, 1)$
1	2	$(1, 2)$
2	5	$(2, 5)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(2, 5)$ está sobre o gráfico mas $(2, -5)$ não está)

O gráfico é simétrico com relação ao eixo y

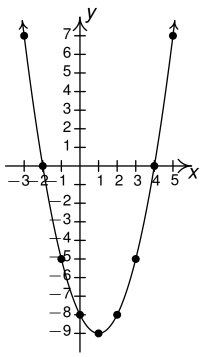
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(2, 5)$ está sobre o gráfico mas $(-2, -5)$ não está)

(b) $y = x^2 - 2x - 8$

interseção com o eixo x: $(4, 0)$, $(-2, 0)$

interseção com o eixo y: $(0, -8)$

x	y	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	0	$(-2, 0)$
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-8	$(0, -8)$
1	-9	$(1, -9)$
2	-8	$(2, -8)$
3	-5	$(3, -5)$
4	0	$(4, 0)$
5	7	$(5, 7)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(-3, 7)$ está sobre o gráfico mas $(-3, -7)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(-3, 7)$ está sobre o gráfico mas $(3, 7)$ não está)

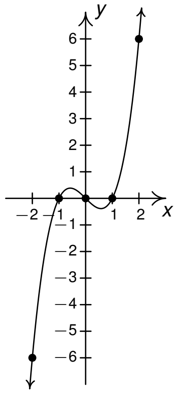
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(-3, 7)$ está sobre o gráfico mas $(3, -7)$ não está)

(a) $y = x^3 - x$

interseção com o eixo x:
$(-1,0), (0,0), (1,0)$

interseção com o eixo y: $(0,0)$

x	y	(x,y)
-2	-6	$(-2,-6)$
-1	0	$(-1,0)$
0	0	$(0,0)$
1	0	$(1,0)$
2	6	$(2,6)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x. (e.g. $(2,6)$ está sobre o gráfico mas $(2,-6)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y. (e.g. $(2,6)$ está sobre o gráfico mas $(-2,6)$ não está)

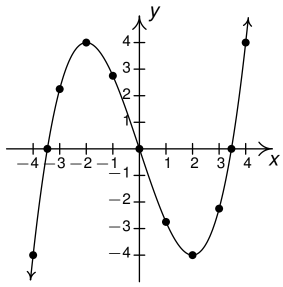
O gráfico é simétrico com relação à origem.

(b) $y = \frac{x^3}{4} - 3x$

interseção com o eixo x:
$\left(\pm 2\sqrt{3}, 0\right), (0,0)$

interseção com o eixo y: $(0,0)$

x	y	(x,y)
-4	-4	$(-4,-4)$
-3	$\frac{9}{4}$	$\left(-3, \frac{9}{4}\right)$
-2	4	$(-2,4)$
-1	$\frac{11}{4}$	$\left(-1, \frac{11}{4}\right)$
0	0	$(0,0)$
1	$-\frac{11}{4}$	$\left(1, -\frac{11}{4}\right)$
2	-4	$(2,-4)$
3	$-\frac{9}{4}$	$\left(3, -\frac{9}{4}\right)$
4	4	$(4,4)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(-4,-4)$ está sobre o gráfico mas $(-4,4)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(-4,-4)$ está sobre o gráfico mas $(4,-4)$ não está)

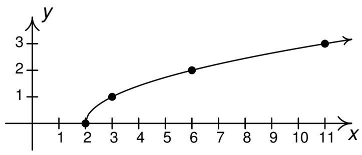
O gráfico é simétrico com relação à origem

(a) $y = \sqrt{x-2}$

interseção com o eixo x: $(2, 0)$

O gráfico não tem interseção com o eixo y

x	y	(x, y)
2	0	$(2, 0)$
3	1	$(3, 1)$
6	2	$(6, 2)$
11	3	$(11, 3)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(3, 1)$ está sobre o gráfico mas $(3, -1)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(3, 1)$ está sobre o gráfico mas $(-3, 1)$ não está)

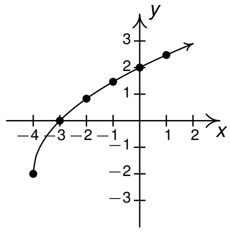
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(3, 1)$ está sobre o gráfico mas $(-3, -1)$ não está)

(b) $y = 2\sqrt{x+4} - 2$

interseção com o eixo x: $(-3, 0)$

interseção com o eixo y: $(0, 2)$

x	y	(x, y)
-4	-2	$(-4, -2)$
-3	0	$(-3, 0)$
-2	$2\sqrt{2} - 2$	$\left(-2, \sqrt{2} - 2\right)$
-1	$2\sqrt{3} - 2$	$\left(-2, \sqrt{3} - 2\right)$
0	2	$(0, 2)$
1	$2\sqrt{5} - 2$	$\left(-2, \sqrt{5} - 2\right)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(-4, -2)$ está sobre o gráfico mas $(-4, 2)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(-4, -2)$ está sobre o gráfico mas $(4, -2)$ não está)

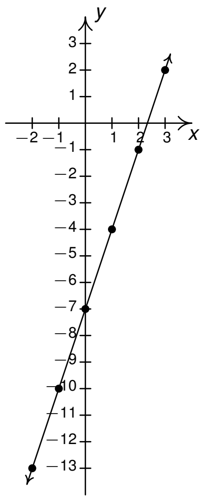
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(-4, -2)$ está sobre o gráfico mas $(4, 2)$ não está)

(a) $3x - y = 7$
Reescreva como: $y = 3x - 7$.

interseção com o eixo x: $(\frac{7}{3}, 0)$

interseção com o eixo y: $(0, -7)$

x	y	(x, y)
-2	-13	$(-2, -13)$
-1	-10	$(-1, -10)$
0	-7	$(0, -7)$
1	-4	$(1, -4)$
2	-1	$(2, -1)$
3	2	$(3, 2)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(3, 2)$ está sobre o gráfico mas $(3, -2)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(3, 2)$ está sobre o gráfico mas $(-3, 2)$ não está)

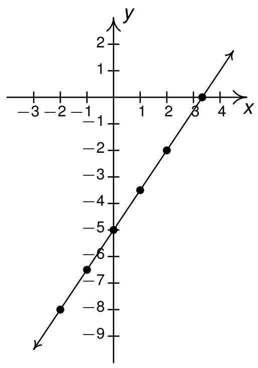
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(3, 2)$ está sobre o gráfico mas $(-3, -2)$ não está)

(b) $3x - 2y = 10$
Reescreva como: $y = \frac{3x-10}{2}$.

interseção com o eixo x: $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

interseção com o eixo y: $(0, -5)$

x	y	(x, y)
-2	-8	$(-2, -8)$
-1	$-\frac{13}{2}$	$\left(-1, -\frac{13}{2}\right)$
0	-5	$(0, -5)$
1	$-\frac{7}{2}$	$\left(1, -\frac{7}{2}\right)$
2	-2	$(2, -2)$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(2, -2)$ está sobre o gráfico mas $(2, 2)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(2, -2)$ está sobre o gráfico mas $(-2, -2)$ não está)

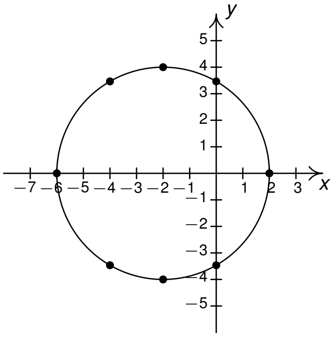
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(2, -2)$ está sobre o gráfico mas $(-2, 2)$ não está)

(a) $(x+2)^2 + y^2 = 16$
Reescreva como $y = \pm\sqrt{16-(x+2)^2}$.

interseção com o eixo x: $(-6, 0)$, $(2, 0)$

interseção com o eixo y: $\left(0, \pm 2\sqrt{3}\right)$

x	y	(x, y)
-6	0	$(-6, 0)$
-4	$\pm 2\sqrt{3}$	$\left(-4, \pm 2\sqrt{3}\right)$
-2	± 4	$(-2, \pm 4)$
0	$\pm 2\sqrt{3}$	$\left(0, \pm 2\sqrt{3}\right)$
2	0	$(2, 0)$



O gráfico é simétrico com relação ao eixo x

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(-6, 0)$ está sobre o gráfico mas $(6, 0)$ não está)

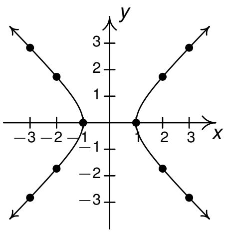
O gráfico não é simétrico com relação à origem (e.g. $(-6, 0)$ está sobre o gráfico mas $(6, 0)$ não está)

(b) $x^2 - y^2 = 1$
Reescreva como: $y = \pm\sqrt{x^2-1}$.

interseção com o eixo x: $(-1, 0), (1, 0)$

O gráfico não tem interseção com o eixo y

x	y	(x, y)
-3	$\pm\sqrt{8}$	$(-3, \pm\sqrt{8})$
-2	$\pm\sqrt{3}$	$(-2, \pm\sqrt{3})$
-1	0	$(-1, 0)$
1	0	$(1, 0)$
2	$\pm\sqrt{3}$	$(2, \pm\sqrt{3})$
3	$\pm\sqrt{8}$	$(3, \pm\sqrt{8})$



O gráfico é simétrico com relação ao eixo x

O gráfico é simétrico com relação ao eixo y

O gráfico é simétrico com relação à origem

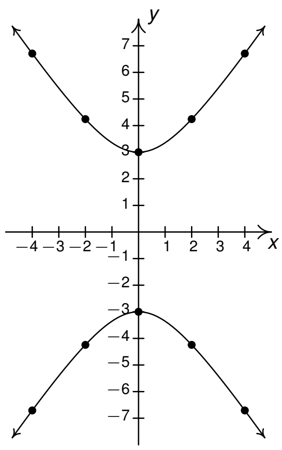
(a) $4y^2 - 9x^2 = 36$

Reescreva como: $y = \pm\frac{\sqrt{9x^2+36}}{2}$.

O gráfico não tem interseção com o eixo x

interseção com o eixo y: $(0, \pm 3)$

x	y	(x, y)
-4	$\pm 3\sqrt{5}$	$\left(-4, \pm 3\sqrt{5}\right)$
-2	$\pm 3\sqrt{2}$	$\left(-2, \pm 3\sqrt{2}\right)$
0	± 3	$(0, \pm 3)$
2	$\pm 3\sqrt{2}$	$\left(2, \pm 3\sqrt{2}\right)$
4	$\pm 3\sqrt{5}$	$\left(4, \pm 3\sqrt{5}\right)$



O gráfico é simétrico com relação ao eixo x

O gráfico é simétrico com relação ao eixo y

O gráfico é simétrico com relação à origem

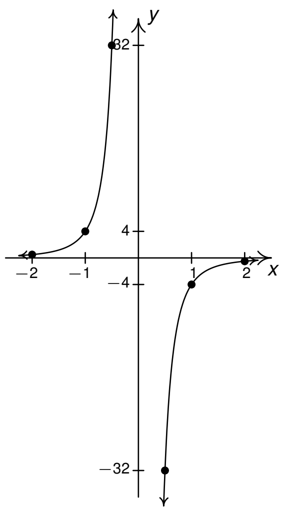
(b) $x^3 y = -4$

Reescreva como: $y = -\dfrac{4}{x^3}$.

O gráfico não tem interseção com o eixo x

O gráfico não tem interseção com o eixo y

x	y	(x, y)
-2	$\frac{1}{2}$	$(-2, \frac{1}{2})$
-1	4	$(-1, 4)$
$-\frac{1}{2}$	32	$(-\frac{1}{2}, 32)$
$\frac{1}{2}$	-32	$(\frac{1}{2}, -32)$
1	-4	$(1, -4)$
2	$-\frac{1}{2}$	$(2, -\frac{1}{2})$



O gráfico não é simétrico com relação ao eixo x (e.g. $(1, -4)$ está sobre o gráfico mas $(1, 4)$ não está)

O gráfico não é simétrico com relação ao eixo y (e.g. $(1, -4)$ está sobre o gráfico mas $(-1, -4)$ não está)

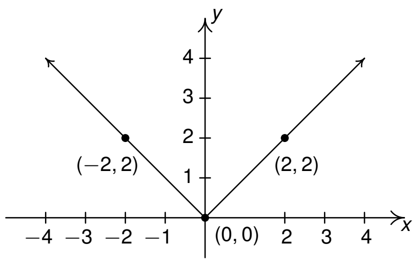
O gráfico é simétrico com relação à origem

7 Transformações de Funções

Suponha que $(2, -3)$ está sobre o gráfico de $y = f(x)$. Nos exercícios 1 - 18, encontre o correspondente do ponto no gráfico da função transformada.

1. $y = f(x) + 3$
2. $y = f(x + 3)$
3. $y = f(x) - 1$
4. $y = f(x - 1)$
5. $y = 3f(x)$
6. $y = f(3x)$
7. $y = -f(x)$
8. $y = f(-x)$
9. $y = f(x - 3) + 1$
10. $y = 2f(x + 1)$
11. $y = 10 - f(x)$
12. $y = 3f(2x) - 1$
13. $y = \frac{1}{2}f(4 - x)$
14. $y = 5f(2x + 1) + 3$
15. $y = 2f(1 - x) - 1$
16. $y = f\left(\dfrac{7 - 2x}{4}\right)$
17. $y = \dfrac{f(3x) - 1}{2}$
18. $y = \dfrac{4 - f(3x - 1)}{7}$

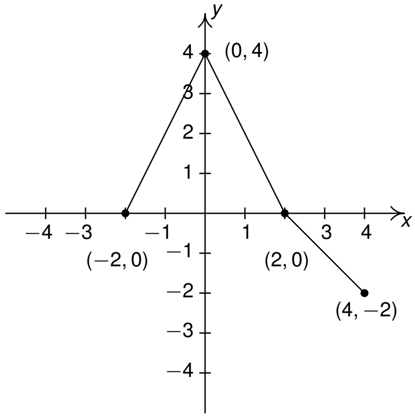
O gráfico de $y = f(x)$ é dado abaixo. Nos exercícios 19 - 27, esboce o gráfico da função transformada.



O gráfico dos exs. 19 - 27

19. $y = f(x) + 1$
20. $y = f(x) - 2$
21. $y = f(x + 1)$
22. $y = f(x - 2)$
23. $y = 2f(x)$
24. $y = f(2x)$
25. $y = 2 - f(x)$
26. $y = f(2 - x)$
27. $y = 2 - f(2 - x)$
28. Algumas das respostas aos exercícios 19 - 27 acima devem ter sido as mesmas. Quais foram iguais? Que propriedades do gráfico de $y = f(x)$ contribuíram para a duplicação?

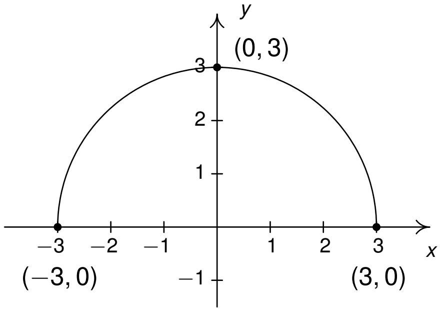
O gráfico de $y = f(x)$ é dado abaixo. Nos exercícios 29 - 37, esboce o gráfico da função transformada.



O gráfico dos exs. 29 - 37

29. $y = f(x) - 1$
30. $y = f(x + 1)$
31. $y = \frac{1}{2}f(x)$
32. $y = f(2x)$
33. $y = -f(x)$
34. $y = f(-x)$
35. $y = f(x + 1) - 1$
36. $y = 1 - f(x)$
37. $y = \frac{1}{2}f(x + 1) - 1$

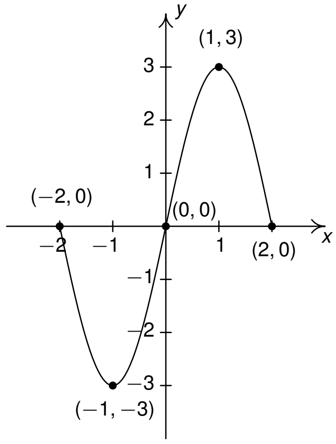
O gráfico de $y = f(x)$ é dado abaixo. Nos exercícios 38 - 49, esboce o gráfico da função transformada.



O gráfico dos exs. 38 - 49

38. $g(x) = f(x) + 3$
39. $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}$
40. $j(x) = f\left(x - \frac{2}{3}\right)$
41. $a(x) = f(x + 4)$
42. $b(x) = f(x + 1) - 1$
43. $c(x) = \frac{3}{5}f(x)$
44. $d(x) = -2f(x)$
45. $k(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$
46. $m(x) = -\frac{1}{4}f(3x)$
47. $n(x) = 4f(x - 3) - 6$
48. $p(x) = 4 + f(1 - 2x)$
49. $q(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{x+4}{2}\right) - 3$

O gráfico de $y = S(x)$ é dado abaixo.



O gráfico de $y = S(x)$

O propósito dos exercícios 50 - 53 é esboçar o gráfico de $y = \frac{1}{2}S(-x+1)+1$, esboçando cada etapa da transformação.

50. $y = S_1(x) = S(x+1)$

51. $y = S_2(x) = S_1(-x) = S(-x+1)$

52. $y = S_3(x) = \frac{1}{2}S_2(x) = \frac{1}{2}S(-x+1)$

53. $y = S_4(x) = S_3(x) + 1 = \frac{1}{2}S(-x+1) + 1$

Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre a formula para a função g cujo gráfico é obtido de f através da sequência de transformações dadas.

54. (1) deslocamento para direita 2 unidades; (2) deslocamento para baixo 3 unidades

55. (1) deslocamento para baixo 3 unidades; (2) deslocamento para a direita 2 unidades

56. (1) reflexão em torno do eixo x; (2) deslocamento para cima 1 unidade

57. (1) deslocamento para cima 1 unidade; (2) reflexão em torno do eixo x

58. (1) deslocamento para esquerda 1 unidade; (2) reflexão em torno do eixo y; (3) deslocamento para a cima 2 unidades

59. (1) reflexão em torno do eixo y; (2) deslocamento para esquerda 1 unidade; (3) deslocamento para cima 2 unidades

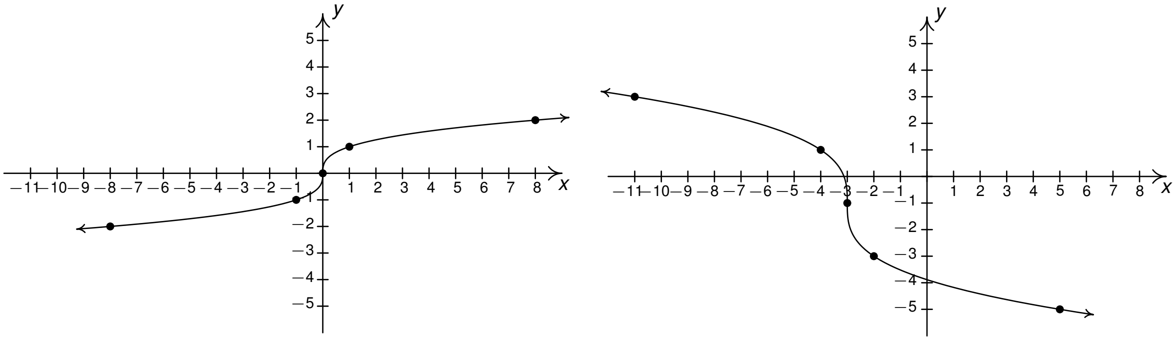
60. (1) deslocamento para esquerda 3 unidades; (2) esticamento vertical por um fator de 2; (3) deslocamento para baixo 4 unidades

61. (1) deslocamento para esquerda 3 unidades; (2) deslocamento para a baixo 4 unidades; (3) esticamento vertical por um fator de 2

62. (1) deslocamento para direita 3 unidades; (2) encolhimento horizontal por um fator de 2; (3) deslocamento para a cima 1 unidade

63. (1) encolhimento horizontal por um fator de 2; (2) deslocamento para direita 3 unidades; (3) deslocamento para cima 1 unidade

64. O gráfico de $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ é dado abaixo à esquerda e o gráfico de $y = g(x)$ é dado á direita. Encontre a formula para g baseado nas transformações do gráfico de f. Verifique sua resposta testando se os pontos mostrados no gráfico de g satisfazem a equação $y = g(x)$.



$y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $y = g(x)$

65. Para muitas funções, as propriedades da Álgebra tornam a mudança de escala horizontal igual a uma mudança de escala vertical por um fator (possivelmente) diferente. Por exemplo, $\sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$. Com a ajuda de seus colegas, encontre a mudança de escala vertical equivalente produzido pelas mudanças de escala horizontais $y = (2x)^3$, $y = |5x|$, $y = \sqrt[3]{27x}$ e $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$. O que se pode dizer de $y = (-2x)^3$, $y = |-5x|$, $y = \sqrt[3]{-27x}$ e $y = \left(-\frac{1}{2}x\right)^2$?

66. Em geral, a ordem das transformações importa, mas há situações onde a ordem não importa (por exemplo, um deslocamento para a esquerda seguida de um deslocamento para baixo ou um deslocamento para baixo seguido de um para a esquerda produzem o mesmo resultado). Com a ajuda de seus colegas, determine situações em que a ordem importa e situações onde a ordem não importa.

67. O que acontece quando se reflete uma função par em torno do eixo y?

68. O que acontece quando se reflete uma função ímpar em torno do eixo y?

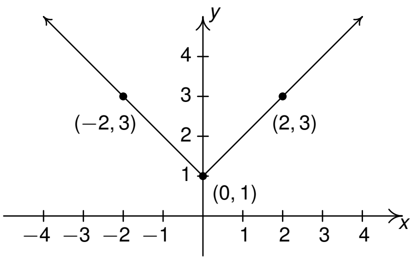
69. O que acontece quando se reflete uma função par em torno do eixo x?

70. O que acontece quando se reflete uma função ímpar em torno do eixo x?

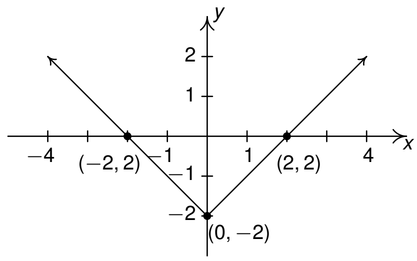
71. Como se pode descrever a simetria com relação à origem em termos de reflexões?

Respostas

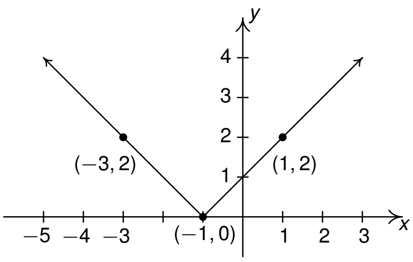
1. $(2,0)$
2. $(-1,-3)$
3. $(2,-4)$
4. $(3,-3)$
5. $(2,-9)$
6. $\left(\frac{2}{3},-3\right)$
7. $(2,3)$
8. $(-2,-3)$
9. $(5,-2)$
10. $(1,-6)$
11. $(2,13)$
12. $y=(1,-10)$
13. $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$
14. $\left(\frac{1}{2},-12\right)$
15. $(-1,-7)$
16. $\left(-\frac{1}{2},-3\right)$
17. $\left(\frac{2}{3},-2\right)$
18. $(1,1)$
19. $y=f(x)+1$



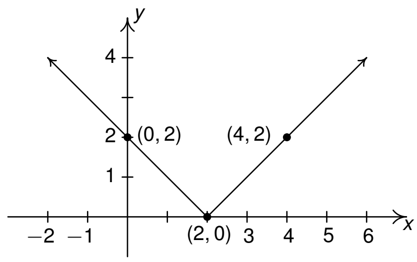
20. $y=f(x)-2$



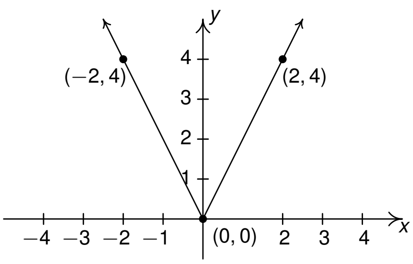
21. $y=f(x+1)$



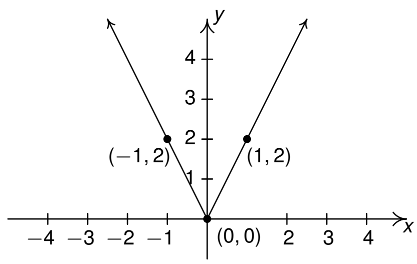
22. $y=f(x-2)$



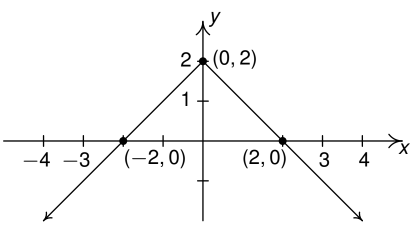
23. $y=2f(x)$



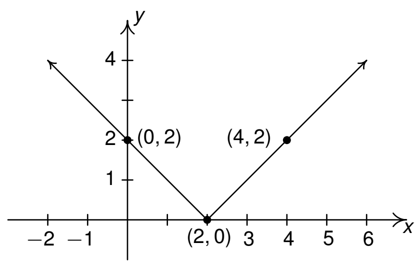
24. $y=f(2x)$



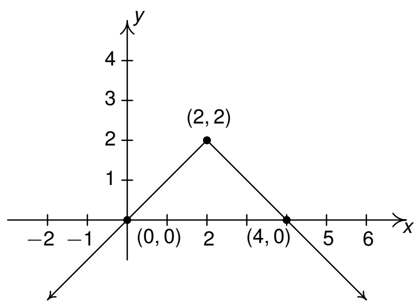
25. $y=2-f(x)$



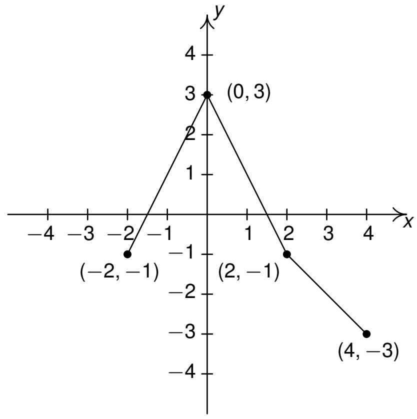
26. $y=f(2-x)$



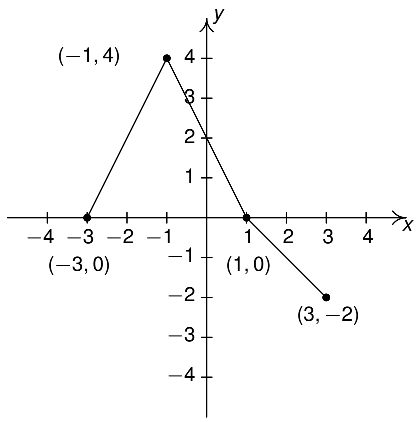
27. $y = 2 - f(2 - x)$



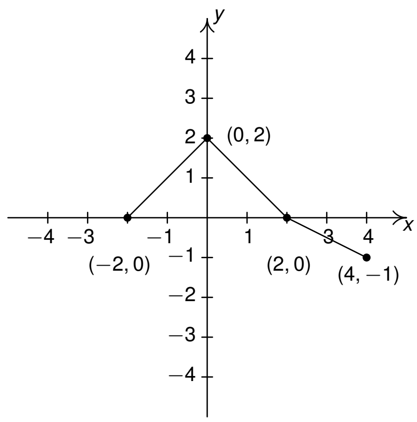
29. $y = f(x) - 1$



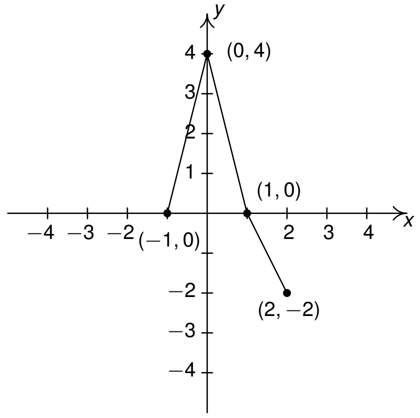
30. $y = f(x + 1)$



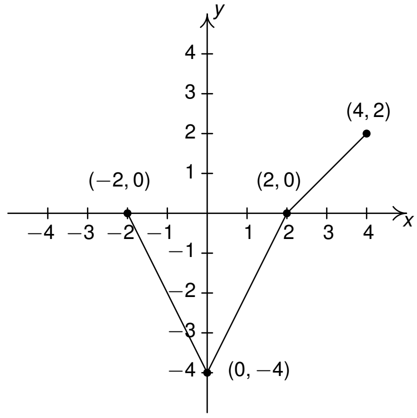
31. $y = \frac{1}{2}f(x)$



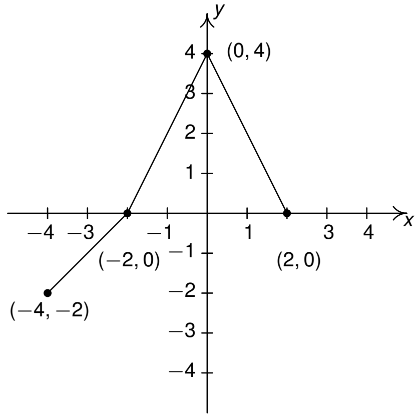
32. $y = f(2x)$



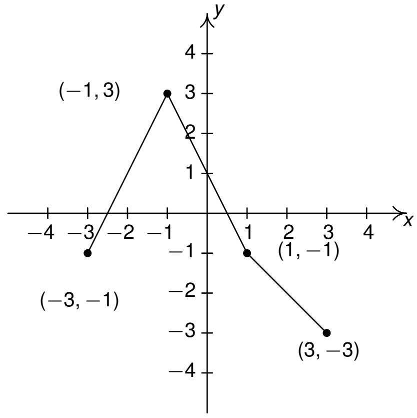
33. $y = -f(x)$



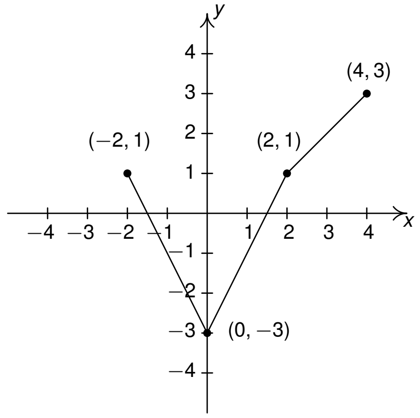
34. $y = f(-x)$



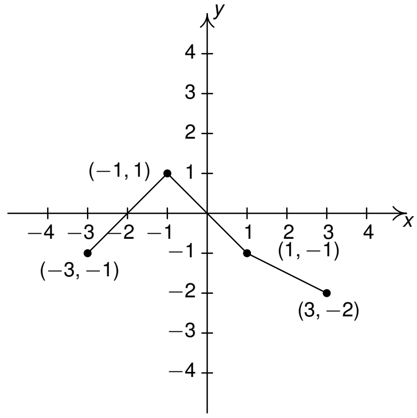
35. $y = f(x + 1) - 1$



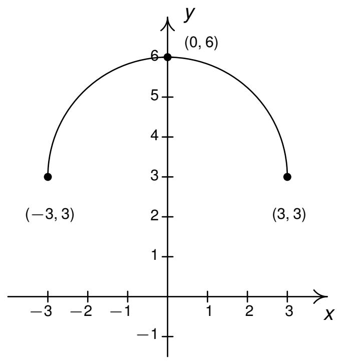
36. $y = 1 - f(x)$



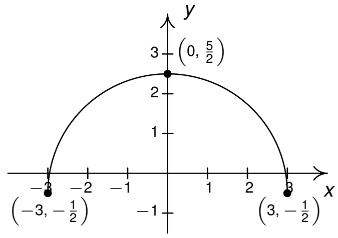
37. $y = \frac{1}{2}f(x + 1) - 1$



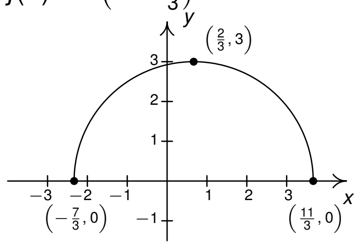
38. $g(x) = f(x) + 3$



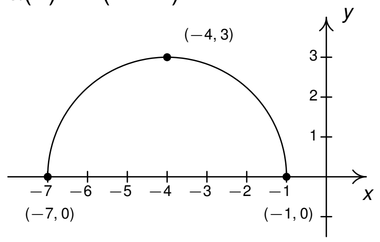
39. $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}$



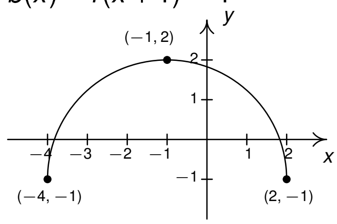
40. $j(x) = f\left(x - \frac{2}{3}\right)$



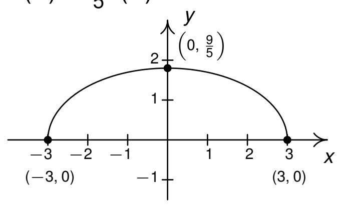
41. $a(x) = f(x + 4)$



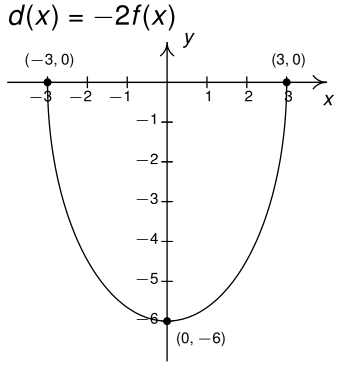
42. $b(x) = f(x + 1) - 1$



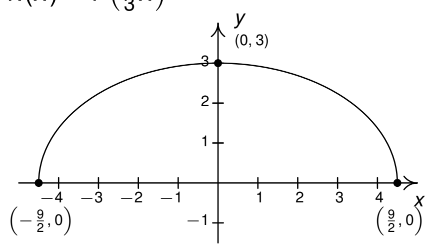
43. $c(x) = \frac{3}{5} f(x)$



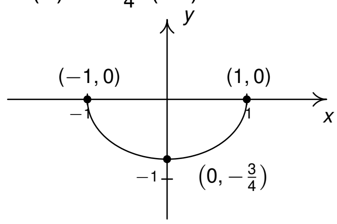
44. $d(x) = -2f(x)$



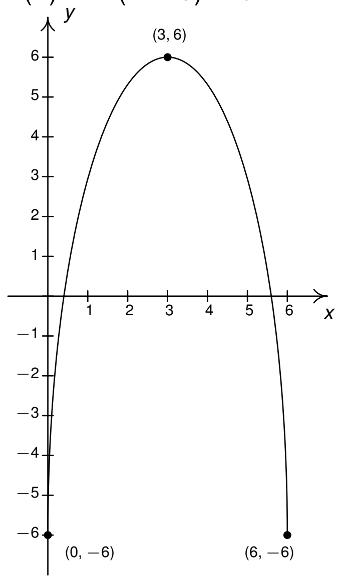
45. $k(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$



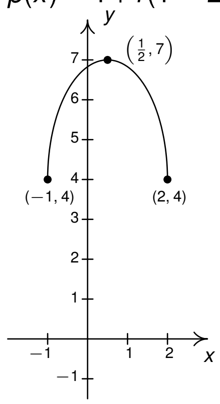
46. $m(x) = -\frac{1}{4}f(3x)$



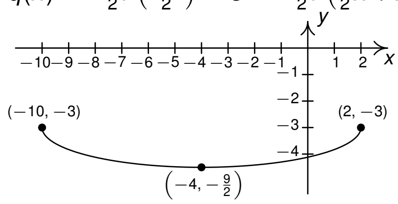
47. $n(x) = 4f(x-3) - 6$



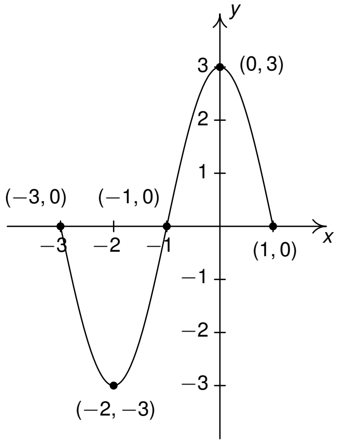
48. $p(x) = 4 + f(1-2x) = f(-2x+1) + 4$



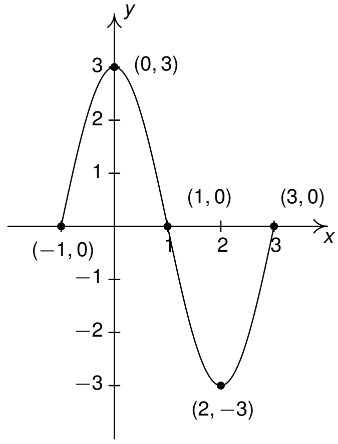
49. $q(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{x+4}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x+2\right) - 3$



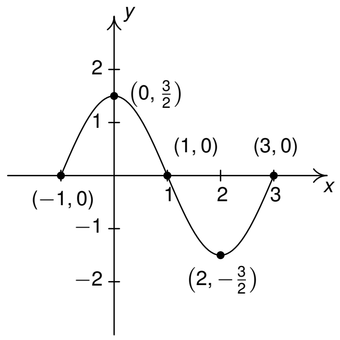
50. $y = S_1(x) = S(x+1)$



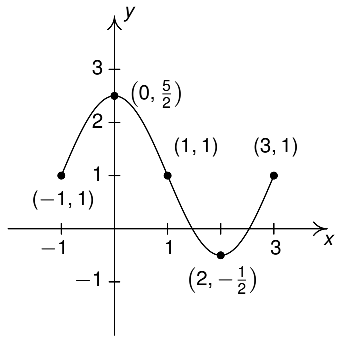
51. $y = S_2(x) = S_1(-x) = S(-x+1)$



52. $y = S_3(x) = \frac{1}{2}S_2(x) = \frac{1}{2}S(-x+1)$



53. $y = S_4(x) = S_3(x) + 1 = \frac{1}{2}S(-x+1) + 1$



54. $g(x) = \sqrt{x-2} - 3$

55. $g(x) = \sqrt{x-2} - 3$

56. $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

57. $g(x) = -(\sqrt{x} + 1) = -\sqrt{x} - 1$

58. $g(x) = \sqrt{-x+1} + 2$

59. $g(x) = \sqrt{-(x+1)} + 2 = \sqrt{-x-1} + 2$

60. $g(x) = 2\sqrt{x+3} - 4$

61. $g(x) = 2\left(\sqrt{x+3} - 4\right) = 2\sqrt{x+3} - 8$

62. $g(x) = \sqrt{2x-3} + 1$

63. $g(x) = \sqrt{2(x-3)} + 1 = \sqrt{2x-6} + 1$

64. $g(x) = -2\sqrt[3]{x+3} - 1$ ou $g(x) = 2\sqrt[3]{-x-3} - 1$

8 Funções Lineares

Nos exercícios 1 - 10, encontre a equação da reta que passa pelo ponto dado e com a inclinação dada.

1. $m = 3, \quad P(3, -1)$
2. $m = -2, \quad P(-5, 8)$
3. $m = -1, \quad P(-7, -1)$
4. $m = \frac{2}{3}, \quad P(-2, 1)$
5. $m = -\frac{1}{5}, \quad P(10, 4)$
6. $m = \frac{1}{7}, \quad P(-1, 4)$
7. $m = 0, \quad P(3, 117)$
8. $m = -\sqrt{2}, \quad P(0, -3)$
9. $m = -5, \quad P(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
10. $m = 678, \quad P(-1, -12)$

Nos exercícios 11 - 20, encontre a equação da reta que passa pelos dois pontos dados.

11. $P(0, 0), \ Q(-3, 5)$
12. $P(-1, -2), \ Q(3, -2)$
13. $P(5, 0), \ Q(0, -8)$
14. $P(3, -5), \ Q(7, 4)$
15. $P(-1, 5), \ Q(7, 5)$
16. $P(4, -8), \ Q(5, -8)$
17. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \ Q\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}\right)$
18. $P\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right), \ Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$
19. $P\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \ Q\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
20. $P\left(-\sqrt{3}, -1\right), \ Q\left(\sqrt{3}, 1\right)$

Nos exercícios 21 - 26, esboce o gráfico da função. Encontre a inclinação, a interseção com o eixo y e a interseção com o eixo x, caso exitam.

21. $f(x) = 2x - 1$
22. $f(x) = 3 - x$
23. $f(x) = 3$
24. $f(x) = 0$
25. $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
26. $f(x) = \dfrac{1 - x}{2}$
27. Encontre todos os pontos da reta $y = 2x + 1$ que estão a 4 unidades do ponto $(-1, 3)$.
28. João pode caminhar confortavelmente a 3 milhas por hora. Encontre a função afim d que representa a distância total que João pode caminhar em t horas, assumindo que ele não fez nenhuma parada.
29. Carlos pode selar 6 envelopes por *minuto*. Encontre a função afim E que representa o número total de envelopes que Carlos pode selar após t *horas*, assumindo que ele não fez nenhuma parada.
30. Uma companhia de paisagismo cobra \$45 por jarda cúbica de adubo mais um taxa de entrega de \$20. Encontre a função afim que calcula o custo total C (em dólares) para entregar x jardas cúbicas de adubo.
31. Um encanador cobra \$50 por serviço mais \$80 por hora. Se ele não fica mais que 8 horas por dia em um mesmo lugar, encontre a função afim que representa o total C que ele cobra (em dólares) como uma função do tempo t (em horas) gasto em cada lugar.

32. Um vendedor recebe \$200 por semana mais 5% de comissão nas vendas semanais de x dólares. Encontre a função afim que representa seu ganho semanal W (em dólares) em termos de x. Qual deve ser sua venda para que ele receba \$475.00 por semana?

33. Uma gráfica cobra \$22.50 para imprimir um livro de 600 páginas e \$15.50 para imprimir um livro de 400 páginas. Encontre a função afim que modela o custo C de um livro como uma função do número de páginas p. Interprete a inclinação da função afim e o valor de $C(0)$.

34. A Cia. de Táxi Topológica cobra \$2.50 pelas primeiras quinto de milhas e \$0.45 por cada adicional quinto de milha. Encontre a função afim que modela a tarifa F do táxi como uma função do número de milhas dirigidas m. Interprete a inclinação da função afim e o valor de $F(0)$.

35. A água congela a 0° Celsius e 32° Fahrenheit e ferve a 100°C e 212°F.

    (a) Encontre a função afim F que expressa a temperatura na escala Fahrenheit em termos de graus Celsius. Use essa função para converter 20°C em Fahrenheit.

    (b) Encontre a função afim C que expressa a temperatura na escala Celsius em termos de graus Fahrenheit. Use essa função para converter 110°F em Celsius.

    (c) Existe uma temperatura n tal que $F(n) = C(n)$?

36. Dizem que um lobisomem uiva aproximadamente 9 vezes por hora quando faz $40°F$ e somente 5 vezes por hora quando faz $70°F$. Assumindo que o número de uivos por hora N pode ser representado por uma função afim da temperatura T em Fahrenheit, encontre o número de uivos por hora que ele emite quando faz $20°F$. Qual o domínio dessa função? Por quê?

37.

38.

39. Uma pizzaria oferece pizzas médias a um custo de \$6.00 por pizza mais \$1.50 de taxa de envio. Nos fins de semana, a pizzaria faz uma promoção: se seis ou mais pizzas são encomendadas, elas custam \$5.50 cada, sem taxa de envio. Escreva uma função definida por várias sentenças que calcula o custo C (em dólares) de p pizzas enviadas durante um fim de semana.

40. Um restaurante oferece um buffet que custa \$15 por pessoa. Para festas de 10 ou mais pessoas, existe um desconto e o custo baixa para \$12.50 por pessoa. Escreva uma função definida por várias sentenças que calcula a conta total T de uma festa com n pessoas.

41. Um plano de celular cobra uma taxa básica mensal de \$10 para os primeiros 500 minutos de ligação, mais 15¢ para cada minuto adicional. Escreva uma função definida por várias sentenças que calcula o custo mensal C (em dólares) pelo uso de m minutos de ligação.

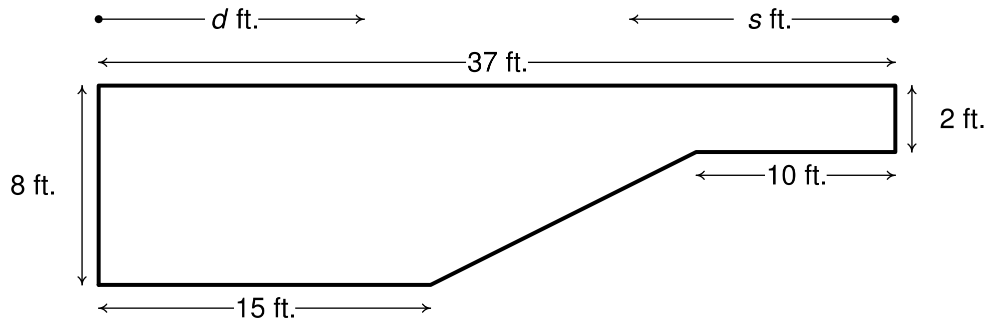
42. Um *pet shop* cobra 12¢ por grilo até 100 grilos, e 10¢ por grilo acima disso. Escreva uma função definida por várias sentenças que calcula o preço P, em dólares, de c grilos.

43. A seção reta de uma piscina é exibida abaixo. Escreva uma função definida por várias sentenças que descreve a profundidade D da piscina (em pés) como uma função:

    (a) da distância (em pés) d do lado raso da piscina.

    (b) the distância (em pés) s do lado fundo da piscina.

    (c) Esboce o gráfico das funções em (a) e (b). Discuta com seus colegas como os gráficos estão relacionados entre si e com o formato da piscina.



Nos exercícios 44 - 49, calcule a taxa de variação média da função dada no intervalo especificado.

44. $f(x) = x^3$, $[-1, 2]$

45. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[1, 5]$

46. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 16]$

47. $f(x) = x^2$, $[-3, 3]$

48. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$, $[5, 7]$

49. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$, $[-4, 2]$

Nos exercícios 50 - 53, calcule a taxa de variação média da função dada no intervalo $[x, x+h]$. Assuma que $[x, x+h]$ está no domínio da função.

50. $f(x) = x^3$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

52. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$

53. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$

54. A altura de um objeto solto do teto de um edifício de oito andares é modelada por: $h(t) = -16t^2 + 64$, $0 \leq t \leq 2$. Aqui, h é a altura do objeto com relação ao solo em pés t segundos após o objeto ter sido solto. Encontre e interprete a taxa de variação média de h no intervalo $[0, 2]$.

55. Usando dados da Agência de Estatísticas de Transporte, a economia média de combustível F em milhas por galão por passageiro nos EUA pode ser modelado por $F(t) = -0.0076t^2 + 0.45t + 16$, $0 \leq t \leq 28$, onde t é o número de anos desde 1980. Encontre e interprete a taxa de variação média de F no intervalo $[0, 28]$.

56. A temperatura T em graus Fahrenheit t horas após as 6 da manhã é dada por:

$$T(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 32, \quad 0 \leq t \leq 12$$

   (a) Encontre e interprete $T(4)$, $T(8)$ e $T(12)$.
   (b) Encontre e interprete a taxa de variação média de T no intervalo $[4, 8]$.
   (c) Encontre e interprete a taxa de variação média de T de $t = 8$ até $t = 12$.
   (d) Encontre e interprete a taxa de variação média da temperatura entre 10 da manhã e 6 da tarde.

57. Suponha que $C(x) = x^2 - 10x + 27$ representa o custo, em *centenas* de dólares, para produzir x *milhares* de canetas. Encontre e interprete a taxa de variação média quando a produção passa de 3000 para 5000 canetas.

58. Com a ajuda de seus colegas, encontre outros exemplos do mundo real de taxas de variação que são usadas para descrever fenômenos não-lineares.

(Retas Paralelas) Retas paralelas possuem a mesma inclinação (note que retas verticais também são paralelas mesmo que possuam inclinação indefinida). Nos exercícios 59 - 64, são dados uma reta e um ponto que não está sobre a reta. Encontre a reta paralela a reta dada que passa pelo ponto dado.

59. $y = 3x + 2$, $P(0, 0)$

60. $y = -6x + 5$, $P(3, 2)$

61. $y = \frac{2}{3}x - 7$, $P(6, 0)$

62. $y = \dfrac{4-x}{3}$, $P(1, -1)$

63. $y = 6$, $P(3, -2)$

64. $x = 1$, $P(-5, 0)$

(Retas Perpendiculares) Se duas retas com inclinações m_1 e m_2 são tais que $m_1 \cdot m_2 = -1$, então elas são perpendiculares (veremos a demonstração disso no exercício 71.) Note que uma reta horizontal é perpendicular a uma reta vertical vice versa, assim podemos assumir que $m_1 \neq 0$ e $m_2 \neq 0$. Nos exercícios 65 - 70, são dados uma reta e um ponto que não está sobre a reta. Encontre a reta perpendicular a reta dada que passa pelo ponto dado.

65. $y = \frac{1}{3}x + 2,\ P(0,0)$

66. $y = -6x + 5,\ P(3,2)$

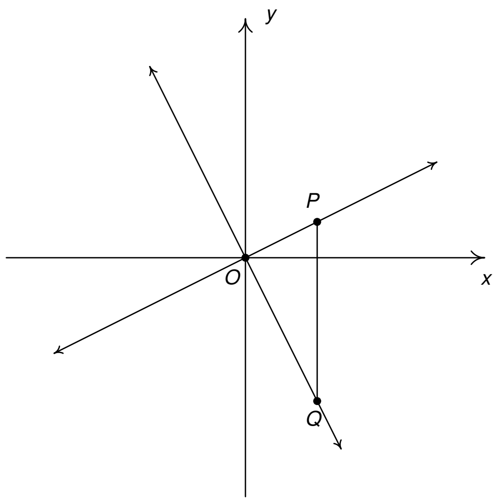
67. $y = \frac{2}{3}x - 7,\ P(6,0)$

68. $y = \dfrac{4-x}{3},\ P(1,-1)$

69. $y = 6,\ P(3,-2)$

70. $x = 1,\ P(-5,0)$

71. Vamos mostrar agora que $y = m_1x + b_1$ é perpendicular q $y = m_2x + b_2$ se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$. Para tornar nossa vida mais fácil, vamos assumir que $m_1 > 0$ e $m_2 < 0$. Podemos também "mover" as retas de modo que seu ponto de interseção está na origem sem atrapahar as coisas, portanto podemos assumir que $b_1 = b_2 = 0$. (pense um pouco com seus colegas porque isso é possível). Traçando as retas e marcando os pontos $O(0,0)$, $P(1, m_1)$ e $Q(1, m_2)$, chegamos à seguinte situação:



A reta $y = m_1x$ é perpendicular à reta $y = m_2x$ se, e somente se, $\triangle OPQ$ é um triângulo reto. Seja d_1 a distância de O a P, seja d_2 a distância de O a Q e seja d_3 a distância de P a Q. Use o Teorema de Pitágoras para mostrar que $\triangle OPQ$ é um triângulo reto se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$, mostrando que $d_1^2 + d_2^2 = d_3^2$ se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$.

72. Mostre que se $a \neq b$, a reta contendo os pontos (a, b) e (b, a) é perpendicular à reta $y = x$. (assim, é fácil ver que a reta $y = x$ é a *mediatriz* do segmento que liga (a, b) e (b, a). Isso significa que (a, b) e (b, a) são simétricos com relação à reta $y = x$.

73. A função definida por $I(x) = x$ é chamada Função Identidade.

    (a) Discuta com seus colegas por que esse nome faz sentido.

    (b) Como a forma $y = mx + b$ da equação da reta pode ser obtida a partir da função identidade através de uma sequência de transformações?

RESPOSTAS

1. $y + 1 = 3(x - 3)$
   $y = 3x - 10$

2. $y - 8 = -2(x + 5)$
   $y = -2x - 2$

3. $y + 1 = -(x + 7)$
   $y = -x - 8$

4. $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$
   $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

5. $y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 10)$
   $y = -\frac{1}{5}x + 6$

6. $y - 4 = \frac{1}{7}(x + 1)$
   $y = \frac{1}{7}x + \frac{29}{7}$

7. $y - 117 = 0$
   $y = 117$

8. $y + 3 = -\sqrt{2}(x - 0)$
   $y = -\sqrt{2}x - 3$

9. $y - 2\sqrt{3} = -5(x - \sqrt{3})$
   $y = -5x + 7\sqrt{3}$

10. $y + 12 = 678(x + 1)$
    $y = 678x + 666$

11. $y = -\frac{5}{3}x$

12. $y = -2$

13. $y = \frac{8}{5}x - 8$

14. $y = \frac{9}{4}x - \frac{47}{4}$

15. $y = 5$

16. $y = -8$

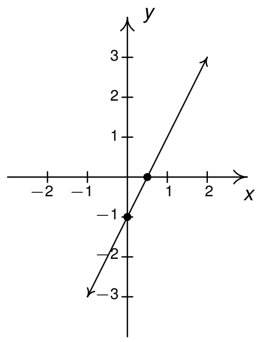
17. $y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{8}$

18. $y = 2x + \frac{13}{6}$

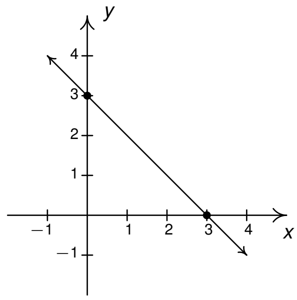
19. $y = -x$

20. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

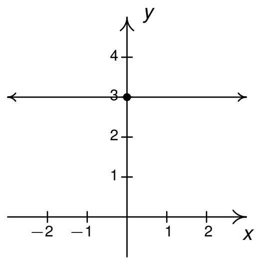
21. $f(x) = 2x - 1$
    inclinação: $m = 2$
    interseção com o eixo y: $(0, -1)$
    interseção com o eixo x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



22. $f(x) = 3 - x$
    inclinação: $m = -1$
    interseção com o eixo y: $(0, 3)$
    interseção com o eixo x: $(3, 0)$



23. $f(x) = 3$
    inclinação: $m = 0$
    interseção com o eixo y: $(0, 3)$
    interseção com o eixo x: nenhuma

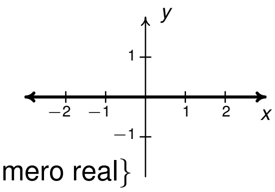


24. $f(x) = 0$

    inclinação: $m = 0$

    interseção com o eixo y: $(0, 0)$

    interseção com o eixo x: $\{(x, 0) \mid x \text{ é um número real}\}$

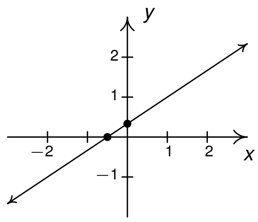


25. $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

    inclinação: $m = \frac{2}{3}$

    interseção com o eixo y: $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

    interseção com o eixo x: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

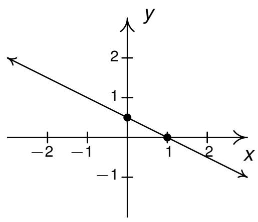


26. $f(x) = \dfrac{1-x}{2}$

    inclinação: $m = -\frac{1}{2}$

    interseção com o eixo y: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

    interseção com o eixo x: $(1, 0)$



27. $(-1, -1)$ e $\left(\frac{11}{5}, \frac{27}{5}\right)$

28. $d(t) = 3t$, $t \geq 0$.

29. $E(t) = 360t$, $t \geq 0$.

30. $C(x) = 45x + 20$, $x \geq 0$.

31. $C(t) = 80t + 50$, $0 \leq t \leq 8$.

32. $W(x) = 200 + .05x$, $x \geq 0$ Ela deve ganhar \$5500 em vendas semanais.

33. $C(p) = 0.035p + 1.5$ A inclinação 0.035 significa que custa 3.5¢ por página. $C(0) = 1.5$ significa que existe um custo fixo de \$1.50 para fazer cada livro.

34. $F(m) = 2.25m + 2.05$ A inclinação 2.25 significa que custa \$2.25 adicionais por cada milha além das primeira 0.2 milha. $F(0) = 2.05$, portanto de acordo com o modelo, uma viagem de 0 milhas custa \$2.05.

35. (a) $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$ (b) $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

(c) $F(-40) = -40 = C(-40)$.

36. $N(T) = -\frac{2}{15}T + \frac{43}{3}$

Um número negativo de uivos não faz sentido, portanto podemos fazer o limite superior do domínio ser igual a $107.5°F$, uma vez que $N(107.5) = 0$. O limite inferior é mais delicado, porque não temos nada além do bom senso para determiná-lo. Quando fica mais frio, o lobisomem uiva mais, até o ponto em que ele morre congelado! Assim, podemos fazer o limite inferior igual a $-60°F$, de modo que o domínio é o intervalo $[-60, 107.5]$.

39. $C(p) = \begin{cases} 6p + 1.5 & \text{se} \quad 1 \leq p \leq 5 \\ 5.5p & \text{se} \quad p \geq 6 \end{cases}$

40. $T(n) = \begin{cases} 15n & \text{se} \quad 1 \leq n \leq 9 \\ 12.5n & \text{se} \quad n \geq 10 \end{cases}$

41. $C(m) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad 0 \leq m \leq 500 \\ 10 + 0.15(m - 500) & \text{se} \quad m > 500 \end{cases}$

42. $P(c) = \begin{cases} 0.12c & \text{se} \quad 1 \leq c \leq 100 \\ 12 + 0.1(c - 100) & \text{se} \quad c > 100 \end{cases}$

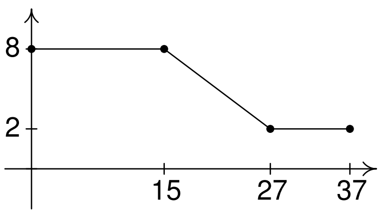
43. (a)

$$D(d) = \begin{cases} 8 & \text{se} \quad 0 \leq d \leq 15 \\ -\frac{1}{2}d + \frac{31}{2} & \text{se} \quad 15 \leq d \leq 27 \\ 2 & \text{se} \quad 27 \leq d \leq 37 \end{cases}$$

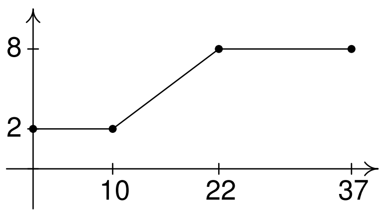
(b)

$$D(s) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \leq s \leq 10 \\ \frac{1}{2}s - 3 & \text{se} \quad 10 \leq s \leq 22 \\ 8 & \text{se} \quad 22 \leq s \leq 37 \end{cases}$$

(c)



$y = D(d)$



$y = D(s)$

44. $\dfrac{2^3 - (-1)^3}{2 - (-1)} = 3$

45. $\dfrac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1}}{5 - 1} = -\dfrac{1}{5}$

46. $\dfrac{\sqrt{16} - \sqrt{0}}{16 - 0} = \dfrac{1}{4}$

47. $\dfrac{3^2 - (-3)^2}{3 - (-3)} = 0$

48. $\dfrac{\frac{7+4}{7-3} - \frac{5+4}{5-3}}{7-5} = -\dfrac{7}{8}$

49. $\dfrac{(3(2)^2 + 2(2) - 7) - (3(-4)^2 + 2(-4) - 7)}{2 - (-4)} = -4$

50. $3x^2 + 3xh + h^2$

51. $\dfrac{-1}{x(x+h)}$

52. $\dfrac{-7}{(x-3)(x+h-3)}$

53. $6x + 3h + 2$

54. A taxa de variação média é $\frac{h(2)-h(0)}{2-0} = -32$. Durante os primeiros dois segundos após ser solto, o objeto caiu a uma taxa média de 32 pés por segundo. (Essa é a *velocidade média* do objeto.)

55. A taxa de variação média é $\frac{F(28)-F(0)}{28-0} = 0.2372$. Entre os anos de 1980 e 2008, a economia média de combustível subiu a uma taxa de 0.2372 millhas por galão por ano.

56. (a) $T(4) = 56$, assim às 10 da manhã (4 horas depois das 6), faz 56°F. $T(8) = 64$, assim às 2 da tarde (8 horas depois das 6), faz 64°F. $T(12) = 56$, assim às 6 da tarde (12 horas depois das 6), faz 56°F.

    (b) A taxa de variação média é $\frac{T(8)-T(4)}{8-4} = 2$. Entre 10 da manhã e 2 da tarde, a temperatura sobe, na média, a uma taxa de 2°F por hora.

    (c) A taxa de variação média é $\frac{T(12)-T(8)}{12-8} = -2$. Entre 2 da tarde e 6 da tarde, a temperatura decresce, em média, a uma taxa de 2°F por hora.

    (d) A taxa de variação média é $\frac{T(12)-T(4)}{12-4} = 0$. Entre 10 da manhã e 6 da tarde, a temperatura, em média, permanece constante.

57. A taxa de variação média é $\frac{C(5)-C(3)}{5-3} = -2$. Quando a producão aumenta de 3000 para 5000 canetas, o custo decresce a uma taxa média de$200 por 1000 canetas produzidas (20¢ por pen.)

59. $y = 3x$

60. $y = -6x + 20$

61. $y = \frac{2}{3}x - 4$

62. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

63. $y = -2$

64. $x = -5$

65. $y = -3x$

66. $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

67. $y = -\frac{3}{2}x + 9$

68. $y = 3x - 4$

69. $x = 3$

70. $y = 0$

9 Função Modular

Nos exercícios 1 - 15, resolva a equação.

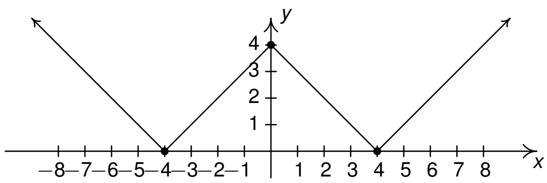
1. $|x| = 6$
2. $|3x - 1| = 10$
3. $|4 - x| = 7$
4. $4 - |x| = 3$
5. $2|5x + 1| - 3 = 0$
6. $|7x - 1| + 2 = 0$
7. $\dfrac{5 - |x|}{2} = 1$
8. $\frac{2}{3}|5 - 2x| - \frac{1}{2} = 5$
9. $|x| = x + 3$
10. $|2x - 1| = x + 1$
11. $4 - |x| = 2x + 1$
12. $|x - 4| = x - 5$
13. $|x| = x^2$
14. $|x| = 12 - x^2$
15. $|x^2 - 1| = 3$

Prove que se $|f(x)| = |g(x)|$ então ou $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$. Use esse resultado para resolver as equações dos exercícios 16 - 21.

16. $|3x - 2| = |2x + 7|$
17. $|3x + 1| = |4x|$
18. $|1 - 2x| = |x + 1|$
19. $|4 - x| - |x + 2| = 0$
20. $|2 - 5x| = 5|x + 1|$
21. $3|x - 1| = 2|x + 1|$

Nos exercícios 22 - 33, esboce o gráfico das funções. Encontre os zeros de cada função e as interseções com os eixos x e y, caso existam. Determine o domínio e a imagem de cada função, os intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante e encontre os extremos relativos e absolutos, caso existam.

22. $f(x) = |x + 4|$
23. $f(x) = |x| + 4$
24. $f(x) = |4x|$
25. $f(x) = -3|x|$
26. $f(x) = 3|x + 4| - 4$
27. $f(x) = \dfrac{1}{3}|2x - 1|$
28. $f(x) = \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$
29. $f(x) = \dfrac{|2 - x|}{2 - x}$
30. $f(x) = x + |x| - 3$
31. $f(x) = |x + 2| - x$
32. $f(x) = |x + 2| - |x|$
33. $f(x) = |x + 4| + |x - 2|$
34. Com a ajuda de seus colegas, encontre a expressão da função que possui o gráfico dado abaixo.

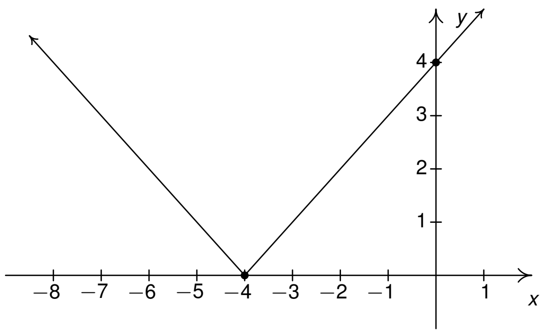


35.

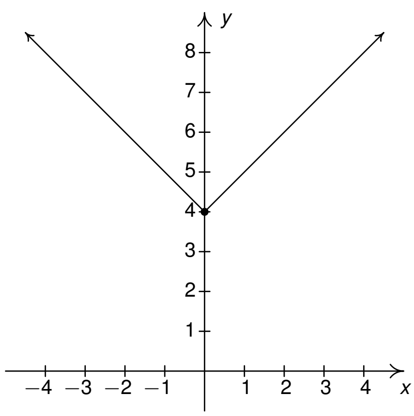
36. Prove a **Desigualdade Triangular:** Para todos os números reais a e b, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

RESPOSTAS

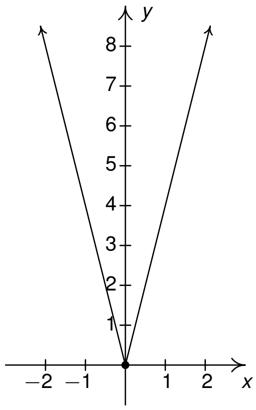
1. $x = -6$ ou $x = 6$
2. $x = -3$ ou $x = \frac{11}{3}$
3. $x = -3$ ou $x = 11$
4. $x = -1$ ou $x = 1$
5. $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{10}$
6. nenhuma solução
7. $x = -3$ ou $x = 3$
8. $x = -\frac{13}{8}$ ou $x = \frac{53}{8}$
9. $x = -\frac{3}{2}$
10. $x = 0$ ou $x = 2$
11. $x = 1$
12. nenhuma solução
13. $x = -1$, $x = 0$ ou $x = 1$
14. $x = -3$ ou $x = 3$
15. $x = -2$ ou $x = 2$
16. $x = -1$ ou $x = 9$
17. $x = -\frac{1}{7}$ ou $x = 1$
18. $x = 0$ ou $x = 2$
19. $x = 1$
20. $x = -\frac{3}{10}$
21. $x = \frac{1}{5}$ ou $x = 5$
22. $f(x) = |x + 4|$
    $f(-4) = 0$
    interseção com o eixo x $(-4, 0)$
    interseção com o eixo y $(0, 4)$
    Domínio $(-\infty, \infty)$
    Imagem $[0, \infty)$
    Decrescente em $(-\infty, -4]$
    Crescente em $[-4, \infty)$
    Mínimo relativo e absoluto em $(-4, 0)$
    Nenhum máximo relativo ou absoluto



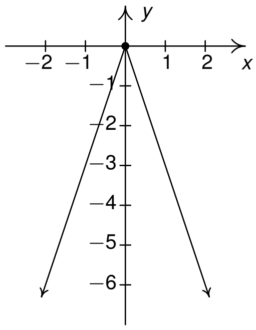
23. $f(x) = |x| + 4$
    Nenhum zero
    Nenhuma interseção com o eixo x
    interseção com o eixo y $(0, 4)$
    Domínio $(-\infty, \infty)$
    Imagem $[4, \infty)$
    Decrescente em $(-\infty, 0]$
    Crescente em $[0, \infty)$
    Mínimo relativo e absoluto em $(0, 4)$
    Nenhum máximo relativo ou absoluto



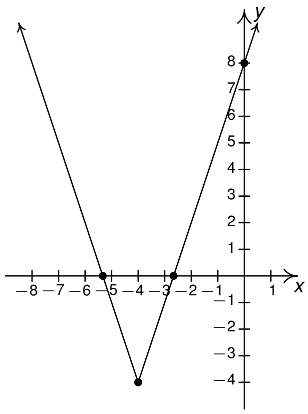
24. $f(x) = |4x|$
$f(0) = 0$
interseção com o eixo x $(0, 0)$
interseção com o eixo y $(0, 0)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[0, \infty)$
Decrescente em $(-\infty, 0]$
Crescente em $[0, \infty)$
Mínimo relativo e absoluto em $(0, 0)$
Nenhum máximo relativo ou absoluto



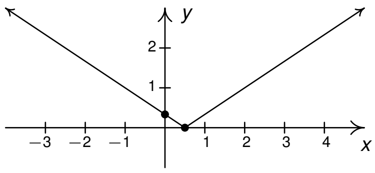
25. $f(x) = -3|x|$
$f(0) = 0$
interseção com o eixo x $(0, 0)$
interseção com o eixo y $(0, 0)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $(-\infty, 0]$
Crescente em $(-\infty, 0]$
Decrescente em $[0, \infty)$
Máximo relativo e absoluto em $(0, 0)$
Nenhum mínimo relativo ou absoluto



26. $f(x) = 3|x + 4| - 4$
$f\left(-\frac{16}{3}\right) = 0$, $f\left(-\frac{8}{3}\right) = 0$
interseções com o eixo x $\left(-\frac{16}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$
interseção com o eixo y $(0, 8)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[-4, \infty)$
Decrescente em $(-\infty, -4]$
Crescente em $[-4, \infty)$
Mínimo relativo e absoluto em $(-4, -4)$
Nenhum máximo relativo ou absoluto

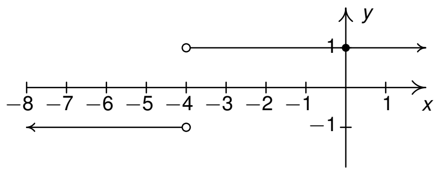


27. $f(x) = \frac{1}{3}|2x - 1|$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
interseções com o eixo x $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
interseção com o eixo y $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[0, \infty)$
Decrescente em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$
Crescente em $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
Mínimo relativo e absoluto em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
Nenhum máximo relativo ou absoluto

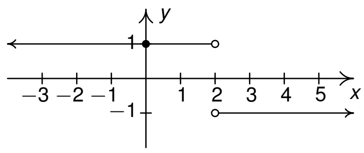


28. $f(x) = \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$
Nenhum zero
Nenhuma interseção com o eixo x
interseção com o eixo y $(0, 1)$
Domínio $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$
Imagem $\{-1, 1\}$
Constante em $(-\infty, -4)$
Constante em $(-4, \infty)$
Todo ponto $(x, -1)$ com $x < -4$ é mínimo

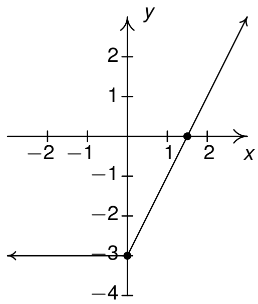
absoluto
Todo ponto $(x, 1)$ com $x > -4$ é máximo absoluto
Todo ponto é máximo e mínimo relativo



29. $f(x) = \dfrac{|2-x|}{2-x}$
Nenhum zero
Nenhuma interseção com o eixo x
interseção com o eixo y $(0, 1)$
Domínio $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
Imagem $\{-1, 1\}$
Constante em $(-\infty, 2)$
Constant em $(2, \infty)$
Todo ponto $(x, -1)$ com $x > 2$ é mínimo absoluto
Todo ponto $(x, 1)$ com $x < 2$ é máximo absoluto
Todo ponto do gráfico é máximo e mínimo relativo



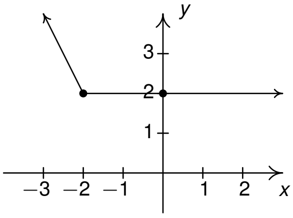
30. Reescreva $f(x) = x + |x| - 3$ como
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2x - 3 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$
interseção com o eixo x $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
interseção com o eixo y $(0, -3)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[-3, \infty)$
Crescente em $[0, \infty)$
Constante em $(-\infty, 0]$
Todo ponto $(x, -3)$ com $x \leq 0$ é mínimo absoluto
Nenhum máximo absoluto
Todo ponto $(x, -3)$ com $x \leq 0$ é mínimo relativo
Todo ponto $(x, -3)$ com $x < 0$ é máximo relativo



31. Reescreva $f(x) = |x+2| - x$ como

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 2 & \text{se} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

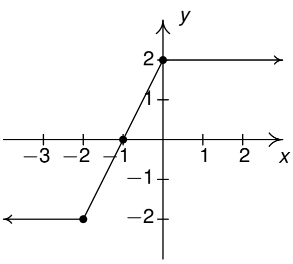
Nenhum zero
Nenhuma interseções com o eixo x
interseção com o eixo y $(0,2)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[2, \infty)$
Decrescente em $(-\infty, -2]$
Constante em$[-2, \infty)$
Todo ponto $(x,2)$ com $x \geq -2$ é mínimo absoluto
Nenhum máximo absoluto
Todo ponto $(x,2)$ com $x \geq -2$ é mínimo relativo
Todo ponto $(x,2)$ com $x > -2$ é máximo relativo



32. Reescreva $f(x) = |x+2| - |x|$ como

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 2x+2 & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

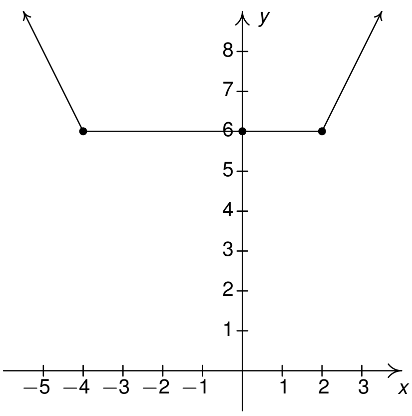
$f(-1) = 0$
interseção com o eixo x $(-1,0)$
interseção com o eixo y $(0,2)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[-2, 2]$
Crescente em $[-2, 0]$
Constante em $(-\infty, -2]$
Constante em $[0, \infty)$
Todo ponto $(x,-2)$ com $x \leq -2$ é mínimo absoluto
Todo ponto $(x,2)$ com $x \geq 0$ é máximo absoluto
Todo ponto $(x,-2)$ com $x \leq -2$ e todo ponto $(x,2)$ com $x > 0$ é mínimo relativo
Todo ponto $(x,-2)$ com $x < -2$ e todo ponto $(x,2)$ com $x \geq 0$ é mínimo relativo



33. Reescreva $f(x) = |x+4| + |x-2|$ como

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{se} \quad x < -4 \\ 6 & \text{se} \quad -4 \leq x < 2 \\ 2x+2 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Nenhum zero
Nenhuma interseção com o eixo x
interseção com o eixo y $(0,6)$
Domínio $(-\infty, \infty)$
Imagem $[6, \infty)$
Decrescente em $(-\infty, -4]$
Constante em $[-4, 2]$
Crescente em $[2, \infty)$
Todo ponto $(x,6)$ com $-4 \leq x \leq 2$ é mínimo absoluto
Nenhum máximo absoluto
Todo ponto $(x,6)$ com $-4 \leq x \leq 2$ é mínimo relativo
Todo ponto $(x,6)$ com $-4 < x < 2$ é máximo relativo



34. $f(x) = ||x| - 4|$

10 Funções Quadráticas

Nos exercícios 1 - 9, esboce o gráfico da função quadrática. Encontre as interseções com os eixos x e y, caso existam. Converta da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma $f(x) = a(x-d)^2 + e$, e vice-versa. Encontre o domínio e a imagem da função e liste os intervalos onde a função é crescente ou decrescente. Identifique o vértice e os eixos de simetria e determine se o vértice é um máximo ou mínimo absoluto e relativo.

1. $f(x) = x^2 + 2$
2. $f(x) = -(x+2)^2$
3. $f(x) = x^2 - 2x - 8$
4. $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$
6. $f(x) = -3x^2 + 4x - 7$
7. $f(x) = x^2 + x + 1$
8. $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$
9. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{100}x - 1$

Nos exercícios 10 - 14, as funções custo e preço-demanda são dadas para cenários econômicos diferentes. Para cada cenário,

- Encontre a função lucro $P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$.
- Encontre o número de itens que deve ser vendido a fim de maximizar o lucro.
- Encontre o lucro máximo.
- Encontre o preço a ser cobrado por item a fim de maximizar o lucro.
- Encontre e interprete pontos de “zero-a-zero”.

10. O custo em dólares para produzir x camisetas “Prefiro ser um Mapinguari” é $C(x) = 2x + 26$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 30 - 2x$, $0 \leq x \leq 15$.

11. O custo em dólares para produzir x garrafas de Guaraná Mapinguari é $C(x) = 10x+100$, $x \geq 0$ e the a função preço-demanda é $p(x) = 35 - x$, $0 \leq x \leq 35$.

12. O custo em centavos de dólar para produzir x copos de Limonada Mapinguari é $C(x) = 18x + 240$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 90 - 3x$, $0 \leq x \leq 30$.

13. O custo diário em dólares para produzir x Tortas de Banana Mapinguari é $C(x) = 3x + 36$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 12 - 0.5x$, $0 \leq x \leq 24$.

14. O custo mensal em centenas de dólares para produzir x motocicletas elétricas é $C(x) = 20x + 1000$, $x \geq 0$ e a função preço-demanda é $p(x) = 140 - 2x$, $0 \leq x \leq 70$.

15. A banda Cordas Submarinas angaria fundos para participar da Convenção Nacional de Mapinguaris vendendo biscoitos. O custo em dólares para cozinhar x biscoitos é $C(x) = 0.1x + 25$ e a função preço-demanda é $p(x) = 10 - .01x$. Quantos biscoitos eles devem cozinhar a fim de maximizar o lucro?

16. Usando dados do Agência de Estatísticas de Transporte, a economia média de combustível F em milhas por galão por passageiro nos EUA pode ser modelada por $F(t) = -0.0076t^2 + 0.45t + 16$, $0 \leq t \leq 28$, onde t é o número de anos desde 1980. Encontre e interprete as coordenadas do vértice do gráfico de $y = F(t)$.

17. A temperatura T, em graus Fahrenheit, t horas após as 6 da manhã é dada por:

$$T(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 32, \quad 0 \leq t \leq 12$$

Qual a temperatura mais quente do dia? Quando ela ocorre?

18. Suponha que $C(x) = x^2 - 10x + 27$ representa o custos, em *centenas* de dólares, para produzir x *milhares* de canetas. Quantas canetas devem ser produzidas para minimizar o custo? Qual é o custo mínimo?

19. Joãozinho quer plantar um jardim retangular ao lado de sua casa. Ele encontrou na garagem 32 pés lineares de arame. Uma vez que o jardim vai ficar colado à casa, um dos lados não precisa ser cercado. Quais as dimensões do jardim que maximizam sua àrea? Qual é a área máxima do jardim?

20. José quer cercar um pasto retangular para criar alpacas. Se o total de arame disponível é de 200 pés lineares, quais as dimensões que do pasto que maximizam sua área? Assumindo que uma alpaca necessita de 25 pés quadrados de pasto, quantas alpacas ele pode criar?

21. Qual é a maior área retangular que pode ser delimitada com 14 polegadas de fio?

22. A altura de um objeto solto do teto de um prédio de oito andares é modelada por $h(t) = -16t^2 + 64$, $0 \leq t \leq 2$. Quanto tempo leva para o objeto tocar o solo?

23. A altura acima do solo h, em pés, de um foguete t seconds após o lançamento é dada por $h(t) = -5t^2 + 100t$, for $0 \leq t \leq 20$. Quando o foguete atinge a altidude máxima? Qual é essa altitude máxima?

24. Numa prova de lançamento de martelo, a altura h do martelo t segundos após o lançamento é dada por $h(t) = -16t^2 + 22.08t + 6$. Qual a altitude máxima do martelo? Qual o tempo total do martelo no ar? Aproxime suas respostas para duas casas decimais.

25. Assumindo que não há resistência do ar ou outras forças além da gravidade da Terra, a altura acima do solo no tempo t de um objeto em queda livre é dada por $s(t) = -4.9t^2 + v_0t + s_0$ onde s está em metros, t em segundos, v_0 é a velocidade inicial do objeto em metros por segundo e s_0 é a posição inicial em metros.

    (a) Qual o domínio implícito dessa função?

    (b) Discusta com seus colegas o que significam $v_0 > 0$, $v_0 = 0$ e $v_0 < 0$.

    (c) Imagine um cenário em que $s_0 < 0$.

    (d) Digamos que um estilingue é usado para atirar uma pedra diretamente para cima a partir do solo($s_0 = 0$) com uma velocidade inicial de 15 metros por segundo. Qual é a altitude máxima da pedra acima do solo? Em quanto tempo ela atinge o solo?

    (e) Agora atire um pedra do topo de uma torre de 25 metros de altura. Em quanto tempo ela atinge o solo?

    (f) Qual seria a função altura se, ao invés de atirar a pedra para cima, atirássemos para baixo do alto da torre?

26. Duas torres de uma ponte estão a 400 pés de distância. O cabo parabólico que liga o topo das duas torres está 10 pés acima do ponto médio da ponte. Se as torres têm 100 pés de altura, encontre a altura do cabo a 50 pés à direita da torre do lado esquerdo.

27. Esboce o gráfico de $f(x) = |1 - x^2|$

28. Encontre todos os pontos da reta $y = 1 - x$ que estão a 2 unidades de distância do ponto $(1, -1)$.

29. Seja L a reta $y = 2x + 1$. Encontre a função $D(x)$ que mede a distância ao quadrado de um ponto em L ao ponto $(0, 0)$. Use isso para encontrar o ponto em L mais próximo de $(0, 0)$.

30. Com a ajuda de seus colegas, mostre que se uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui dois zeros reais então a coordenada x do vértice é o ponto médio dos zeros.

Nos exercícios 31 - 36, resolva a equação quadrática para a variável indicada.

31. $x^2 - 10y^2 = 0$ para x

32. $y^2 - 4y = x^2 - 4$ para x

33. $x^2 - mx = 1$ para x

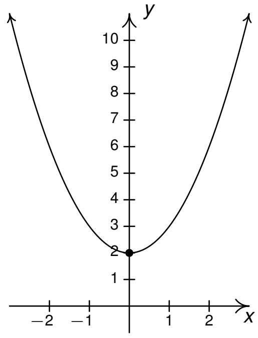
34. $y^2 - 3y = 4x$ para y

35. $y^2 - 4y = x^2 - 4$ para y

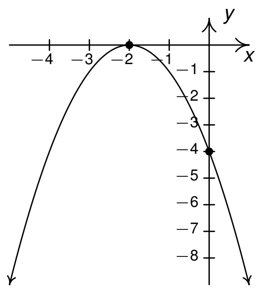
36. $-gt^2 + v_0 t + s_0 = 0$ para t (Assuma que $g \neq 0$.)

RESPOSTAS

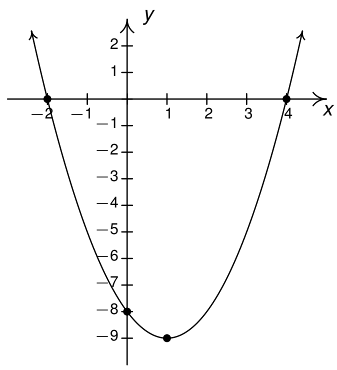
1. $f(x) = x^2 + 2$ (está nas duas formas!)
   Nenhuma interseção com o eixo x
   interseção com o eixo y $(0, 2)$
   Domínio: $(-\infty, \infty)$
   Imagem: $[2, \infty)$
   Decrescente em $(-\infty, 0]$
   Crescente em $[0, \infty)$
   Vértice $(0, 2)$ é um mínimo
   Eixo de simetria $x = 0$



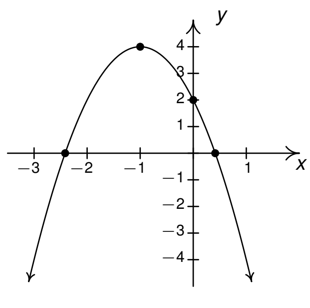
2. $f(x) = -(x + 2)^2 = -x^2 - 4x - 4$
   interseção com o eixo x $(-2, 0)$
   interseção com o eixo y $(0, -4)$
   Domínio: $(-\infty, \infty)$
   Imagem: $(-\infty, 0]$
   Crescente em $(-\infty, -2]$
   Decrescente em $[-2, \infty)$
   Vértice $(-2, 0)$ é um máximo
   Eixo de simetria $x = -2$



3. $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$
   interseções com o eixo x $(-2, 0)$ e $(4, 0)$
   interseção com o eixo y $(0, -8)$
   Domínio: $(-\infty, \infty)$
   Imagem: $[-9, \infty)$
   Decrescente em $(-\infty, 1]$
   Crescente em $[1, \infty)$
   Vértice $(1, -9)$ é um mínimo
   Eixo de simetria $x = 1$

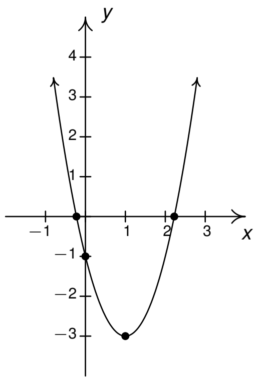


4. $f(x) = -2(x + 1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x + 2$
   interseções com o eixo x $(-1 - \sqrt{2}, 0)$ e $(-1 + \sqrt{2}, 0)$
   interseção com o eixo y $(0, 2)$
   Domínio: $(-\infty, \infty)$
   Imagem: $(-\infty, 4]$
   Crescente em $(-\infty, -1]$
   Decrescente em $[-1, \infty)$
   Vértice $(-1, 4)$ é um máximo
   Eixo de simetria $x = -1$

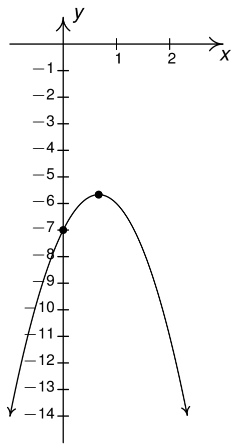


5. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x - 1)^2 - 3$
   interseções com o eixo x $\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, 0\right)$
   interseção com o eixo y $(0, -1)$
   Domínio: $(-\infty, \infty)$
   Imagem: $[-3, \infty)$
   Crescente em $[1, \infty)$
   Decrescente em $(-\infty, 1]$
   Vértice $(1, -3)$ é um mínimo

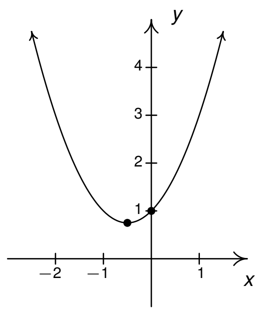
Eixo de simetria $x = 1$



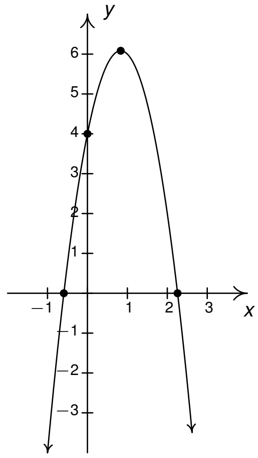
6. $f(x) = -3x^2 + 4x - 7 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{17}{3}$
Nenhuma interseção com o eixo x
interseção com o eixo y $(0, -7)$
Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $\left(-\infty, -\frac{17}{3}\right]$
Crescente em $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$
Decrescente em $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$
Vértice $\left(\frac{2}{3}, -\frac{17}{3}\right)$ é um máximo
Eixo de simetria $x = \frac{2}{3}$



7. $f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
Nenhuma interseção com o eixo x
interseção com o eixo y $(0, 1)$
Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $\left[\frac{3}{4}, \infty\right)$
Crescente em $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$
Decrescente em $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$
Vértice $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ é um mínimo
Eixo de simetria $x = -\frac{1}{2}$

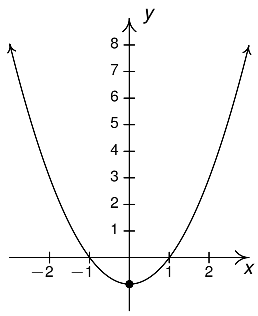


8. $f(x) = -3x^2 + 5x + 4 = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{73}{12}$
interseções com o eixo x $\left(\frac{5-\sqrt{73}}{6}, 0\right)$ e $\left(\frac{5+\sqrt{73}}{6}, 0\right)$
interseção com o eixo y $(0, 4)$
Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $\left(-\infty, \frac{73}{12}\right]$
Crescente em $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right]$
Decrescente em $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$
Vértice $\left(\frac{5}{6}, \frac{73}{12}\right)$ é um máximo
Eixo de simetria $x = \frac{5}{6}$



9. $f(x) = x^2 - \frac{1}{100}x - 1 = \left(x - \frac{1}{200}\right)^2 - \frac{40001}{40000}$
interseções com o eixo x $\left(\frac{1+\sqrt{40001}}{200}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{40001}}{200}\right)$
interseção com o eixo y $(0, -1)$
Domínio: $(-\infty, \infty)$
Imagem: $\left[-\frac{40001}{40000}, \infty\right)$
Decrescente em $\left(-\infty, \frac{1}{200}\right]$
Crescente em $\left[\frac{1}{200}, \infty\right)$
Vértice $\left(\frac{1}{200}, -\frac{40001}{40000}\right)$ é um mínimo

Eixo de simetria $x = \frac{1}{200}$



10.
- $P(x) = -2x^2 + 28x - 26$, para $0 \leq x \leq 15$.
- 7 camisetas devem ser vendidas para maximizar lucro.
- O lucro máximo é \$72.
- O preço por camiseta deve ser \$16 para maximizar lucro.
- Os pontos de empate são $x = 1$ e $x = 13$, portanto para se ter lucro, devem ser vendidas entre 1 e 13 camisetas.

11.
- $P(x) = -x^2 + 25x - 100$, para $0 \leq x \leq 35$
- Uma vez que o vértice ocorre em $x = 12.5$, e é impossível vender 12.5 garrafas de guaraná, o lucro máximo ocorre quando 12 or 13 garrafas são vendidas.
- O lucro máximo é \$56.
- O preço por garrafa está entre \$23 (para vender 12 garrafas) ou \$22 (para vender 13 garrafas). Ambas resultaram no lucro máximo.
- Os pontos de empate são $x = 5$ e $x = 20$, portanto para se ter lucro, devem ser vendidas entre 5 e 20 garrafas.

12.
- $P(x) = -3x^2 + 72x - 240$, para $0 \leq x \leq 30$
- 12 copos de limonada devem ser vendidos para maximizar o lucro.
- O lucro máximo é 192¢ ou \$1.92.
- O preço por copo deve ser 54¢ para maximizar o lucro.
- Os pontos de empate são $x = 4$ e $x = 20$, portanto para se ter lucro, devem ser vendidos entre 4 e 20 copos de limonada.

13.
- $P(x) = -0.5x^2 + 9x - 36$, para $0 \leq x \leq 24$
- 9 tortas devem ser vendidas para maximizar o lucro diário.
- O lucro diário máximo é \$4.50.
- O preço por torta deve ser \$7.50 para maximizar o lucro.
- Os pontos de empate são $x = 6$ e $x = 12$, portanto para se ter lucro, devem ser vendidas entre 6 e 12 tortas.

14.
- $P(x) = -2x^2 + 120x - 1000$, para $0 \leq x \leq 70$
- 30 motocicletas devem ser vendidas para maximizar o lucro.
- O lucro máximo mensal é de 800 centenas de dólares, ou \$80,000.
- O preço por motocicleta deve ser 80 centenas de dólares, ou \$8000.
- Os pontos de empate são $x = 10$ e $x = 50$, portanto para se ter lucro, devem ser vendidas entre 10 e 50 motocicletas mensalmente.

15. 495 biscoitos

16. O vértice está (aproximadamente) em $(29.60, 22.66)$, que corresponde à uma economia máxima de combustível de 22.66 milhas por galão, atingida entre 2009 e 2010 (29 – 30 após 1980). Infelizmente, o modelo só é válido até 2008 (28 anos após 1980).

17. 64° às 2 da tarde (8 horas após às 6 da manhã.)

18. 5000 canetas devem ser produzidas, a um custo de \$200.

19. 8 por 16 pés; área máxima é 128 pés quadrados.

20. 50 por 50 pés; área máxima é 2500 pés quadrados; 100 alpacas.

21. O maior retângulo tem área de 12.25 polegadas quadradas.

22. 2 segundos.

23. O foguete atinge sua altura máxima a 500 pés em 10 segundos após o lançamento.

24. O martelo atinge sua altura máxima a 13.62 pés aproximadamente. O martelo fica no ar aproximadamente 1.61 segundos.

25.
(a) O domínio implícito é $[0, \infty)$.

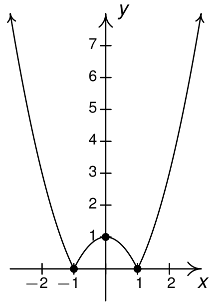
(d) A função altura neste caso é $s(t) = -4.9t^2 + 15t$. O vértice da parábola está aproximadamente em $(1.53, 11.48)$ portanto a altura máxima alcançada pela pedra é 11.48 metros. Ela atinge o solo de novo quando $t \approx 3.06$ segundos.

(e) A função altura é $s(t) = -4.9t^2 + 15t + 25$ que possui zeros em $t \approx -1.20$ e $t \approx 4.26$. Ignorando o valor negativo, temos que a pedra atige o solo em 4.26 seconds.

(f) Atirar para baixo significa que a velocidade inicial é negativa portanto a função altura é $s(t) = -4.9t^2 - 15t + 25$.

26. Faça o vértice da parábola o ponto $(0, 10)$ de modo que o ponto no topo da torre esquerda está em $(-200, 100)$ e o ponto no topo da torre direita está em $(200, 100)$. Então a parábola é dada por $p(x) = \frac{9}{4000}x^2 + 10$. Ficar 50 pés à direita da torre esquerda significa que estamos em $x = -150$ e $p(-150) = 60.625$. Portanto o cabo está a 60.625 pés acima da ponte.

27. $y = |1 - x^2|$



28. $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\right), \left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$

29. $D(x) = x^2 + (2x+1)^2 = 5x^2 + 4x + 1$, D é minimizado quando $x = -\frac{2}{5}$, portanto o ponto em $y = 2x + 1$ mais próximo de $(0, 0)$ é $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

31. $x = \pm y\sqrt{10}$

32. $x = \pm(y - 2)$

33. $x = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$

34. $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{16x + 9}}{2}$

35. $y = 2 \pm x$

36. $t = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4gs_0}}{2g}$

11 Equações e Inequações Lineares, Quadráticas e Modulares

Nos exercícios 1 - 32, resolva a inequação. Escreva suas respostas usando notação de intervalos.

1. $|3x-5| \leq 4$
2. $|7x+2| > 10$
3. $|2x+1|-5 < 0$
4. $|2-x|-4 \geq -3$
5. $|3x+5|+2 < 1$
6. $2|7-x|+4 > 1$
7. $2 \leq |4-x| < 7$
8. $1 < |2x-9| \leq 3$
9. $|x+3| \geq |6x+9|$
10. $|x-3|-|2x+1| < 0$
11. $|1-2x| \geq x+5$
12. $x+5 < |x+5|$
13. $x \geq |x+1|$
14. $|2x+1| \leq 6-x$
15. $x+|2x-3| < 2$
16. $|3-x| \geq x-5$
17. $x^2+2x-3 \geq 0$
18. $16x^2+8x+1 > 0$
19. $x^2+9 < 6x$
20. $9x^2+16 \geq 24x$
21. $x^2+4 \leq 4x$
22. $x^2+1 < 0$
23. $3x^2 \leq 11x+4$
24. $x > x^2$
25. $2x^2-4x-1 > 0$
26. $5x+4 \leq 3x^2$
27. $2 \leq |x^2-9| < 9$
28. $x^2 \leq |4x-3|$
29. $x^2+x+1 \geq 0$
30. $x^2 \geq |x|$
31. $x|x+5| \geq -6$
32. $x|x-3| < 2$
33. O lucro, em dólares, feito ao se vender x garrafas de Guaraná Mapinguari é dado por $P(x) = -x^2+25x-100$, para $0 \leq x \leq 35$. Quantas garrafas de guaraná devem ser vendidas para se ter ao menos \$50 de lucro?
34. Suponha que $C(x) = x^2-10x+27$, $x \geq 0$ representa o custo, em *centenas* de dólares, para produzir x *milhares* de canetas. Encontre o número de canetas que podem ser produzidas por não mais que \$1100.
35. A temperatura T, em graus Fahrenheit, t horas após as 6 da manhã é dada por $T(t) = -\frac{1}{2}t^2+8t+32$, para $0 \leq t \leq 12$. Quando é mais quente que 42° Fahrenheit?
36. A altura acima do solo h em pés de um foguete t segundos após o lançamento é dada por $h(t) = -5t^2+100t$, para $0 \leq t \leq 20$. Quando o foguete está a ao menos 250 pés do solo? Aproxime sua resposta para duas casas decimais.

37. Se um estilingue é usado para atirar uma pedra diretamente para cima, de uma altura inicial de 2 metros e com velocidade inicial de 30 metros por segundo, para que valores de tempo t a pedra estará acima de 35 metros? Aproxime sua resposta para duas casas decimais.

38. Que valores de temperatura values em graus Celsius são equivalentes a faixa de temperatura entre $50°F$ e $95°F$?

Nos exercícios 39 - 42, escreva e resolva a inequação envolvendo valores absolutos.

39. Encontre todos os números reais x tais que x está dentro de 4 unidades de 2.

40. Encontre todos os números reais x tais que $3x$ está dentro de 2 unidades de -1.

41. Encontre todos os números reais x tais que x^2 está dentro de 1 unidade de 3.

42. Encontre todos os números reais x tais que x^2 está ao menos 7 unidades distante de 4.

43. A área da superfície S de um cubo de aresta x é dada por $S(x) = 6x^2$ para $x > 0$. Suponha que uma indústria deseja fazer cubos de exatamente 42 centímetros quadrados, mas as máquinas disponíveis são velhas e não possuem precisão suficiente. Escreva uma inequação usando valor absoluto que diga que um dado cubo não está mais que 3 centímetros quadrados além ou aquém do valor desejado de 42 centímetros quadrados. Resolva a inequação e escreva sua resposta usando notação de intervalo.

44. Suponha que f é uma função, L é um número real e ε é um número positivo. Discuta com seus colegas o que a inequação $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa algebricamente e graficamente.

Nos exercícios 45 - 50, esboce o gráfico da relação.

45. $R = \{(x, y) : y \leq x - 1\}$

46. $R = \left\{(x, y) : y > x^2 + 1\right\}$

47. $R = \{(x, y) : -1 < y \leq 2x + 1\}$

48. $R = \left\{(x, y) : x^2 \leq y < x + 2\right\}$

49. $R = \{(x, y) : |x| - 4 < y < 2 - x\}$

50. $R = \left\{(x, y) : x^2 < y \leq |4x - 3|\right\}$

RESPOSTAS

1. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$
2. $\left(-\infty, -\frac{12}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{7}, \infty\right)$
3. $(-3, 2)$
4. $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
5. Nenhuma solução
6. $(-\infty, \infty)$
7. $(-3, 2] \cup [6, 11)$
8. $[3, 4) \cup (5, 6]$
9. $\left[-\frac{12}{7}, -\frac{6}{5}\right]$
10. $(-\infty, -4) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
11. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [6, \infty)$
12. $(-\infty, -5)$
13. Nenhuma solução.
14. $\left[-7, \frac{5}{3}\right]$
15. $\left(1, \frac{5}{3}\right)$
16. $(-\infty, \infty)$
17. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
18. $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$
19. Nenhuma solução
20. $(-\infty, \infty)$
21. $\{2\}$
22. Nenhuma solução
23. $\left[-\frac{1}{3}, 4\right]$
24. $(0, 1)$
25. $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right)$
26. $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{73}}{6}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{73}}{6}, \infty\right)$
27. $\left(-3\sqrt{2}, -\sqrt{11}\right] \cup \left[-\sqrt{7}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{11}, 3\sqrt{2}\right)$
28. $\left[-2 - \sqrt{7}, -2 + \sqrt{7}\right] \cup [1, 3]$
29. $(-\infty, \infty)$
30. $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$
31. $[-6, -3] \cup [-2, \infty)$
32. $(-\infty, 1) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$
33. $P(x) \geq 50$ em $[10, 15]$. Isso significa que entre 10 e 15 garrafas de guaraná precisam ser vendidas para receber ao menos \$50 de lucro.
34. $C(x) \leq 11$ on $[2, 8]$. Isso significa que entre 2000 e 8000 podem ser produzidas sem que o custo exceda \$1100.
35. $T(t) > 42$ em $(8 - 2\sqrt{11}, 8 + 2\sqrt{11}) \approx (1.37, 14.63)$, que corresponde a entre 7:22 da manhã (1.37 horas após as 6) e 8:38 da noite (14.63 horas após as 6 da manhã). Entretanto, como o modelo é válido somente para t, $0 \leq t \leq 12$, restringimos nossa resposta e encontramos que é mais quente que 42° Fahrenheit das 7:22 da manhã às 6 da tarde.
36. $h(t) \geq 250$ em $[10 - 5\sqrt{2}, 10 + 5\sqrt{2}] \approx [2.93, 17.07]$. Isso significa que o foguete está a menos 250 pés do solo entre 2.93 e 17.07 segundos após o lançamento.
37. $s(t) = -4.9t^2 + 30t + 2$. $s(t) > 35$ em (aproximadamente) $(1.44, 4.68)$. Isso significa que entre 1.44 e 4.68 segundos após ser lançada, a pedra está acima de 35 pés do solo.
38. De exercícios anteriores, $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ portanto $50 \leq F \leq 95$ se torna $10 \leq C \leq 35$.

39. $|x-2| \leq 4$, $[-2, 6]$

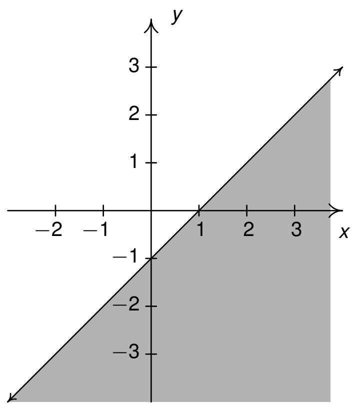
40. $|3x+1| \leq 2$, $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

41. $|x^2-3| \leq 1$, $[-2, -\sqrt{2}\,] \cup [\sqrt{2}, 2]$

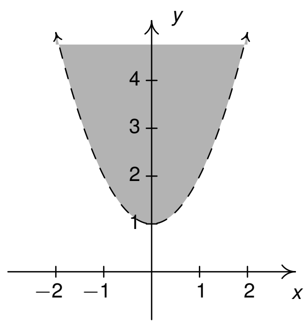
42. $|x^2-4| \geq 7$, $(-\infty, -\sqrt{11}\,] \cup [\sqrt{11}, \infty)$

43. Resolvendo $|S(x)-42| \leq 3$, e desprezando as soluções negativas resulta que $\left[\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{15}{2}}\right] \approx [2.550, 2.739]$. A aresta deve ter comprimento entre 2.550 e 2.739 centímetros.

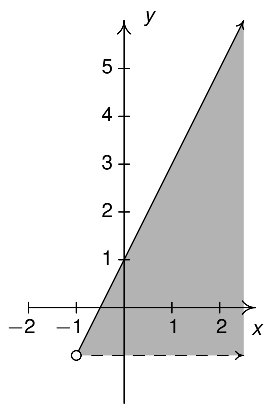
45.



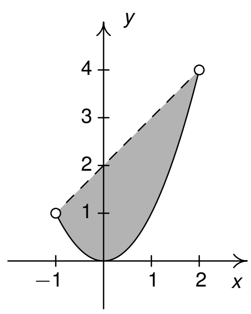
46.



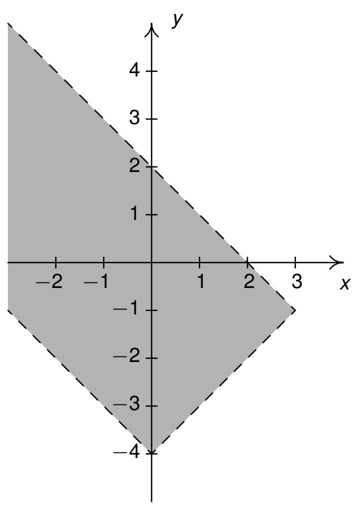
47.



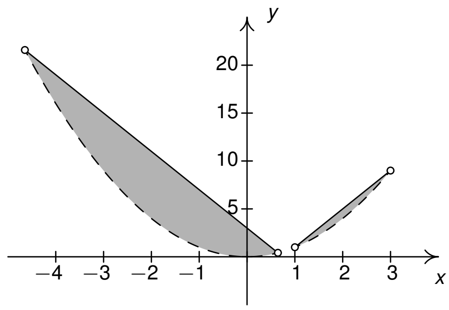
48.



49.



50.



12 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Nos exercícios 1 - 10, encontre o grau, o termo principal, o coeficiente principal, o termo constante e o comportamento no infinito do polinômio.

1. $f(x) = 4 - x - 3x^2$
2. $g(x) = 3x^5 - 2x^2 + x + 1$
3. $q(r) = 1 - 16r^4$
4. $Z(b) = 42b - b^3$
5. $f(x) = \sqrt{3}x^{17} + 22.5x^{10} - \pi x^7 + \frac{1}{3}$
6. $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$
7. $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$
8. $p(t) = -t^2(3 - 5t)(t^2 + t + 4)$
9. $f(x) = -2x^3(x + 1)(x + 2)^2$
10. $G(t) = 4(t - 2)^2 \left(t + \frac{1}{2}\right)$

Nos exercícios 11 - 20, encontre os zeros reais do polinômio dado e suas correspondentes multiplicidades. Use essa informação juntamente com o estudo dos sinais para esboçar o gráfico do polinômio. Compare sua resposta com o resultado do GeoGebra.

11. $a(x) = x(x + 2)^2$
12. $g(x) = x(x + 2)^3$
13. $f(x) = -2(x - 2)^2(x + 1)$
14. $g(x) = (2x + 1)^2(x - 3)$
15. $F(x) = x^3(x + 2)^2$
16. $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$
17. $Q(x) = (x + 5)^2(x - 3)^4$
18. $h(x) = x^2(x - 2)^2(x + 2)^2$
19. $H(t) = (3 - t)(t^2 + 1)$
20. $Z(b) = b(42 - b^2)$

Nos exercícios 21 - 26, dado o par de funções f e g, esboce o gráfico de $y = g(x)$ começando com o gráfico de $y = f(x)$ e aplicando transformações. Acompanhe o efeito das transformações sobre três pontos de sua escolha. Indique o domínio e a imagem de g.

21. $f(x) = x^3$, $g(x) = (x + 2)^3 + 1$
22. $f(x) = x^4$, $g(x) = (x + 2)^4 + 1$
23. $f(x) = x^4$, $g(x) = 2 - 3(x - 1)^4$
24. $f(x) = x^5$, $g(x) = -x^5 - 3$
25. $f(x) = x^5$, $g(x) = (x + 1)^5 + 10$
26. $f(x) = x^6$, $g(x) = 8 - x^6$
27. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que $f(x) = x^3 - 9x + 5$ tem um zero real em cada um dos seguintes intervalos: $[-4, -3]$, $[0, 1]$ e $[2, 3]$.
28. Queremos fazer uma caixa sem tampa removendo quadrados de lado x dos cantos de uma folha de papel de 8.5 por 11 polegadas. Expresse o volume V em função de x. Use o GeoGebra para encontrar o valor de x onde o volume é máximo e as dimensões e o volume da caixa de volume máximo.

Nos exercícios 29 - 31, suponha que a receita R, em *milhares* de dólares, da produção e venda de x *centenas* de TVs de LED é dada por $R(x) = -5x^3 + 35x^2 + 155x$ para $0 \leq x \leq 10.07$.

29. Use o GeoGebra para traçar o gráfico de $y = R(x)$ e determine o número de TVs que devem ser vendidas para maximizar a receita. Qual é a receita máxima?

30. Assuma que o custo, em *milhares* de dólares, para produzir x *centenas* de TVs de LED é dado $C(x) = 200x + 25$ por $x \geq 0$. Encontre e simplifique a expressão para a função lucro $P(x)$. (Lembre-se: Lucro = Receita - Custo).

31. Use o GeoGebra para traçar o gráfico de $y = P(x)$ e determine o número de TVs que devem ser vendidas para maximizar o lucro. Qual é o lucro máximo?

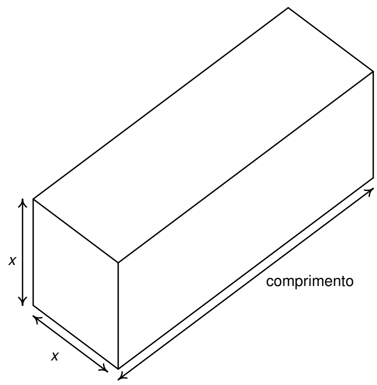
32. O custo para se fabricar x unidades de um console de jogos é dado por $C(x) = .03x^3 - 4.5x^2 + 225x + 250$, para $x \geq 0$. Pesquisas de mercado indicam que a função preço-demanda é dada por $p(x) = -1.5x + 250$. Use o GeoGebra para encontrar o nível de produção x que maximiza o lucro.

33. De acordo com um serviço postal, uma caixa retangular para encomendas deve satisfazer a desigualdade "Comprimento + Perímetro $\leq$ 130 polegadas" para serviço expresso e "Comprimento + Perímetro $\leq$ 108 polegadas" para outros serviços. Vamos assumir que temos uma caixa de fundo quadrado de lado x como desenhado abaixo. O comprimento é o maior lado e o perímetro é a distância em torno da caixa nas outras duas dimensões, de modo que no caso o perímetro é $4x$.

    (a) Assumindo que vamos usar o serviço expresso, onde Comprimento + Perímetro = 130 polegadas, expresse o comprimento da caixa em termos de x e então expresse o volume V da caixa em termos de x.

    (b) Encontre as dimensões da caixa de maior volume que pode ser enviada pelo serviço expresso.

    (c) Repita oi itens 33a e 33b para o caso de se usar "outros serviços".



RESPOSTAS

1. $f(x) = 4 - x - 3x^2$
   Grau 2
   Termo principal $-3x^2$
   Coeficiente principal -3
   Termo constante 4
   Quando $x \to -\infty,\ f(x) \to -\infty$
   Quando $x \to \infty,\ f(x) \to -\infty$

2. $g(x) = 3x^5 - 2x^2 + x + 1$
   Grau 5
   Termo principal $3x^5$
   Coeficiente principal 3
   Termo constante 1
   Quando $x \to -\infty,\ g(x) \to -\infty$
   Quando $x \to \infty,\ g(x) \to \infty$

3. $q(r) = 1 - 16r^4$
   Grau 4
   Termo principal $-16r^4$
   Coeficiente principal -16
   Termo constante 1
   Quando $r \to -\infty,\ q(r) \to -\infty$
   Quando $r \to \infty,\ q(r) \to -\infty$

4. $Z(b) = 42b - b^3$
   Grau 3
   Termo principal $-b^3$
   Coeficiente principal -1
   Termo constante 0
   Quando $b \to -\infty,\ Z(b) \to \infty$
   Quando $b \to \infty,\ Z(b) \to -\infty$

5. $f(x) = \sqrt{3}x^{17} + 22.5x^{10} - \pi x^7 + \frac{1}{3}$
   Grau 17
   Termo principal $\sqrt{3}x^{17}$
   Coeficiente principal $\sqrt{3}$
   Termo constante $\frac{1}{3}$
   Quando $x \to -\infty,\ f(x) \to -\infty$
   Quando $x \to \infty,\ f(x) \to \infty$

6. $s(t) = -4.9t^2 + v_0 t + s_0$
   Grau 2
   Termo principal $-4.9t^2$
   Coeficiente principal -4.9
   Termo constante s_0
   Quando $t \to -\infty,\ s(t) \to -\infty$
   Quando $t \to \infty,\ s(t) \to -\infty$

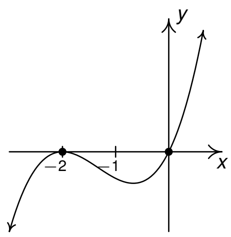
7. $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
   Grau 4
   Termo principal x^4
   Coeficiente principal 1
   Termo constante 24
   Quando $x \to -\infty,\ P(x) \to \infty$
   Quando $x \to \infty,\ P(x) \to \infty$

8. $p(t) = -t^2(3-5t)(t^2+t+4)$
   Grau 5
   Termo principal $5t^5$
   Coeficiente principal 5
   Termo constante 0
   Quando $t \to -\infty,\ p(t) \to -\infty$
   Quando $t \to \infty,\ p(t) \to \infty$

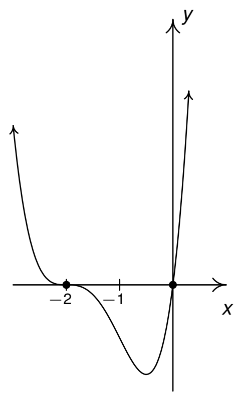
9. $f(x) = -2x^3(x+1)(x+2)^2$
Grau 6
Termo principal $-2x^6$
Coeficiente principal -2
Termo constante 0
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

10. $G(t) = 4(t-2)^2\left(t+\frac{1}{2}\right)$
Grau 3
Termo principal $4t^3$
Coeficiente principal 4
Termo constante 8
Quando $t \to -\infty$, $G(t) \to -\infty$
Quando $t \to \infty$, $G(t) \to \infty$

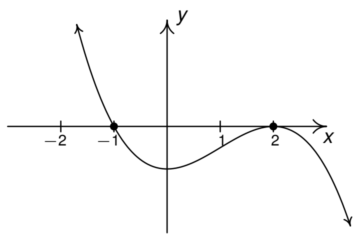
11. $a(x) = x(x+2)^2$
$x = 0$ multiplicidade 1
$x = -2$ multiplicidade 2



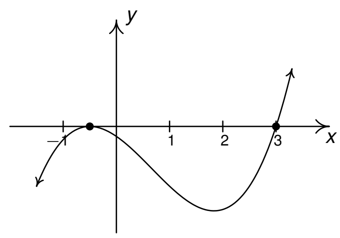
12. $g(x) = x(x+2)^3$
$x = 0$ multiplicidade 1
$x = -2$ multiplicidade 3



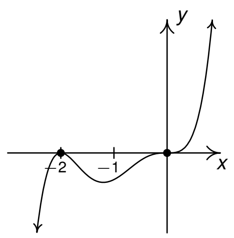
13. $f(x) = -2(x-2)^2(x+1)$
$x = 2$ multiplicidade 2
$x = -1$ multiplicidade 1



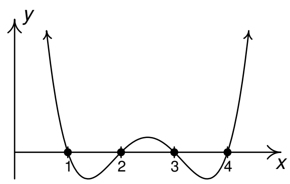
14. $g(x) = (2x+1)^2(x-3)$
$x = -\frac{1}{2}$ multiplicidade 2
$x = 3$ multiplicidade 1



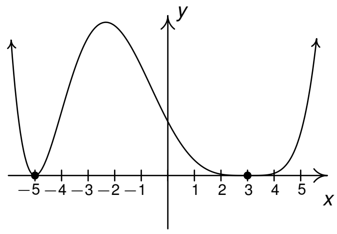
15. $F(x) = x^3(x+2)^2$
$x = 0$ multiplicidade 3
$x = -2$ multiplicidade 2



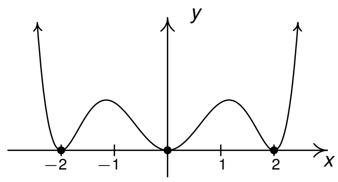
16. $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$x = 1$ multiplicidade 1
$x = 2$ multiplicidade 1
$x = 3$ multiplicidade 1
$x = 4$ multiplicidade 1



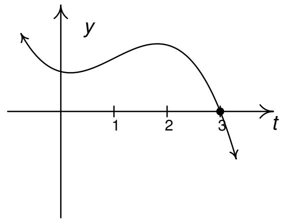
17. $Q(x) = (x+5)^2(x-3)^4$
$x = -5$ multiplicidade 2
$x = 3$ multiplicidade 4



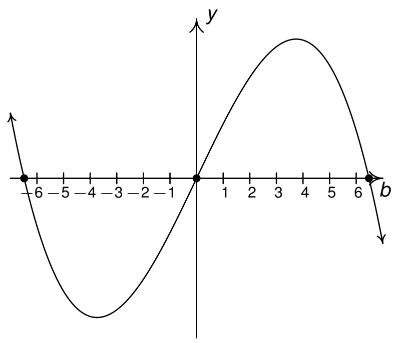
18. $f(x) = x^2(x-2)^2(x+2)^2$
$x = -2$ multiplicidade 2
$x = 0$ multiplicidade 2
$x = 2$ multiplicidade 2



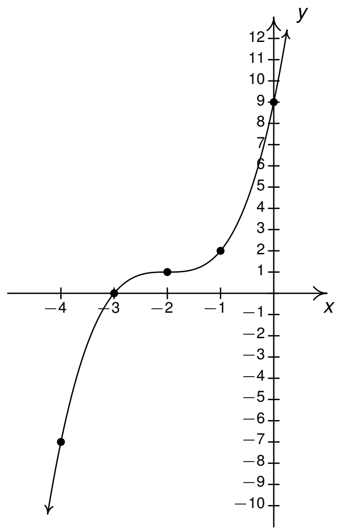
19. $H(t) = (3-t)\left(t^2+1\right)$
$x = 3$ multiplicidade 1



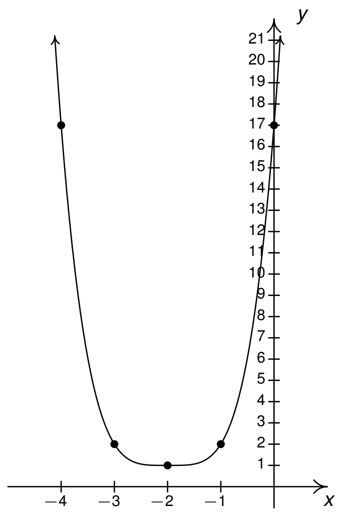
20. $Z(b) = b(42-b^2)$
$b = -\sqrt{42}$ multiplicidade 1
$b = 0$ multiplicidade 1
$b = \sqrt{42}$ multiplicidade 1



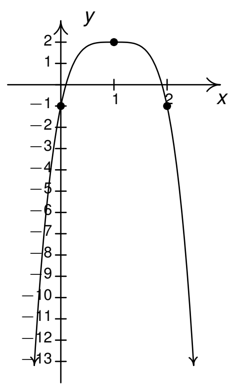
21. $g(x) = (x+2)^3 + 1$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $(-\infty, \infty)$



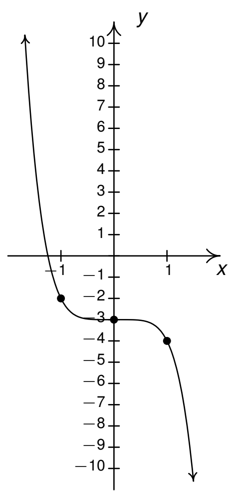
22. $g(x) = (x+2)^4 + 1$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $[1, \infty)$



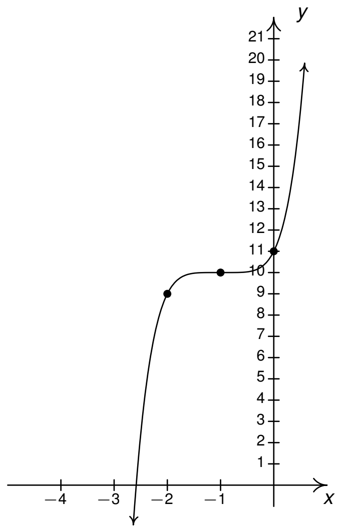
23. $g(x) = 2 - 3(x-1)^4$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $(-\infty, 2]$



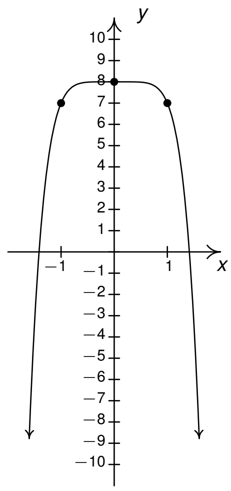
24. $g(x) = -x^5 - 3$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $(-\infty, \infty)$



25. $g(x) = (x+1)^5 + 10$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $(-\infty, \infty)$



26. $g(x) = 8 - x^6$
domínio: $(-\infty, \infty)$
imagem: $(-\infty, 8]$



27. Temos que $f(-4) = -23$, $f(-3) = 5$, $f(0) = 5$, $f(1) = -3$, $f(2) = -5$ e $f(3) = 5$ portanto o Teorema do Valor Intermediário diz que $f(x) = x^3 - 9x + 5$ tem zeros reais nos intervalos $[-4, -3], [0, 1]$ e $[2, 3]$.

28. $V(x) = x(8.5-2x)(11-2x) = 4x^3 - 39x^2 + 93.5x$, $0 < x < 4.25$. O volume é maximizado quando $x \approx 1.58$, portanto as dimensões da caixa com volume máximo são: altura $\approx$ 1.58 polegadas, largura $\approx$ 5.34 polegadas, e profundidade $\approx$ 7.84 polegadas. O volume máximo é $\approx$ 66.15 polegadas cúbicas.

29. O máximo ocorre quando $x \approx 6.305$ e $y \approx 1115.417$. Uma vez que x representa o número de TVs vendidas em centenas, $x = 6.305$ corresponde a 630.5 TVs. Como não se pode vender meia TV, comparamos $R(6.30) \approx 1115.415$ e $R(6.31) \approx 1115.416$, portanto 631 TVs resulta em uma receita ligeiramente maior. Como y representa a receita em *milhares* de dólares, a receita máxima é \$1,115,416.

30. $P(x) = R(x) - C(x) = -5x^3 + 35x^2 - 45x - 25$, $0 \leq x \leq 10.07$.

31. O máximo ocorre quando $x \approx 3.897$ e $y \approx 35.255$. Uma vez que x representa o número de TVs vendidas em centenas, $x = 3.897$ corresponde a 389.7 TVs. Como não se pode vender 0.7 de uma TV, comparamos $P(3.89) \approx 35.254$ e $P(3.90) \approx 35.255$, portanto 390 TVs resulta em um lucro ligeiramente maior. Como y representa o lucro em *milhares* de dólares, o lucro máximo é \$35,255.

32. Vender 71 consoles resulta em um lucro maximizado de \$5910.67.

33. (a) $V(x) = x^2(130 - 4x) = -4x^3 + 130x^2$.
    (b) O máximo de $y = V(x)$ em $[0, 33] \times [0, 21000]$ ocorre em $(21.67, 20342.59)$, portanto as dimensões da caixa de volume máximo são 21.67in. $\times$ 21.67in. $\times$ 43.32in. para um volume de 20342.59in.^{3}.
    (c) $V(x) = -4x^3 + 108x^2$. O máximo ocorre em $(18.00, 11664.00)$, portanto as dimensões da caixa de volume máximo são 18.00in. $\times$ 18.00in. $\times$ 36in. para um volume de 11664.00in.^{3}.

13 Divisão de Polinômios

Nos exercícios 1 - 6, efetue a divisão polinomial. Escreva o polinômio dado na forma $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

1. $\left(4x^2 + 3x - 1\right) \div (x - 3)$
2. $\left(2x^3 - x + 1\right) \div \left(x^2 + x + 1\right)$
3. $\left(5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1\right) \div \left(x^2 + 4\right)$
4. $\left(-x^5 + 7x^3 - x\right) \div \left(x^3 - x^2 + 1\right)$
5. $\left(9x^3 + 5\right) \div (2x - 3)$
6. $\left(4x^2 - x - 23\right) \div \left(x^2 - 1\right)$

Nos exercícios 7 - 20 use o dispositivo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de polinômios. Escreva o polinômio dado na forma $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

7. $\left(3x^2 - 2x + 1\right) \div (x - 1)$
8. $\left(x^2 - 5\right) \div (x - 5)$
9. $\left(3 - 4x - 2x^2\right) \div (x + 1)$
10. $\left(4x^2 - 5x + 3\right) \div (x + 3)$
11. $\left(x^3 + 8\right) \div (x + 2)$
12. $\left(4x^3 + 2x - 3\right) \div (x - 3)$
13. $\left(18x^2 - 15x - 25\right) \div \left(x - \frac{5}{3}\right)$
14. $\left(4x^2 - 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
15. $\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$
16. $\left(3x^3 - x + 4\right) \div \left(x - \frac{2}{3}\right)$
17. $\left(2x^3 - 3x + 1\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$
18. $\left(4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + 9\right) \div \left(x - \frac{3}{2}\right)$
19. $\left(x^4 - 6x^2 + 9\right) \div \left(x - \sqrt{3}\right)$
20. $\left(x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\right) \div \left(x + \sqrt{2}\right)$

Nos exercícios 21 - 30, determine $p(c)$ usando o Teorema do Resto para a função polinomial e para o valor de c dados. Se $p(c) = 0$, fatore $p(x) = (x - c)q(x)$.

21. $p(x) = 2x^2 - x + 1$, $c = 4$
22. $p(x) = 4x^2 - 33x - 180$, $c = 12$
23. $p(x) = 2x^3 - x + 6$, $c = -3$
24. $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $c = -1$
25. $p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$, $c = 2$
26. $p(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, $c = -\frac{1}{2}$
27. $p(x) = x^4 - 2x^2 + 4$, $c = \frac{3}{2}$
28. $p(x) = 6x^4 - x^2 + 2$, $c = -\frac{2}{3}$
29. $p(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 7$, $c = -\sqrt{7}$
30. $p(x) = x^2 - 4x + 1$, $c = 2 - \sqrt{3}$

Nos exercícios 31 - 40, são dados um polinômio e um de seus zeros. Use os métodos conhecidos e tentativa e erro para encontrar os demais zeros e fatorar o polinômio.

31. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad c = 1$

32. $x^3 - 24x^2 + 192x - 512, \quad c = 8$

33. $3x^3 + 4x^2 - x - 2, \quad c = \frac{2}{3}$

34. $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{2}$

35. $x^3 + 2x^2 - 3x - 6, \quad c = -2$

36. $2x^3 - x^2 - 10x + 5, \quad c = \frac{1}{2}$

37. $4x^4 - 28x^3 + 61x^2 - 42x + 9$, $c = \frac{1}{2}$ é um zero de multiplicidade 2

38. $x^5 + 2x^4 - 12x^3 - 38x^2 - 37x - 12$, $c = -1$ é um zero de multiplicidade 3

39. $125x^5 - 275x^4 - 2265x^3 - 3213x^2 - 1728x - 324$, $c = -\frac{3}{5}$ é um zero de multiplicidade 3

40. $x^2 - 2x - 2, \quad c = 1 - \sqrt{3}$

Nos exercícios 41 - 45, crie um polinômio p que tenha as características desejadas. Pode deixar o polinômio na forma fatorada.

41.
- Os zeros de p são $c = \pm 2$ e $c = \pm 1$
- O termo principal de $p(x)$ é $117x^4$.

42.
- Os zeros de p são $c = 1$ e $c = 3$
- $c = 3$ é um zero de multiplicidade 2.
- O termo principal de $p(x)$ é $-5x^3$

43.
- As soluções de $p(x) = 0$ são $x = \pm 3$ e $x = 6$
- O termo principal de $p(x)$ é $7x^4$
- O ponto $(-3, 0)$ é um mínimo local do gráfico de $y = p(x)$.

44.
- As soluções de $p(x) = 0$ são $x = \pm 3$, $x = -2$ e $x = 4$.
- O termo principal de $p(x)$ é $-x^5$.
- O ponto $(-2, 0)$ é um máximo local do gráfico de $y = p(x)$.

45.
- p tem grau 4.
- quando $x \to \infty$, $p(x) \to -\infty$
- p tem exatamente três interseções com o eixo x: $(-6, 0)$, $(1, 0)$ e $(117, 0)$
- O gráfico de $y = p(x)$ cruza o eixo x em $(1, 0)$.

46. Encontre um polinômio quadrático com coeficientes inteiros que tenha $x = \dfrac{3}{5} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{5}$ como seus zeros reais.

RESPOSTAS

1. $4x^2 + 3x - 1 = (x - 3)(4x + 15) + 44$
2. $2x^3 - x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)(2x - 2) + (-x + 3)$
3. $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = \left(x^2 + 4\right)\left(5x^2 - 3x - 18\right) + (12x + 71)$
4. $-x^5 + 7x^3 - x = \left(x^3 - x^2 + 1\right)\left(-x^2 - x + 6\right) + \left(7x^2 - 6\right)$
5. $9x^3 + 5 = (2x - 3)\left(\frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x + \frac{81}{8}\right) + \frac{283}{8}$
6. $4x^2 - x - 23 = \left(x^2 - 1\right)(4) + (-x - 19)$
7. $\left(3x^2 - 2x + 1\right) = (x - 1)(3x + 1) + 2$
8. $\left(x^2 - 5\right) = (x - 5)(x + 5) + 20$
9. $\left(3 - 4x - 2x^2\right) = (x + 1)(-2x - 2) + 5$
10. $\left(4x^2 - 5x + 3\right) = (x + 3)(4x - 17) + 54$
11. $\left(x^3 + 8\right) = (x + 2)\left(x^2 - 2x + 4\right) + 0$
12. $\left(4x^3 + 2x - 3\right) = (x - 3)\left(4x^2 + 12x + 38\right) + 111$
13. $\left(18x^2 - 15x - 25\right) = \left(x - \frac{5}{3}\right)(18x + 15) + 0$
14. $\left(4x^2 - 1\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x + 2) + 0$
15. $\left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2\right) + 0$
16. $\left(3x^3 - x + 4\right) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 2x + \frac{1}{3}\right) + \frac{38}{9}$
17. $\left(2x^3 - 3x + 1\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + x - \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{4}$
18. $\left(4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + 9\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(4x^3 - 6x^2 + 4x - 6\right) + 0$
19. $\left(x^4 - 6x^2 + 9\right) = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x^3 + \sqrt{3}\,x^2 - 3x - 3\sqrt{3}\right) + 0$
20. $\left(x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\right) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^5 - \sqrt{2}\,x^4 - 4x^3 + 4\sqrt{2}\,x^2 + 4x - 4\sqrt{2}\right) + 0$
21. $p(4) = 29$
22. $p(12) = 0$, $p(x) = (x - 12)(4x + 15)$
23. $p(-3) = -45$
24. $p(-1) = 2$
25. $p(2) = 0$, $p(x) = (x - 2)\left(3x^2 + 4\right)$
26. $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(8x^2 + 8x + 2\right)$
27. $p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{73}{16}$
28. $p\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{74}{27}$
29. $p(-\sqrt{7}) = 0$, $p(x) = (x + \sqrt{7})\left(x^3 + (1 - \sqrt{7})x^2 + (1 - \sqrt{7})x - \sqrt{7}\right)$
30. $p(2 - \sqrt{3}) = 0$, $p(x) = (x - (2 - \sqrt{3}))(x - (2 + \sqrt{3}))$
31. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
32. $x^3 - 24x^2 + 192x - 512 = (x - 8)^3$

33. $3x^3+4x^2-x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)^2$

34. $2x^3-3x^2-11x+6=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x-3)$

35. $x^3+2x^2-3x-6=(x+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

36. $2x^3-x^2-10x+5=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

37. $4x^4-28x^3+61x^2-42x+9=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-3)^2$

38. $x^5+2x^4-12x^3-38x^2-37x-12=(x+1)^3(x+3)(x-4)$

39. $125x^5-275x^4-2265x^3-3213x^2-1728x-324=125\left(x+\frac{3}{5}\right)^3(x+2)(x-6)$

40. $x^2-2x-2=(x-(1-\sqrt{3}))(x-(1+\sqrt{3}))$

41. $p(x)=117(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

42. $p(x)=-5(x-1)(x-3)^2$

43. $p(x)=7(x+3)^2(x-3)(x-6)$

44. $p(x)=-(x+2)^2(x-3)(x+3)(x-4)$

45. $p(x)=a(x+6)^2(x-1)(x-117)$ onde a pode ser um número negativo qualquer

46. $p(x)=5x^2-6x-4$

14 Zeros de Polinômios

Nos exercícios 1 - 20, encontre os zeros reais do polinômio usando tentativa e erro e redução de grau. Determine também a multiplicidade de cada zero.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
2. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 40x - 32$
3. $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$
4. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$
5. $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$
6. $f(x) = -2x^3 + 19x^2 - 49x + 20$
7. $f(x) = -17x^3 + 5x^2 + 34x - 10$
8. $f(x) = 36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1$
9. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 11x - 10$
10. $f(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3$
11. $f(x) = 9x^3 - 5x^2 - x$
12. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 9x^2$
13. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 15$
14. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14$
15. $f(x) = 3x^4 - 14x^2 - 5$
16. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$
17. $f(x) = x^6 - 3x^3 - 10$
18. $f(x) = 2x^6 - 9x^3 + 10$
19. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8$
20. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 18x - 27$

Nos exercícios 21 - 23, use o GeoGebra para ajudá-lo a encontrar os zeros reais do polinômio dado. Determine a multiplicidade de cada zero real.

21. $f(x) = x^5 - 60x^3 - 80x^2 + 960x + 2304$
22. $f(x) = 25x^5 - 105x^4 + 174x^3 - 142x^2 + 57x - 9$
23. $f(x) = 90x^4 - 399x^3 + 622x^2 - 399x + 90$
24. Encontre os zeros reais de $f(x) = x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{72}x + \frac{1}{72}$ primeiramente determinando um polinômio $q(x)$ com coeficientes inteiros tal que $q(x) = N \cdot f(x)$ para algum inteiro N.

Nos exercícios 25 - 34, resolva a inequação polinomial e expresse sua resposta usando notação de intervalo.

25. $-2x^3 + 19x^2 - 49x + 20 > 0$
26. $x^4 - 9x^2 \leq 4x - 12$
27. $(x - 1)^2 \geq 4$
28. $4x^3 \geq 3x + 1$
29. $x^4 \leq 16 + 4x - x^3$
30. $3x^2 + 2x < x^4$
31. $\dfrac{x^3 + 2x^2}{2} < x + 2$
32. $\dfrac{x^3 + 20x}{8} \geq x^2 + 2$
33. $2x^4 > 5x^2 + 3$
34. $x^6 + x^3 \geq 6$
35. No exercício 33 da Seção 12, determinamos o volume de uma caixa como sendo igual a $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 120x$, onde x denota o comprimento do lado do quadrado que é removido dos cantos, com $0 < x < 5$. Resolva a inequação $V(x) \geq 80$ analiticamente e interprete sua resposta no contexo do exemplo.

36. No exercício 32 da Seção 12, $C(x) = .03x^3 - 4.5x^2 + 225x + 250$, para $x \geq 0$ modela o custo de se produzir consoles de jogos. Se o orçamento para produção é de \$5000, encontre o número de consoles que podem ser produzidos dentro do orçamento.

37. Seja $f(x) = 5x^7 - 33x^6 + 3x^5 - 71x^4 - 597x^3 + 2097x^2 - 1971x + 567$. Com a ajuda de seus colegas, encontre as interseções do gráfico de f com os eixos x e y. Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente e os extremos locais.

RESPOSTAS

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
   $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ (cada um com mult. 1)

2. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 40x - 32$
   $x = -2$ (mult. 3), $x = 4$ (mult. 1)

3. $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$
   $x = -2$ (mult. 2), $x = 1$ (mult. 1), $x = 3$ (mult. 1)

4. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$
   $x = -6$ (mult. 1), $x = 1$ (mult. 2)

5. $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$
   $x = 7$ (mult. 1)

6. $f(x) = -2x^3 + 19x^2 - 49x + 20$
   $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$, $x = 5$ (cada um com mult. 1)

7. $f(x) = -17x^3 + 5x^2 + 34x - 10$
   $x = \frac{5}{17}$, $x = \pm\sqrt{2}$ (cada um com mult. 1)

8. $f(x) = 36x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 2x + 1$
   $x = \frac{1}{2}$ (mult. 2), $x = -\frac{1}{3}$ (mult. 2)

9. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 11x - 10$
   $x = -2$, $x = \frac{3\pm\sqrt{69}}{6}$ (cada um com mult. 1)

10. $f(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3$
    $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\sqrt{3}$ (cada um com mult. 1)

11. $f(x) = 9x^3 - 5x^2 - x$
    $x = 0$, $x = \frac{5\pm\sqrt{61}}{18}$ (cada um com mult. 1)

12. $f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 9x^2$
    $x = 0$ (mult. 2), $x = \frac{5\pm\sqrt{241}}{12}$ (cada um com mult. 1)

13. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 15$
    $x = \pm\sqrt{3}$ (cada um com mult. 1)

14. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14$
    $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm\sqrt{7}$ (cada um com mult. 1)

15. $f(x) = 3x^4 - 14x^2 - 5$
    $x = \pm\sqrt{5}$ (cada um com mult. 1)

16. $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$
    $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = \pm\sqrt{2}$ (cada um com mult. 1)

17. $f(x) = x^6 - 3x^3 - 10$
    $x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $x = \sqrt[3]{5}$ (cada um com mult. 1)

18. $f(x) = 2x^6 - 9x^3 + 10$
    $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{2}$, $x = \sqrt[3]{2}$ (cada um com mult. 1)

19. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x + 8$
    $x = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$ (cada um com mult. 1)

20. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 18x - 27$
    $x = -\frac{3}{2}$, $x = \pm\sqrt{3}$ (cada um com mult. 1)

21. $f(x) = x^5 - 60x^3 - 80x^2 + 960x + 2304$
    $x = -4$ (mult. 3), $x = 6$ (mult. 2)

22. $f(x) = 25x^5 - 105x^4 + 174x^3 - 142x^2 + 57x - 9$
    $x = \frac{3}{5}$ (mult. 2), $x = 1$ (mult. 3)

23. $f(x) = 90x^4 - 399x^3 + 622x^2 - 399x + 90$
    $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{3}{5}$ (cada um com mult. 1)

24. Escolhemos $q(x) = 72x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 72 \cdot f(x)$. Os zeros reais de f e g são $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{6}$ e $x = \frac{1}{4}$.

25. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (4, 5)$

26. $\{-2\} \cup [1, 3]$

27. $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

28. $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [1, \infty)$

29. $[-2, 2]$

30. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$

31. $(-\infty, -2) \cup \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

32. $\{2\} \cup [4, \infty)$

33. $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

34. $(-\infty, -\sqrt[3]{3}) \cup (\sqrt[3]{2}, \infty)$

35. $V(x) \geq 80$ em $[1, 5 - \sqrt{5}] \cup [5 + \sqrt{5}, \infty)$. Apenas o intervalo $[1, 5 - \sqrt{5}]$ está no domínio, entretanto. No contexo do problema, isso significa que para o volume da caixa ser ao menos 80 polegadas cúbicas, o quadrado removido deve ter lado de ao menos uma polegada, mas não maior que $5 - \sqrt{5} \approx 2.76$ polegadas.

36. $C(x) \leq 5000$ em $(-\infty, 82.18]$ (aproximadamente). O intervalo contido no domínio é $(0, 82.18]$. Uma vez que x representa o número de consoles, verificamos $C(82) = 4983.04$ e $C(83) = 5078.11$, portanto para permanecer dentro do orçamento entre 1 e 82 consoles podem ser produzidos.

15 Funções Racionais

Nos exercícios 1 - 18, para a funcão racional f dada:

- Encontre o domínio de f.
- Identifique quaisquer assíntotas verticais ao gráfico de $y = f(x)$.
- Identifique quaisquer lacunas no gráfico.
- Encontre as assíntotas horizontais, caso existam.
- Encontre as assíntotas oblíquas, caso existam.
- Trace o gráfico da função usando o GeoGebra e descreva o comportamento próximo às assíntotas.

1. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 6}$
2. $f(x) = \dfrac{3 + 7x}{5 - 2x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 12}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = \dfrac{x + 7}{(x + 3)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$
8. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6}$
10. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 9}$
11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - x - 2}$
12. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1}$
13. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{3x + 2}$
14. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 4x}{x^2 - 9}$
15. $f(x) = \dfrac{-5x^4 - 3x^3 + x^2 - 10}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$
16. $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x}$
17. $f(x) = \dfrac{18 - 2x^2}{x^2 - 9}$
18. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 + x + 1}$

19. O custo C em dólares para remover p% das espécies de peixe invasoras de uma lagoa é dada por
$$C(p) = \frac{1770p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100$$
    (a) Encontre e interprete $C(25)$ e $C(95)$.
    (b) O que a assíntota vertical em $x = 100$ significa no contexto do problema?
    (c) Que porcentagem de peixes invasores pode-se remover com \$40000?

20. No exercício 71 da Seção 4, a população de Mapinguaris do Amazonas foi modelada pela função
$$P(t) = \frac{150t}{t + 15},$$
onde $t = 0$ representa o ano de 1803. Encontre a assíntota horizontal ao gráfico de $y = P(t)$ e explique o que ela significa.

21. O custo C (em dólares) para fazer x tocadores de mp3 é $C(x) = 100x + 2000$, $x \geq 0$.
    (a) Encontre a formula para o custo médio $\overline{C}(x)$, onde $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

(b) Encontre e interprete $\overline{C}(1)$ e $\overline{C}(100)$.

(c) Quantos tocadores precisam ser produzidos para que o custo médio seja $200?

(d) Interprete o comportamento de $\overline{C}(x)$ quando $x \to 0^+$. (Dica: encontre o custo fixo $C(0)$ primeiro para ajudar sua interpretação.)

(e) Interprete o comportamento de $\overline{C}(x)$ quando $x \to \infty$.

22. Usando as leis de análise de circuito elétrico, é possível mostrar que a potência P em um determinado circuito está relacionada à resistência x pela fórmula

$$P(x) = \frac{25x}{(x+3.9)^2},$$

com $x \geq 0$.

(a) Trace o gráfico da função $y = P(x)$ no GeoGebra.

(b) Use o GeoGebra para encontrar o valor aproximado da potência máxima. Qual o valor da resistência correspondente?

(c) Encontre e interprete o comportamento de $P(x)$ quando $x \to \infty$.

RESPOSTAS

1. $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$
domínio: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
Assíntota vertical: $x = 2$
Quando $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 2^+$, $f(x) \to \infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = \frac{1}{3}$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to \frac{1}{3}^-$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to \frac{1}{3}^+$

2. $f(x) = \dfrac{3+7x}{5-2x}$
domínio: $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$
Assíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$
Quando $x \to \frac{5}{2}^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to \frac{5}{2}^+$, $f(x) \to -\infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = -\frac{7}{2}$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\frac{7}{2}^+$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to -\frac{7}{2}^-$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-12} = \dfrac{x}{(x+4)(x-3)}$
domínio: $(-\infty, -4) \cup (-4, 3) \cup (3, \infty)$
Assíntotas verticais: $x = -4, x = 3$
Quando $x \to -4^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to -4^+$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 3^+$, $f(x) \to \infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = 0$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
domínio: $(-\infty, \infty)$
Nenhuma assíntota vertical
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = 0$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$

5. $f(x) = \dfrac{x+7}{(x+3)^2}$
domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
Assíntota vertical: $x = -3$
Quando $x \to -3^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to -3^+$, $f(x) \to \infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = 0$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$

6. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
domínio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
Assíntota vertical: $x = 1$
Quando $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 1^+$, $f(x) \to \infty$
Lacuna em $(-1, -\frac{3}{2})$
Assíntota oblíqua: $y = x$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está abaixo de $y = x$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está acima de $y = x$

7. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$
domínio: $(-\infty, \infty)$
Nenhuma assíntota vertical
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = 0$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$

8. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4} = \dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}$
domínio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$
Assíntotas verticais: $x = -2, x = 2$
Quando $x \to -2^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to -2^+$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 2^+$, $f(x) \to \infty$
Nenhuma lacuna no gráfico

Assíntota horizontal: $y = 0$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$

Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$

9. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 6} = \dfrac{x - 4}{x - 2}$
domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$
Assíntota vertical: $x = 2$
Quando $x \to 2^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$
Lacuna em $\left(-3, \frac{7}{5}\right)$
Assíntota horizontal: $y = 1$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 1^+$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 1^-$

10. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 9} = \dfrac{(3x + 1)(x - 2)}{(x + 3)(x - 3)}$
domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$
Assíntotas verticais: $x = -3, x = 3$
Quando $x \to -3^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to -3^+$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 3^+$, $f(x) \to \infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota horizontal: $y = 3$
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 3^+$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to 3^-$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x(x + 1)}{x - 2}$
domínio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$
Assíntota vertical: $x = 2$
Quando $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 2^+$, $f(x) \to \infty$
Lacuna $(-1, 0)$
Assíntota oblíqua: $y = x + 3$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está abaixo de $y = x + 3$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está acima de $y = x + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + 1}$
domínio: $(-\infty, \infty)$
Nenhuma assíntota vertical
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota oblíqua: $y = x$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está acima de $y = x$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está abaixo de $y = x$

13. $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{3x+2}$
domínio: $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$
Assíntota vertical: $x = -\frac{2}{3}$
Quando $x \to -\frac{2}{3}^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to -\frac{2}{3}^+$, $f(x) \to -\infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota oblíqua: $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está acima de $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está abaixo de $y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}$

14. $f(x) = \dfrac{-x^3+4x}{x^2-9} = \dfrac{-x^3+4x}{(x-3)(x+3)}$
domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$
Assíntotas verticais: $x = -3$, $x = 3$
Quando $x \to -3^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to -3^+$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to 3^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 3^+$, $f(x) \to -\infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota oblíqua: $y = -x$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está acima de $y = -x$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está abaixo de $y = -x$

15. $f(x) = \dfrac{-5x^4-3x^3+x^2-10}{x^3-3x^2+3x-1} = \dfrac{-5x^4-3x^3+x^2-10}{(x-1)^3}$
domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Assíntotas verticais: $x = 1$
Quando $x \to 1^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 1^+$, $f(x) \to -\infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota oblíqua: $y = -5x - 18$
Quando $x \to -\infty$, o gráfico está acima de $y = -5x - 18$
Quando $x \to \infty$, o gráfico está abaixo de $y = -5x - 18$

16. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$
domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Assíntota vertical: $x = 1$
Quando $x \to 1^-$, $f(x) \to \infty$
Quando $x \to 1^+$, $f(x) \to -\infty$
Nenhuma lacuna no gráfico
Nenhuma assíntota horizontal ou oblíqua
Quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$
Quando $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

17. $f(x) = \dfrac{18-2x^2}{x^2-9} = -2$
domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$
Nenhuma assíntota vertical
Lacunas no gráfico em $(-3, -2)$ e $(3, -2)$
Assíntota horizontal $y = -2$
Quando $x \to \pm\infty$, $f(x) = -2$

18. $f(x) = \dfrac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2+x+1} = x - 5$
domínio: $(-\infty, \infty)$
Nenhuma assíntota vertical
Nenhuma lacuna no gráfico
Assíntota oblíqua: $y = x - 5$
$f(x) = x - 5$ em todo ponto.

19. (a) $C(25) = 590$ significa que custa \$590 para remover 25% dos peixes e $C(95) = 33630$ significa que custaria \$33630 para remover 95% dos peixes da lagoa.
(b) A assíntota vertical em $x = 100$ significa que a medida que tentamos remover 100% dos peixes da lagoa, o custo aumenta sem limite, i.e., é impossível remover todos os peixes.
(c) Por \$40000 é possível remover cerca de 95.76% dos peixes.

20. A assíntota horizontal do gráfico de $P(t) = \frac{150t}{t+15}$ é $y = 150$ e isso significa que o modelo prevê que a população de mapinguaris no Amazonas nunca excederá 150.

21. (a) $\overline{C}(x) = \frac{100x+2000}{x}$, $x > 0$.

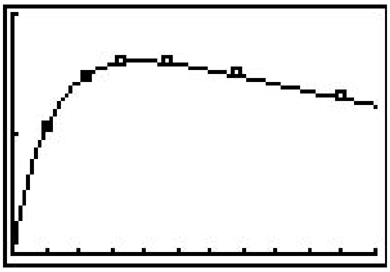
(b) $\overline{C}(1) = 2100$ e $\overline{C}(100) = 120$. Quando apenas 1 tocador é produzido, o custo por tocador é \$2100, mas quando 100 são produzidos, o custo por tocador é de \$120.

(c) $\overline{C}(x) = 200$ quando $x = 20$. Portanto para se chegar ao custo de \$200 por tocador, 20 precisam ser produzidos.

(d) Quando $x \to 0^+$, $\overline{C}(x) \to \infty$. Isso significa que quando menos e menos tocadores são produzidos, o custo por tocador se torna ilimitado. Nesta situação, existe um custo fixo de \$2000 ($C(0) = 2000$) que tentamos dividir entre cada vez menos tocadores.

(e) Quando $x \to \infty$, $\overline{C}(x) \to 100^+$. Isso significa que quando mais e mais tocadores são produzidos, o custo médio por tocador se aproxima de \$100, mas é sempre um pouco maior que \$100. Uma vez que \$100 é o custo por tocador ($C(x) = \underline{100}x + 2000$), isso significa que o custo médio é sempre um pouco maior que o custo unitário, pois estamos distribuindo o custo fixo para cada tocador.

22. (a)



(b) A potência máxima é aproximadamente 1.603 mW o que corresponde a 3.9 k■.

(c) Quando $x \to \infty$, $P(x) \to 0^+$ o que significa que quando a resistência cresce sem limite, a potência diminui para zero.

16 Equações e Inequações Racionais

Nos exercícios 1 - 6, resolva a equação racional. Verifique as soluções encontradas.

1. $\dfrac{x}{5x+4} = 3$
2. $\dfrac{3x-1}{x^2+1} = 1$
3. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x^2-3}{x^2-9}$
4. $\dfrac{2x+17}{x+1} = x+5$
5. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-2x} = 1$
6. $\dfrac{-x^3+4x}{x^2-9} = 4x$

Nos exercícios 7 - 20, resolva a inequação racional. Expresse sua resposta usando a notação de intervalo.

7. $\dfrac{1}{x+2} \geq 0$
8. $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$
9. $\dfrac{x}{x^2-1} > 0$
10. $\dfrac{4x}{x^2+4} \geq 0$
11. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+x-6} > 0$
12. $\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-9} < 0$
13. $\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-x-2} \geq 0$
14. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1} > 0$
15. $\dfrac{3x-1}{x^2+1} \leq 1$
16. $\dfrac{2x+17}{x+1} > x+5$
17. $\dfrac{-x^3+4x}{x^2-9} \geq 4x$
18. $\dfrac{1}{x^2+1} < 0$
19. $\dfrac{x^4-4x^3+x^2-2x-15}{x^3-4x^2} \geq x$
20. $\dfrac{5x^3-12x^2+9x+10}{x^2-1} \geq 3x-1$

21. Carlos e Miguel iniciam uma corrida de três milhas ao mesmo tempo. Se Miguel corre a 6 milhas por hora e termina 10 minutos antes de Carlos, qual a velocidade de Carlos?

22. Uma andorinha voa três quartos de milha a favor do vento, que sopra a seis milhas por hora, faz a volta e retorna exatamente 4 minutos depois. Qual a velocidade da andorinha, descontando-se a velocidade do vento?

23. A fim de se remover a água de um porão, duas bombas que bombeiam a uma taxa de 40 galões por minuto são usadas. Após meia hora, uma bomba quebra e a outra continua funcionando por mais meia hora. Quantos galões de água foram removidos do porão?

24. Uma torneira pode encher um tanque em 5 minutos, enquanto um ralo esvazia o mesmo tanque em 8 minutos. Se a torneira e o ralo são abertos ao mesmo tempo com o tanque vazio, em quanto tempo o tanque encherá?

25. Trabalhando juntos, Daniel e Paulo podem limpar um estábulo em 45 minutos. Sozinho, Daniel pode limpar em uma hora. Em quanto tempo Paulo limparia o estábulo sozinho?

26. O custo para se fabricar consoles de jogos é dado pela função $C(x) = .03x^3 - 4.5x^2 + 225x + 250$, para $x \geq 0$. Use o GeoGebra para determinar o número de consoles que devem ser produzidos para se minimizar o custo médio $\overline{C}$.

27. Queremos fazer uma caixa de base quadrada e sem tampa com 500 centímetros cúbicos de volume. Modele a superfície lateral S em funcão do lado x da base e use o GeoGebra para estimar qual a superfície mínima possível.

28. Uma caixa de cereal deve ter 140 polegadas cúbicas. Por razões estéticas, a altura da caixa precisa ser 1.62 vezes maior que a base. Use o GeoGebra para estimar as dimensões da caixa que minimizam a área da superfície. Qual é a superfície mínima?

29. Sara é a vizinha de is Joãozinho do exercício 19 da Secão 10. Sara também quer plantar um jardim retangular ao lado de casa, mas ela não comprou o arame para cercar o jardim ainda. Como ela quer que o jardim tenha 100 pés quadrados, qual a menor quantidade de arame que ela precisa comprar? (Lembre que um dos lados do jardim fica colado à casa)

30. Outro problema clássico: queremos fazer uma lata de formato cilíndrico para conter 33.6 polegadas cúbicas.

    (a) Encontre uma expressão para o volume V da lata em termos da altura h e do raio da base r.

    (b) Encontre uma expressão para a área da superfície S da lata em termos da altura h e do raio da base$r$.

    (c) Usando o fato que $V = 33.6$, escreva S como uma função de r e indique o domínio implícito .

    (d) Use o GeoGebra para estimar as dimensões da lata que minimizam a superfície lateral.

31. Um balde cilíndrico deve conter 7.35 pés cúbicos de líquido. Use o GeoGebra para estimar as dimensões da lata que minimizam a área da superfície da lata. Qual a área mínima?

32. No exercício 71 da Seção 4, a população de mapinguaris do Amazonas foi modelada pela função $P(t) = \frac{150t}{t+15}$, onde $t = 0$ representa o ano de 1803. Quando existiram menos de 100 no Amazonas?

Nos exercícios 33 - 38, traduza o que segue em equações matemáticas.

33. Sob pressão constante, a temperatura T de um gás ideal é diretamente proporcional a seu volume V. (This is Lei de Charles)

34. A frequência f de uma onda é inversamente proporcional ao comprimento de onda λ.

35. A densidade d de um material é diretamente proporcional à massa do objeto m e inversamente proporcional a seu volume V.

36. O quadrado do período orbital P de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior a de sua órbita. (Essa é a Terceira Lei de Kepler do Movimento Planetário)

37. O arrasto D de um objeto movendo-se através de um fluido varia juntamente com a densidade ρ do fluido e com o quadrado da velocidade ν do objeto.

38. Suponha que duas cargas elétricas com cargas q e Q, são posicionadas a r unidades de distância. A força eletroestática F exercida entre as cargas varia diretamente com o produto das cargas e inversamente com o quadrado da distância entre elas. (Essa é a Lei de Coulomb)

39. De acordo com esta página da internet, a frequência f de uma corda vibrante é dada por $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ onde T é a tensão, μ é densidade de massa por unidade de comprimento e L é o comprimento da corda. Expresse essa relação usando a linguagem de variação.

40. O Índice de Massa Corporal B é diretamente proporcional ao peso W e inversamente proporcional ao quadrado da altura h.

    (a) Expresse essa relação como uma equação matemática.

    (b) Se uma pessoa que tem 5 pés e 10 polegadas de altura e pesa 235 libras tem Índice de Massa Corporal 33.7, qual é a o valor da constante de proporcionalidade?

    (c) Rescreva a equação matemática encontrada na parte 40a incluindo o valor da constante encontrada em 40b e então encontre o seu Índice de Massa Corporal.

41. Sabemos que a circunferência de um círculo varia diretamente com seu raio com 2π como constante de proporcionalidade (isto é, $C = 2\pi r$). Com a ajuda de seus colegas, liste outras relações geométricas que podem ser expressas na linguagem de variação.

RESPOSTAS

1. $x = -\frac{6}{7}$
2. $x = 1,\ x = 2$
3. $x = -1$
4. $x = -6,\ x = 2$
5. Nenhuma solução
6. $x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{2}$
7. $(-2, \infty)$
8. $(-2, 3]$
9. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
10. $[0, \infty)$
11. $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (4, \infty)$
12. $\left(-3, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, 3)$
13. $(-1, 0] \cup (2, \infty)$
14. $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (1, \infty)$
15. $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$
16. $(-\infty, -6) \cup (-1, 2)$
17. $(-\infty, -3) \cup \left[-2\sqrt{2}, 0\right] \cup \left[2\sqrt{2}, 3\right)$
18. Nenhuma solução
19. $[-3, 0) \cup (0, 4) \cup [5, \infty)$
20. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, \infty)$
21. 4.5 milhas por hora
22. 24 milhas por hora
23. 3600 galões
24. $\frac{40}{3} \approx 13.33$ minutos
25. 3 horas
26. O mínimo absoluto de $y = \overline{C}(x)$ ocorre em $\approx (75.73, 59.57)$. Como x representa o número de consoles, testamos $\overline{C}(75) \approx 59.58$ e $\overline{C}(76) \approx 59.57$. Logo, para minimizar o custo médio, 76 consoles devem ser produzidos a um custo de \$59.57 por console.
27. A largura e a profundidade devem ser de 10.00 centímetros e a altura, 5.00 centímetros. A área da superfície mínima é de 300.00 centímetros quadrados.
28. A largura deve ser de ≈ 4.12 polegadas, a altura, ≈ 6.67 polegadas e a profundidade, ≈ 5.09 polegadas; a área da superfície mínima é de ≈ 164.91 polegadas quadradas.
29. As dimensões são ≈ 7 por ≈ 14 pés; o mínimo de arame necessário é de ≈ 28 pés.
30. (a) $V = \pi r^2 h$
    (b) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
    (c) $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{67.2}{r}$, Domínio $r > 0$
    (d) $r \approx 1.749$ in. e $h \approx 3.498$ in.
31. O raio do balde deve ser de ≈ 1.05 pés e a altura, ≈ 2.12 pés. A área da superfície mínima é de ≈ 20.93 pés cúbicos.
32. $P(t) < 100$ em $(-15, 30)$, e a parte contida no domínio implícito é $[0, 30)$. Como $t = 0$ corresponde ao ano de 1803, de 1803 até o fim de 1832, existiam menos que 100 mapinguaris no Amazonas.
33. $T = kV$
34. [4] $f = \dfrac{k}{\lambda}$
35. $d = \dfrac{km}{V}$

[4] O símbolo λ é a letra grega minúscula ‘lambda.’

36. $P^2 = ka^3$

37.[5] $D = k\rho\nu^2$

38. $F = \dfrac{kqQ}{r^2}$

39. Reescrevendo $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ como $f = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{T}}{L\sqrt{\mu}}$ vemos que a frequência f varia diretamente com a raiz quadrada da tensão e inversamente com o comprimento e com a raiz quadrada da densidade de massa.

40. (a) $B = \dfrac{kW}{h^2}$ (b) $k = 702.68$ (c) $B = \dfrac{702.68W}{h^2}$

[5] Os símbolos ρ e ν são as letras gregas minúsculas 'rô' e 'ni,' respectivamente.

17 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Nos exercícios 1 - 12, use o par de funções dado para encontrar os seguintes valores, caso existam.

- $(g \circ f)(0)$
- $(f \circ g)(-1)$
- $(f \circ f)(2)$
- $(g \circ f)(-3)$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$
- $(f \circ f)(-2)$

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = 4 - x$, $g(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = 4 - 3x$, $g(x) = |x|$
4. $f(x) = |x - 1|$, $g(x) = x^2 - 5$
5. $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $g(x) = x^2 + 1$
7. $f(x) = 6 - x - x^2$, $g(x) = x\sqrt{x + 10}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$, $g(x) = 4x^2 - x$
9. $f(x) = \dfrac{3}{1 - x}$, $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x + 5}$, $g(x) = \dfrac{2}{7 - x^2}$
11. $f(x) = \dfrac{2x}{5 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{4x + 1}$
12. $f(x) = \sqrt{2x + 5}$, $g(x) = \dfrac{10x}{x^2 + 1}$

Nos exercícios 13 - 24, use o par de funções dado para encontrar expressões para as seguintes funções, simplificando quando possível. Determine ainda o domínio de cada função.

- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ f)(x)$

13. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 9$
14. $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = 3x - 5$
15. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = |x|$
16. $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = \sqrt{x}$
17. $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = \sqrt{x}$
18. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$
19. $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{4 - x}$
20. $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = \sqrt{x - 5}$
21. $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$
22. $f(x) = \dfrac{3x}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$
23. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$, $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$
24. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

Nos exercícios 25 - 30, use $f(x) = -2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = |x|$ para encontrar expressões para as seguintes funções, simplificando quando possível. Determine ainda o domínio de cada função.

25. $(h \circ g \circ f)(x)$
26. $(h \circ f \circ g)(x)$
27. $(g \circ f \circ h)(x)$
28. $(g \circ h \circ f)(x)$
29. $(f \circ h \circ g)(x)$
30. $(f \circ g \circ h)(x)$

Nos exercícios 31 - 40, escreva a função dada como a composição de duas ou mais funções distintas da função identidade. (Existem várias respostas!)

31. $p(x) = (2x+3)^3$
32. $P(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^5$
33. $h(x) = \sqrt{2x-1}$
34. $H(x) = |7 - 3x|$
35. $r(x) = \dfrac{2}{5x+1}$
36. $R(x) = \dfrac{7}{x^2-1}$
37. $q(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$
38. $Q(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^3-1}$
39. $v(x) = \dfrac{2x+1}{3-4x}$
40. $w(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$

41. Escreva a função $F(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+6}{x^3-9}}$ como uma composição de três ou mais funções distintas da identidade.

42. Sejam $g(x) = -x$, $h(x) = x + 2$, $j(x) = 3x$ e $k(x) = x - 4$. Em que ordem essas funções devem ser compostas com $f(x) = \sqrt{x}$ para criar $F(x) = 3\sqrt{-x+2} - 4$?

43. Que funções lineares podem ser usadas para transformar $f(x) = x^3$ em $F(x) = -\frac{1}{2}(2x - 7)^3 + 1$? Qual a ordem correta de composição?

Nos exercícios 44 - 55, seja f a função definida por

$$f = \{(-3,4), (-2,2), (-1,0), (0,1), (1,3), (2,4), (3,-1)\}$$

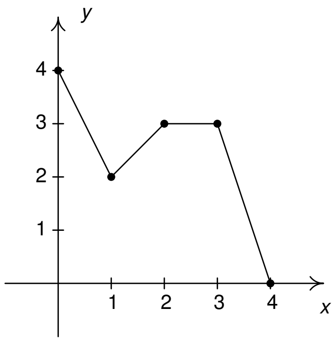
e g a função definida por

$$g = \{(-3,-2), (-2,0), (-1,-4), (0,0), (1,-3), (2,1), (3,2)\}.$$

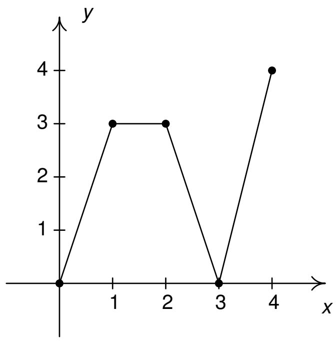
Encontre o valor indicado, caso exista.

44. $(f \circ g)(3)$
45. $f(g(-1))$
46. $(f \circ f)(0)$
47. $(f \circ g)(-3)$
48. $(g \circ f)(3)$
49. $g(f(-3))$
50. $(g \circ g)(-2)$
51. $(g \circ f)(-2)$
52. $g(f(g(0)))$
53. $f(f(f(-1)))$
54. $f(f(f(f(f(1)))))$
55. $(\underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ vezes}})(0)$

Nos exercícios 56 - 61, use os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ abaixo para encontrar o valor da função.



$y = f(x)$



$y = g(x)$

56. $(g \circ f)(1)$

57. $(f \circ g)(3)$

58. $(g \circ f)(2)$

59. $(f \circ g)(0)$

60. $(f \circ f)(1)$

61. $(g \circ g)(1)$

62. O volume V de um cubo é uma função do comprimento x do seu lado. Vamos supor que $x = t + 1$ é também uma função do tempo t. Encontre uma fórmula para V como uma função de t.

63. Suponha que um vendedor cobre \$2 por cachorro quente e que o número x de cachorros quentes vendido por hora seja dado por $x(t) = -4t^2 + 20t + 92$, onde t é o número de horas desde as 10 da manhã, $0 \leq t \leq 4$.

    (a) Encontre uma expressão para a receita por hora R como uma função de x.

    (b) Encontre e simplifique $(R \circ x)(t)$. O que isso representa?

    (c) Qual a receita por hora ao meio-dia?

RESPOSTAS

1. Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$,
   - $(g \circ f)(0) = 1$
   - $(g \circ f)(-3) = 19$
   - $(f \circ g)(-1) = 1$
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = 4$
   - $(f \circ f)(2) = 16$
   - $(f \circ f)(-2) = 16$

2. Para $f(x) = 4 - x$ e $g(x) = 1 - x^2$,
   - $(g \circ f)(0) = -15$
   - $(g \circ f)(-3) = -48$
   - $(f \circ g)(-1) = 4$
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$
   - $(f \circ f)(2) = 2$
   - $(f \circ f)(-2) = -2$

3. Para $f(x) = 4 - 3x$ e $g(x) = |x|$,
   - $(g \circ f)(0) = 4$
   - $(g \circ f)(-3) = 13$
   - $(f \circ g)(-1) = 1$
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$
   - $(f \circ f)(2) = 10$
   - $(f \circ f)(-2) = -26$

4. Para $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = x^2 - 5$,
   - $(g \circ f)(0) = -4$
   - $(g \circ f)(-3) = 11$
   - $(f \circ g)(-1) = 5$
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{4}$
   - $(f \circ f)(2) = 0$
   - $(f \circ f)(-2) = 2$

5. Para $f(x) = 4x + 5$ e $g(x) = \sqrt{x}$,
   - $(g \circ f)(0) = \sqrt{5}$
   - $(g \circ f)(-3)$ não é real
   - $(f \circ g)(-1)$ não é real
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = 5 + 2\sqrt{2}$
   - $(f \circ f)(2) = 57$
   - $(f \circ f)(-2) = -7$

6. Para $f(x) = \sqrt{3 - x}$ e $g(x) = x^2 + 1$,
   - $(g \circ f)(0) = 4$
   - $(g \circ f)(-3) = 7$
   - $(f \circ g)(-1) = 1$
   - $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$
   - $(f \circ f)(2) = \sqrt{2}$
   - $(f \circ f)(-2) = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

7. Para $f(x) = 6 - x - x^2$ e $g(x) = x\sqrt{x+10}$,

- $(g \circ f)(0) = 24$
- $(f \circ g)(-1) = 0$
- $(f \circ f)(2) = 6$
- $(g \circ f)(-3) = 0$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27-2\sqrt{42}}{8}$
- $(f \circ f)(-2) = -14$

8. Para $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ e $g(x) = 4x^2 - x$,

- $(g \circ f)(0) = 3$
- $(f \circ g)(-1) = \sqrt[3]{6}$
- $(f \circ f)(2) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}+1}$
- $(g \circ f)(-3) = 4\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$
- $(f \circ f)(-2) = 0$

9. Para $f(x) = \frac{3}{1-x}$ e $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$,

- $(g \circ f)(0) = \frac{6}{5}$
- $(f \circ g)(-1) = 1$
- $(f \circ f)(2) = \frac{3}{4}$
- $(g \circ f)(-3) = \frac{48}{25}$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = -5$
- $(f \circ f)(-2)$ é indefinido

10. Para $f(x) = \frac{x}{x+5}$ e $g(x) = \frac{2}{7-x^2}$,

- $(g \circ f)(0) = \frac{2}{7}$
- $(f \circ g)(-1) = \frac{1}{16}$
- $(f \circ f)(2) = \frac{2}{37}$
- $(g \circ f)(-3) = \frac{8}{19}$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{143}$
- $(f \circ f)(-2) = -\frac{2}{13}$

11. Para $f(x) = \frac{2x}{5-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{4x+1}$,

- $(g \circ f)(0) = 1$
- $(f \circ g)(-1)$ não é real
- $(f \circ f)(2) = -\frac{8}{11}$
- $(g \circ f)(-3) = \sqrt{7}$
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$
- $(f \circ f)(-2) = \frac{8}{11}$

12. Para $f(x) = \sqrt{2x+5}$ e $g(x) = \frac{10x}{x^2+1}$,

- $(g \circ f)(0) = \frac{5\sqrt{5}}{3}$
- $(f \circ g)(-1)$ não é real
- $(f \circ f)(2) = \sqrt{11}$
- $(g \circ f)(-3)$ não é real
- $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{13}$
- $(f \circ f)(-2) = \sqrt{7}$

13. Para $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 9$

- $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 15$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = 4x + 9$, domínio: $(-\infty, \infty)$

14. Para $f(x) = x^2 - x + 1$ e $g(x) = 3x - 5$

- $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 3x - 2$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 33x + 31$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$, domínio: $(-\infty, \infty)$

15. Para $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = |x|$

- $(g \circ f)(x) = |x^2 - 4|$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ g)(x) = |x|^2 - 4 = x^2 - 4$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, domínio: $(-\infty, \infty)$

16. Para $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = \sqrt{x}$

- $(g \circ f)(x) = \sqrt{3x - 5}$, domínio: $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$
- $(f \circ g)(x) = 3\sqrt{x} - 5$, domínio: $[0, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = 9x - 20$, domínio: $(-\infty, \infty)$

17. Para $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = \sqrt{x}$

- $(g \circ f)(x) = \sqrt{|x + 1|}$, domínio: $(-\infty, \infty)$
- $(f \circ g)(x) = |\sqrt{x} + 1| = \sqrt{x} + 1$, domínio: $[0, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = ||x + 1| + 1| = |x + 1| + 1$, domínio: $(-\infty, \infty)$

18. Para $f(x) = 3 - x^2$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$

- $(g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$, domínio: $[-2, 2]$
- $(f \circ g)(x) = 2 - x$, domínio: $[-1, \infty)$
- $(f \circ f)(x) = -x^4 + 6x^2 - 6$, domínio: $(-\infty, \infty)$

19. Para $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sqrt{4 - x}$

- $(g \circ f)(x) = \sqrt{4 - |x|}$, domínio: $[-4, 4]$
- $(f \circ g)(x) = |\sqrt{4 - x}| = \sqrt{4 - x}$, domínio: $(-\infty, 4]$
- $(f \circ f)(x) = ||x|| = |x|$, domínio: $(-\infty, \infty)$

20. Para $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x-5}$

    - $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$, domínio: $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$
    - $(f \circ g)(x) = x - 6 - \sqrt{x-5}$, domínio: $[5, \infty)$
    - $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, domínio: $(-\infty, \infty)$

21. Para $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x+3}$

    - $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x+2}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$
    - $(f \circ g)(x) = -\frac{x}{x+3}$, domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$
    - $(f \circ f)(x) = 9x - 4$, domínio: $(-\infty, \infty)$

22. Para $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ e $g(x) = \frac{x}{x-3}$

    - $(g \circ f)(x) = x$, domínio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
    - $(f \circ g)(x) = x$, domínio: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$
    - $(f \circ f)(x) = \frac{9x}{2x+1}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$

23. Para $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ e $g(x) = \frac{2x+1}{x}$

    - $(g \circ f)(x) = \frac{4x+1}{x}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \cup \left(0, \infty\right)$
    - $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{5x+2}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, \infty)$
    - $(f \circ f)(x) = \frac{x}{4x+1}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$

24. Para $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$

    - $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-4}{x^2-4}}$, domínio: $(-\infty, -2) \cup \left[1 - \sqrt{5}, 2\right) \cup \left[1 + \sqrt{5}, \infty\right)$
    - $(f \circ g)(x) = -\frac{2\sqrt{1-x}}{x+3}$, domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1]$
    - $(f \circ f)(x) = \frac{4x - x^3}{x^4 - 9x^2 + 16}$, domínio: $\left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left(-2, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right) \cup \left(2, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$

25. $(h \circ g \circ f)(x) = |\sqrt{-2x}| = \sqrt{-2x}$, domínio: $(-\infty, 0]$

26. $(h \circ f \circ g)(x) = |-2\sqrt{x}| = 2\sqrt{x}$, domínio: $[0, \infty)$

27. $(g \circ f \circ h)(x) = \sqrt{-2|x|}$, domínio: $\{0\}$

28. $(g \circ h \circ f)(x) = \sqrt{|-2x|} = \sqrt{2|x|}$, domínio: $(-\infty, \infty)$

29. $(f \circ h \circ g)(x) = -2|\sqrt{x}| = -2\sqrt{x}$, domínio: $[0, \infty)$

30. $(f \circ g \circ h)(x) = -2\sqrt{|x|}$, , domínio: $(-\infty, \infty)$

31. Sejam $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^3$, então $p(x) = (g \circ f)(x)$.

32. Sejam $f(x) = x^2 - x + 1$ e $g(x) = x^5$, $P(x) = (g \circ f)(x)$.

33. Sejam $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então $h(x) = (g \circ f)(x)$.

34. Sejam $f(x) = 7 - 3x$ e $g(x) = |x|$, então $H(x) = (g \circ f)(x)$.

35. Sejam $f(x) = 5x + 1$ e $g(x) = \frac{2}{x}$, então $r(x) = (g \circ f)(x)$.

36. Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \frac{7}{x}$, então $R(x) = (g \circ f)(x)$.

37. Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, então $q(x) = (g \circ f)(x)$.

38. Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, então $Q(x) = (g \circ f)(x)$.

39. Sejam $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{x+1}{3-2x}$, então $v(x) = (g \circ f)(x)$.

40. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, então $w(x) = (g \circ f)(x)$.

41. $F(x) = \sqrt{\frac{x^3+6}{x^3-9}} = h(g(f(x)))$ onde $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{x+6}{x-9}$ e $h(x) = \sqrt{x}$.

42. $F(x) = 3\sqrt{-x+2} - 4 = k(j(f(h(g(x)))))$

43. Uma possível solução é $F(x) = -\frac{1}{2}(2x-7)^3 + 1 = k(j(f(h(g(x)))))$ onde $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 7$, $j(x) = -\frac{1}{2}x$ e $k(x) = x + 1$. Outra solução é $F(x) = H(f(G(x)))$ onde $G(x) = 2x - 7$ e $H(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

44. $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 4$

45. $f(g(-1)) = f(-4)$ que é indefinido

46. $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = 3$

47. $(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-2) = 2$

48. $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-1) = -4$

49. $g(f(-3)) = g(4)$ que é indefinido

50. $(g \circ g)(-2) = g(g(-2)) = g(0) = 0$

51. $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(2) = 1$

52. $g(f(g(0))) = g(f(0)) = g(1) = -3$

53. $f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(1) = 3$

54. $f(f(f(f(f(1))))) = f(f(f(f(3)))) =$
$f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(1) = 3$

55. $(\underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ vezes}})(0) = 0$

56. $(g \circ f)(1) = 3$

57. $(f \circ g)(3) = 4$

58. $(g \circ f)(2) = 0$

59. $(f \circ g)(0) = 4$

60. $(f \circ f)(1) = 3$

61. $(g \circ g)(1) = 0$

62. $V(x) = x^3$ portanto $V(x(t)) = (t+1)^3$

63. (a) $R(x) = 2x$
    (b) $(R \circ x)(t) = -8t^2 + 40t + 184$, $0 \leq t \leq 4$. Isso é a receita por hora como função do tempo.
    (c) Meio-dia corresponde a $t = 2$, portanto $(R \circ x)(2) = 232$. A receita horária ao meio-dia é \$232 por hora.

18 Função Inversa

Nos exercícios 1 - 20, mostre que a função é injetiva e encontre a inversa. Verifique sua resposta algebricamente e graficamente com o GeoGebra. Verifique que a imagem de f é o domínio de f^{-1} e vice-versa.

1. $f(x) = 6x - 2$
2. $f(x) = 42 - x$
3. $f(x) = \dfrac{x-2}{3} + 4$
4. $f(x) = 1 - \dfrac{4+3x}{5}$
5. $f(x) = \sqrt{3x-1} + 5$
6. $f(x) = 2 - \sqrt{x-5}$
7. $f(x) = 3\sqrt{x-1} - 4$
8. $f(x) = 1 - 2\sqrt{2x+5}$
9. $f(x) = \sqrt[5]{3x-1}$
10. $f(x) = 3 - \sqrt[3]{x-2}$
11. $f(x) = x^2 - 10x,\ x \geq 5$
12. $f(x) = 3(x+4)^2 - 5,\ x \leq -4$
13. $f(x) = x^2 - 6x + 5,\ x \leq 3$
14. $f(x) = 4x^2 + 4x + 1,\ x < -1$
15. $f(x) = \dfrac{3}{4-x}$
16. $f(x) = \dfrac{x}{1-3x}$
17. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$
18. $f(x) = \dfrac{4x+2}{3x-6}$
19. $f(x) = \dfrac{-3x-2}{x+3}$
20. $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-1}$

Com a ajuda de seus colegas, encontre as inversas das funções dadas nos exercícios 21 - 24.

21. $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$
22. $f(x) = a\sqrt{x-h} + k,\ a \neq 0, x \geq h$
23. $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0,\ x \geq -\dfrac{b}{2a}$.
24. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, (ver exercício 32 abaixo.)
25. A função preço-demanda de um tocador de mp3 é dada como uma função das vendas semanais x de acordo com a $p(x) = 450 - 15x$ para $0 \leq x \leq 30$.
    (a) Encontre $p^{-1}(x)$ e determine seu domínio.
    (b) Encontre e interprete $p^{-1}(105)$.
    (c) O lucro da produção e venda de x tocadores por semana é $P(x) = -15x^2 + 350x - 2000$, para $0 \leq x \leq 30$. Encontre $\left(P \circ p^{-1}\right)(x)$ e determine que preço determina o lucro máximo. Qual é o lucro máximo? Quantos tocadores precisam ser produzidos e vendidos para se atingir o lucro máximo?
26. Mostre que a função de conversão de Fahrenheit para Celsius encontrada no exercício 35 da Seção 8 é inversível e que sua inversa é a função de conversão de Celsius para Fahrenheit.

27. Mostre analiticamente que a função $f(x) = x^3 + 3x + 1$ é injetiva. Como encontrar a inversa dessa função é difícil, use o fato que $y = f(x)$ se, e somente se, $x = f^{-1}(y)$ para calcular $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(5)$, e $f^{-1}(-3)$.

28. Com a ajuda de seus colegas, explique por que uma função que é estritamente crescente ou estritamente decrescente em seu domínio deve ser injetiva, logo inversível.

29. Se f é ímpar e inversível, prove que f^{-1} é também ímpar.

30. Sejam f e g funções inversíveis. Com a ajuda de seus colegas, mostre que $(f \circ g)$ é injetiva, logo inversível, e que $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

31. Que característica o gráfico de uma função f deve possuir para f seja sua própria inversa?

32. Que condições devemos impor aos valores de a, b, c e d no exercício 24 a fim de garantir que a função seja inversível?

RESPOSTAS

1. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{6}$
2. $f^{-1}(x) = 42 - x$
3. $f^{-1}(x) = 3x - 10$
4. $f^{-1}(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$
5. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-5)^2 + \frac{1}{3},\ x \geq 5$
6. $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 5,\ x \leq 2$
7. $f^{-1}(x) = \frac{1}{9}(x+4)^2 + 1,\ x \geq -4$
8. $f^{-1}(x) = \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{2},\ x \leq 1$
9. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{3}$
10. $f^{-1}(x) = -(x-3)^3 + 2$
11. $f^{-1}(x) = 5 + \sqrt{x+25}$
12. $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x+5}{3}} - 4$
13. $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+4}$
14. $f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x}+1}{2},\ x > 1$
15. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{x}$
16. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x+1}$
17. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+1}{2-3x}$
18. $f^{-1}(x) = \dfrac{6x+2}{3x-4}$
19. $f^{-1}(x) = \dfrac{-3x-2}{x+3}$
20. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{2x-1}$

25. (a) $p^{-1}(x) = \frac{450-x}{15}$. O domínio de p^{-1} é a imagem de p que é $[0, 450]$
    (b) $p^{-1}(105) = 23$. Isso significa que se o preço é posto em \$105 então 23 tocadores serão vendidos.
    (c) $\left(P \circ p^{-1}\right)(x) = -\frac{1}{15}x^2 + \frac{110}{3}x - 5000,\ 0 \leq x \leq 450$. O gráfico de $y = \left(P \circ p^{-1}\right)(x)$ é uma parábola voltada para baixo com vértice $\left(275, \frac{125}{3}\right) \approx (275, 41.67)$. Isso significa que o lucro máximo é \$41.67 quando o preço do tocador é posto em \$275. A este preço, podemos vender $p^{-1}(275) = 11.\overline{6}$ tocadores. Como não é possível vender parte do tocador, precisamos ajustar o preço de ou 11 ou 12 tocadores. Encontramos $p(11) = 285$ e $p(12) = 270$, o que significa que o preço por tocador é ou \$285 ou \$270, respectivamente. Os lucros a esses preços são $\left(P \circ p^{-1}\right)(285) = 35$ e $\left(P \circ p^{-1}\right)(270) = 40$, portanto o lucro máximo é de \$40 e ele ocorre quando de vende 12 tocadores por semana ao preço de \$270 tocadores.

27. Como $f(0) = 1$, temos que $f^{-1}(1) = 0$. Analogamente $f^{-1}(5) = 1$ e $f^{-1}(-3) = -1$

19 Funções Algébricas

Para cada função nos exercícios 1 - 10 abaixo

- Encontre o domínio.
- Estude o sinal.
- Use o GeoGebra para traçar o gráfico e identificar quaisquer assíntotas verticais ou horizontais, "inclinações atípicas" ou cúspides.

1. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
4. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$
5. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{16x}{x^2-9}}$
6. $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$
7. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-7)^{\frac{1}{3}}$
8. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x-7)^{\frac{1}{3}}$
9. $f(x) = \sqrt{x(x+5)(x-4)}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-6x-8}$

Nos exercícios 11 - 16, esboce o gráfico de $y = g(x)$ começando pelo gráfico de $y = f(x)$ e usando as transformações apresentadas na Section 7.

11. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1} - 2$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = -2\sqrt[3]{x+1} + 4$
13. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = \sqrt[4]{x-1} - 2$
14. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = 3\sqrt[4]{x-7} - 1$
15. $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = \sqrt[5]{x+2} + 3$
16. $f(x) = \sqrt[8]{x}$, $g(x) = \sqrt[8]{-x} - 2$

Nos exercícios 17 - 35, resolva a equação ou inequação.

17. $x+1 = \sqrt{3x+7}$
18. $2x+1 = \sqrt{3-3x}$
19. $x + \sqrt{3x+10} = -2$
20. $3x + \sqrt{6-9x} = 2$
21. $2x-1 = \sqrt{x+3}$
22. $x^{\frac{3}{2}} = 8$
23. $x^{\frac{2}{3}} = 4$
24. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} = 3$
25. $\sqrt{2x+1} = 3 + \sqrt{4-x}$
26. $5 - (4-2x)^{\frac{2}{3}} = 1$
27. $10 - \sqrt{x-2} \leq 11$
28. $\sqrt[3]{x} \leq x$
29. $2(x-2)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x(x-2)^{-\frac{4}{3}} \leq 0$
30. $-\frac{4}{3}(x-2)^{-\frac{4}{3}} + \frac{8}{9}x(x-2)^{-\frac{7}{3}} \geq 0$
31. $2x^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x-3)^{-\frac{2}{3}} \geq 0$
32. $\sqrt[3]{x^3+3x^2-6x-8} > x+1$
33. $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}}(x-3)^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}(x-3)^{\frac{1}{3}} < 0$
34. $x^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}(x-3)^{-\frac{5}{3}}(x^2-3x+2) \geq 0$
35. $\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{5}}(x-2)^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}(x+4)^{-\frac{2}{5}}(x-2)^{\frac{2}{3}} \geq 0$

36.

37. O volume V de um cone reto de base circular depende do raio r da base e da altura h e é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. A área S da superfície também depende de r e h de acordo com a fórmula $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Suponha que um cone deva ter um volume de 100 centímetros cúbicos.

    (a) Use a fórmula do volume para encontrar a altura h em função de r.
    (b) Use a fórmula da área de superfície e sua resposta para 37a para encontrar a área de superfície S em função de r.
    (c) Use o GeoGebra para encontrar os valores de r e h que minimizam a área de superfície. Qual é a área de superfície mínima? Arredonde suas respostas para duas casas decimais.

38. O Serviço Meteorológico Nacional usa a seguinte fórmula para calcular a sensação térmica:
$$W = 35.74 + 0.6215\, T_a - 35.75\, V^{0.16} + 0.4275\, T_a\, V^{0.16}$$
onde W é a sensação térmica em °F, T_a é a temperatura do ar em °F e V é a velocidade do vento em milhas por hora. Observe que W é definida apenas para temperaturas do ar iguais ou inferiores a 50°F e velocidades do vento acima de 3 milhas por hora.

    (a) Suponha que a temperatura do ar seja 42° e a velocidade do vento seja 7 milhas por hora. Encontre a sensação térmica. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.
    (b) Suponha que a temperatura do ar seja 37°F e a sensação térmica seja 30°F. Encontre a velocidade do vento. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

39. Como continuação do exercício 38, suponha que a temperatura do ar seja 28°F.

    (a) Use a fórmula do exercício 38 para encontrar uma expressão para a sensação térmica em função da velocidade do vento, $W(V)$.
    (b) Resolva $W(V) = 0$, arredonde sua resposta para duas casas decimais e interprete.
    (c) Faça um gráfico da função W usando o GeoGebra e verifique sua resposta na parte 39b.

40. O período de um pêndulo em segundos é dado por
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$
(para pequenos deslocamentos), onde L é o comprimento do pêndulo em metros e $g = 9,8$ metros por segundo por segundo é a aceleração da gravidade. Meu antigo relógio de pêndulo precisa que T seja igual a $\frac{1}{2}$ segundo e posso ajustar o comprimento do pêndulo por meio de um pequeno mostrador. Qual deve ser o comprimento do pêndulo?

41. O modelo de produção Cobb-Douglas afirma que o valor anual total em dólares da produção P em uma economia é uma função do trabalho x (o número total de horas trabalhadas em um ano) e do capital y (o total valor em dólares de todas as coisas compradas para fazer coisas). Especificamente, $P = ax^b y^{1-b}$. Ao fixar P, criamos o que é

conhecido como uma 'isoquanta' e podemos então resolver y como uma função de x. Vamos supor que o modelo de produção Cobb-Douglas para o país de Mapingarilândia seja $P = 1.23x^{0.4}y^{0.6}$.

(a) Seja $P = 300$ e resolva y em termos de x. Se $x = 100$, quanto é y?

(b) Faça um gráfico da isoquanta $300 = 1,23x^{0,4}y^{0,6}$. Que informações um par ordenado (x, y) que faz $P = 300$ fornece a você? Com a ajuda de seus colegas, encontre diversas combinações diferentes de trabalho e capital, todas rendendo $P = 300$. Discuta quaisquer padrões que você possa ver.

42. De acordo com a Teoria da Relatividade Especial de Einstein, a massa observada m de um objeto é uma função de quão rápido o objeto está viajando. Especificamente,

$$m(x) = \frac{m_r}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}}}$$

onde $m(0) = m_r$ é a massa do objeto em repouso, x é a velocidade do objeto e c é a velocidade da luz.

(a) Encontre o domínio implícito da função.

(b) Calcule $m(.1c)$, $m(.5c)$, $m(.9c)$ e $m(.999c)$.

(c) Quando $x \to c^-$, o que acontece com $m(x)$?

(d) Quão lentamente o objeto deve viajar para que a massa observada não seja maior que 100 vezes a sua massa em repouso?

43. Encontre a inversa de $k(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

44. Suponha que Fritzy, a Raposa, posicionada em um ponto (x, y) no primeiro quadrante, localize Chewbacca, o Coelho, em $(0, 0)$. Chewbacca começa a correr ao longo de uma cerca (o eixo y positivo) em direção ao seu viveiro. Fritzy, é claro, o persegue e ajusta constantemente sua direção para estar sempre correndo diretamente em direção a Chewbacca. Se a velocidade de Chewbacca for v_1 e a velocidade de Fritzy for v_2, o caminho que Fritzy seguirá para interceptar Chewbacca, supondo que v_2 é diretamente proporcional a v_1, mas não igual, é modelado por

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1+v_1/v_2}}{1+v_1/v_2} - \frac{x^{1-v_1/v_2}}{1-v_1/v_2}\right) + \frac{v_1 v_2}{v_2^2 - v_1^2}$$

   (a) Determine o caminho que Fritzy seguirá se correr exatamente duas vezes mais rápido que Chewbacca, isto é , se $v_2 = 2v_1$. Use o GeoGebra para representar graficamente esse caminho para $x \geq 0$. Qual é o significado da intersecão com o eixo y do gráfico?

   (b) Determine o caminho que Fritzy seguirá se Chewbacca correr exatamente duas vezes mais rápido que ele; isto é, $v_1 = 2v_2$. Use o GeoGebra para representar graficamente esse caminho para $x > 0$. Descreva o comportamento de y quando $x \to 0^+$ e interprete isso fisicamente.

   (c) Com a ajuda de seus colegas, generalize as partes (a) e (b) para dois casos: $v_2 > v_1$ e $v_2 < v_1$. O que acontece se $v_1 = v_2$?.

45.

46. Mostre que $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x$ para todo $x \geq 0$.

47. Mostre que $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional mostrando primeiro que ele é uma raiz de $p(x) = x^3 - 2$ e depois mostrando que p não tem raízes racionais. (Você precisará do Teorema das Raízes Racionais para mostrar esta última parte.)

48. Com a ajuda de seus colegas, generalize o exercício 47 para mostrar que $\sqrt[n]{c}$ é um número irracional para quaisquer números naturais $c \geq 2$ e $n \geq 2$, desde que $c \neq p^n$ para algum número natural p.

Respostas

1. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   Domínio: $[-1, 1]$

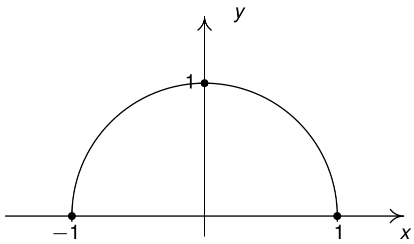
   0 (+) 0

   -1 1

   Sem assíntotas

   Inclinação atípica em $x = -1$ e $x = 1$

   Sem cúspides



2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   Domínio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

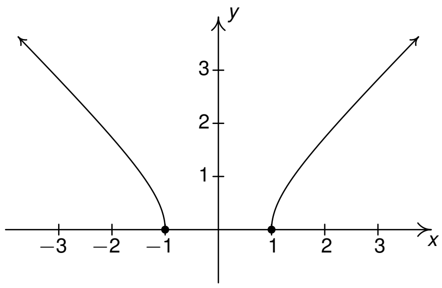
   (+) 0 0 (+)

   -1 1

   Sem assíntotas

   Inclinação atípica em $x = -1$ e $x = 1$

   Sem cúspides



3. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

   Domínio: $[-1, 1]$

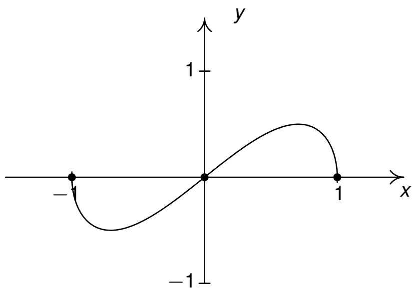
   0 $(-)$ 0 (+) 0

   -1 0 1

   Sem assíntotas

   Inclinação atípica em $x = -1$ e $x = 1$

   Sem cúspides



4. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

   Domínio: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

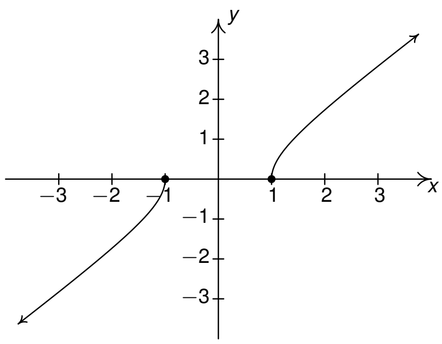
   $(-)$ 0 0 (+)

   -1 1

   Sem assíntotas

   Inclinação atípica em $x = -1$ e $x = 1$

   Sem cúspides



5. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{16x}{x^2 - 9}}$

Domínio: $(-3, 0] \cup (3, \infty)$

$\blacksquare$ (+) 0 $\quad$ $\blacksquare$ (+)

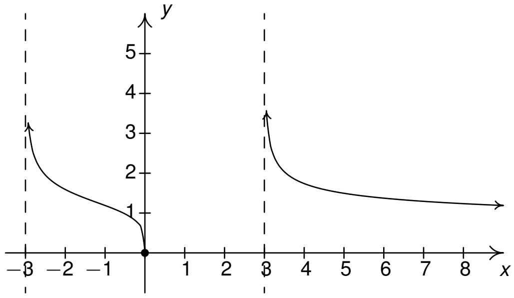
-3 $\quad$ 0 $\quad$ 3

Assíntotas verticais: $x = -3$ e $x = 3$

Assíntotas horizontais: $y = 0$

Inclinação atípica em $x = 0$

Sem cúspides



6. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 7)^{\frac{1}{3}}$

Domínio: $(-\infty, \infty)$

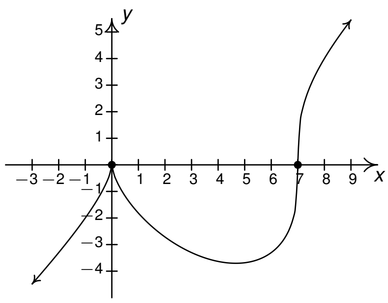
$(-)$ 0 $\quad$ $(-)$ $\quad$ 0 (+)

0 $\quad$ 7

Sem assíntotas verticais ou horizontais[6]

Inclinação atípica em $x = 7$

Cuspíde em $x = 0$



7. $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}$

Domínio: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

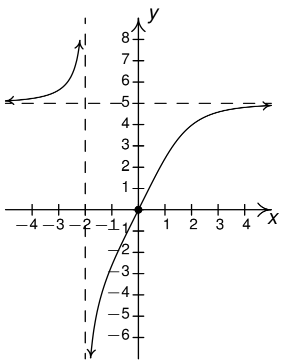
(+) $\blacksquare$ $(-)$ 0 (+)

-2 $\quad$ 0

Assíntota vertical $x = -2$

Assíntota horizontal $y = 5$

Sem inclinações atípicas ou cúspides



8. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x - 7)^{\frac{1}{3}}$

Domínio: $[0, \infty)$

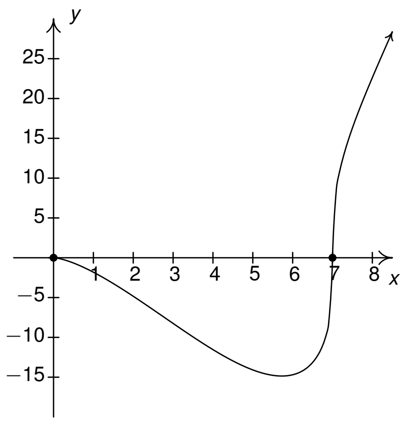
0 $\quad$ $(-)$ $\quad$ 0 (+)

0 $\quad$ 7

Sem assíntotas

Inclinação atípica em $x = 7$

Sem cúspides



9. $f(x) = \sqrt{x(x + 5)(x - 4)}$

Domínio: $[-5, 0] \cup [4, \infty)$

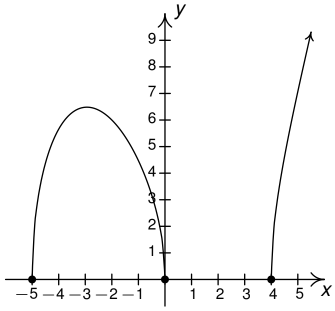
0 (+) 0 $\quad$ 0 (+)

-5 $\quad$ 0 $\quad$ 4

Sem assíntotas

[6]É possível mostrar usando cálculo que $y = x - \frac{7}{3}$ é uma assíntota oblíqua do gráfico.

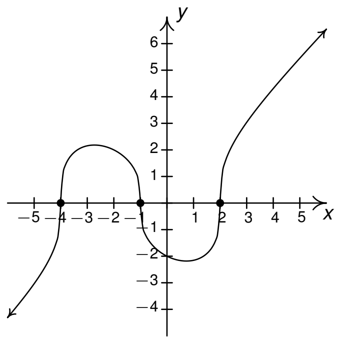
Inclinação atípica em $x = -5, x = 0$ e $x = 4$
Sem cúspides



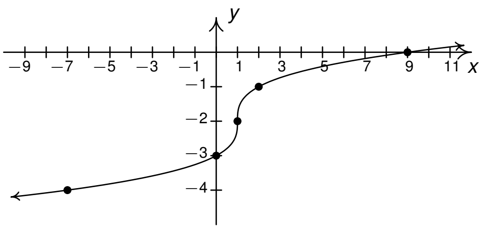
10. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$
Domínio: $(-\infty, \infty)$

$(-)$ 0 $(+)$ 0 $(-)$ 0 $(+)$
-4 -1 2

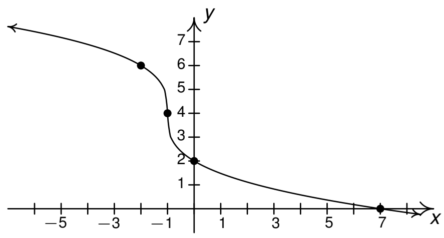
Sem assíntotas verticais ou horizontais[7]
Inclinação atípica em $x = -4, x = -1$ e $x = 2$
Sem cúspides



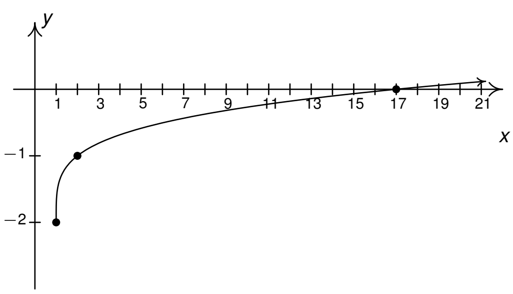
11. $g(x) = \sqrt[3]{x - 1} - 2$



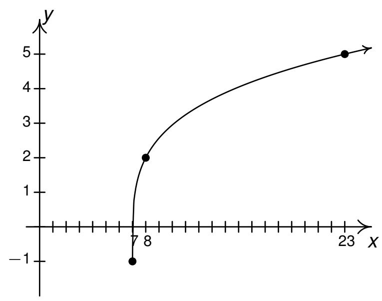
12. $g(x) = -2\sqrt[3]{x + 1} + 4$



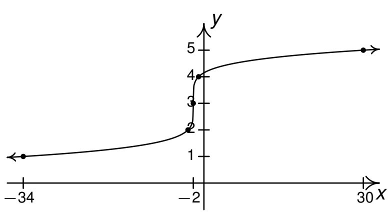
13. $g(x) = \sqrt[4]{x - 1} - 2$



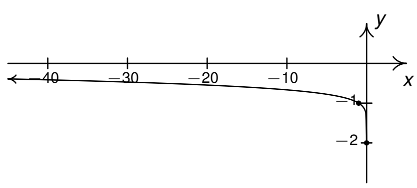
14. $g(x) = 3\sqrt[4]{x - 7} - 1$



15. $g(x) = \sqrt[5]{x + 2} + 3$



16. $g(x) = \sqrt[8]{-x} - 2$



[7] É possível mostrar usando cálculo que $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico.

17. $x = 3$

18. $x = \frac{1}{4}$

19. $x = -3$

20. $x = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

21. $x = \frac{5+\sqrt{57}}{8}$

22. $x = 4$

23. $x = \pm 8$

24. $x = 6$

25. $x = 4$

26. $x = -2, 6$

27. $[2, \infty)$

28. $[-1, 0] \cup [1, \infty)$

29. $(-\infty, 2) \cup (2, 3]$

30. $(2, 6]$

31. $(-\infty, 0) \cup [2, 3) \cup (3, \infty)$

32. $(-\infty, -1)$

33. $\left(0, \frac{27}{13}\right)$

34. $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

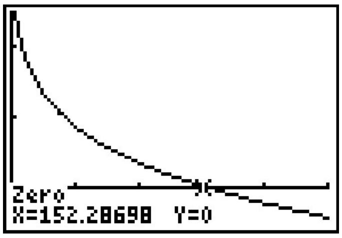
35. $(-\infty, -4) \cup \left(-4, -\frac{22}{19}\right] \cup (2, \infty)$

36. $C(x) = 15x + 20\sqrt{100 + (30 - x)^2}$, $0 \leq x \leq 30$. O GeoGebra fornece o mínimo absoluto em $\approx (18.66, 582.29)$. Isso significa que, para minimizar o custo, aproximadamente 30 quilômetros de cabo devem ser percorridos ao longo da Rota 117 antes de sair da estrada e seguir em direção ao posto avançado. O custo mínimo para passar o cabo é de aproximadamente \$582.29.

37. (a) $h(r) = \frac{300}{\pi r^2}$, $r > 0$.
    (b) $S(r) = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{300}{\pi r^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 90000}}{r}$, $r > 0$
    (c) O GeoGebra fornece o mínimo absoluto no ponto $\approx (4.07, 90.23)$. Isso significa que o raio deve ser (aproximadamente) 4.07 centímetros e a altura deve ser 5.76 centímetros para fornecer uma área de superfície mínima de 90.23 centímetros quadrados.

38. (a) $W \approx 37.55°$F.
    (b) $V \approx 9.84$ milhas por hora.

39. (a) $W(V) = 53.142 - 23.78V^{0.16}$. Como fomos informados no exercício 38 que a sensação térmica só tem efeito para velocidades de vento superiores a 3 milhas por hora, restringimos o domínio a $V > 3$.
    (b) $W(V) = 0$ quando $V \approx 152.29$. Isso significa que, de acordo com o modelo, para que a temperatura do vento seja de 0°F, a velocidade do vento precisa ser de 152.29 milhas por hora.
    (c) O gráfico está abaixo.



40. $9.8\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \approx 0.062$ metros ou 6.2 centímetros

41. (a) Primeiro reescreva o modelo como $P = 1.23x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$. Então $300 = 1.23x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ resulta $y = \left(\frac{300}{1.23x^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{5}{3}}$. Se $x = 100$ então $y \approx 441.93687$.

42. (a) $[0, c)$

(b)

$$m(.1c) = \frac{m_r}{\sqrt{.99}} \approx 1.005m_r \quad m(.5c) = \frac{m_r}{\sqrt{.75}} \approx 1.155m_r$$
$$m(.9c) = \frac{m_r}{\sqrt{.19}} \approx 2.294m_r \quad m(.999c) = \frac{m_r}{\sqrt{.0.001999}} \approx 22.366m_r$$

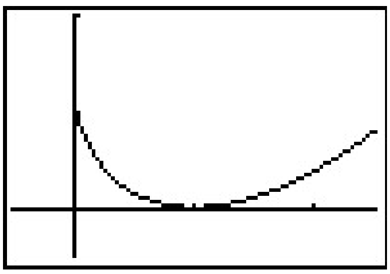
(c) Quando $x \to c^-$, $m(x) \to \infty$

(d) Se o objeto não estiver viajando mais rápido que aproximadamente 0.99995 vezes a velocidade da luz, então sua massa observada não será maior que $100m_r$.

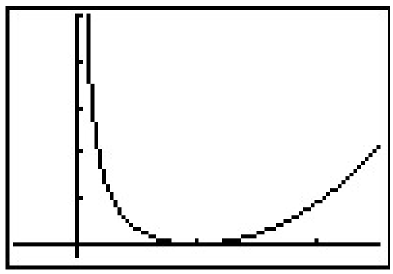
43. $k^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

44. (a) $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}$. O ponto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ é quando o caminho de Fritzy cruza o caminho de Chewbacca - em outras palavras, onde Fritzy pega Chewbacca.

(b) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} - \frac{2}{3}$. Quando $x \to 0^+$, $y \to \infty$ o que significa, neste caso, que a busca de Fritzy nunca termina; ele nunca pega Chewbacca. Isso faz sentido, já que Chewbacca tem uma vantagem inicial e está correndo mais rápido que Fritzy.



$y = \frac{1}{3}x^{3/2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}$



$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} - \frac{2}{3}$

20 Introdução às Funções Exponencial e Logaritmo

Nos Exercícios 1 - 15, use a propriedade: $b^a = c$ se e somente se $\log_b(c) = a$ para reescrever a equação dada no outra forma. Ou seja, reescreva as equações exponenciais como equações logarítmicas e reescreva as equações logarítmicas como equações exponenciais.

1. $2^3 = 8$
2. $5^{-3} = \frac{1}{125}$
3. $4^{5/2} = 32$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
5. $\left(\frac{4}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{2}$
6. $10^{-3} = 0.001$
7. $e^0 = 1$
8. $\log_5(25) = 2$
9. $\log_{25}(5) = \frac{1}{2}$
10. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$
11. $\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}\right) = -1$
12. $\log(100) = 2$
13. $\log(0.1) = -1$
14. $\ln(e) = 1$
15. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$

Nos Exercícios 16 - 42, avalie a expressão.

16. $\log_3(27)$
17. $\log_6(216)$
18. $\log_2(32)$
19. $\log_6\left(\frac{1}{36}\right)$
20. $\log_8(4)$
21. $\log_{36}(216)$
22. $\log_{\frac{1}{5}}(625)$
23. $\log_{\frac{1}{6}}(216)$
24. $\log_{36}(36)$
25. $\log\left(\frac{1}{1000000}\right)$
26. $\log(0.01)$
27. $\ln\left(e^3\right)$
28. $\log_4(8)$
29. $\log_6(1)$
30. $\log_{13}\left(\sqrt{13}\right)$
31. $\log_{36}\left(\sqrt[4]{36}\right)$
32. $7^{\log_7(3)}$
33. $36^{\log_{36}(216)}$
34. $\log_{36}\left(36^{216}\right)$
35. $\ln\left(e^5\right)$
36. $\log\left(\sqrt[9]{10^{11}}\right)$
37. $\log\left(\sqrt[3]{10^5}\right)$
38. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
39. $\log_5\left(3^{\log_3(5)}\right)$
40. $\log\left(e^{\ln(100)}\right)$
41. $\log_2\left(3^{-\log_3(2)}\right)$
42. $\ln\left(42^{6\log(1)}\right)$

Nos Exercícios 43 - 57, encontre o domínio da função.

43. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
44. $f(x) = \log_7(4x + 8)$
45. $f(x) = \ln(4x - 20)$
46. $f(x) = \log\left(x^2 + 9x + 18\right)$
47. $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$
48. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2+9x+18}{4x-20}\right)$
49. $f(x) = \ln(7 - x) + \ln(x - 4)$
50. $f(x) = \ln(4x - 20) + \ln\left(x^2 + 9x + 18\right)$
51. $f(x) = \log\left(x^2 + x + 1\right)$
52. $f(x) = \sqrt[4]{\log_4(x)}$

53. $f(x) = \log_9(|x + 3| - 4)$

54. $f(x) = \ln(\sqrt{x - 4} - 3)$

55. $f(x) = \dfrac{1}{3 - \log_5(x)}$

56. $f(x) = \dfrac{\sqrt{-1 - x}}{\log_{\frac{1}{2}}(x)}$

57. $f(x) = \ln(-2x^3 - x^2 + 13x - 6)$

Nos Exercícios 58 - 63, esboce o gráfico de $y = g(x)$ começando com o gráfico de $y = f(x)$ e usando transformações. Acompanhe pelo menos três pontos de sua escolha e a assíntota horizontal através das transformações. Indique o domínio e a imagem de g.

58. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x - 1$

59. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

60. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{-x} + 2$

61. $f(x) = 10^x$, $g(x) = 10^{\frac{x+1}{2}} - 20$

62. $f(x) = e^x$, $g(x) = 8 - e^{-x}$

63. $f(x) = e^x$, $g(x) = 10e^{-0.1x}$

Nos Exercícios 64 - 69, esboce o gráfico de $y = g(x)$ começando com o gráfico de $y = f(x)$ e usando transformações. Acompanhe pelo menos três pontos de sua escolha e a assíntota vertical através das transformações. Indique o domínio e a imagem de g.

64. $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \log_2(x + 1)$

65. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) + 1$

66. $f(x) = \log_3(x)$, $g(x) = -\log_3(x - 2)$

67. $f(x) = \log(x)$, $g(x) = 2\log(x + 20) - 1$

68. $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -\ln(8 - x)$

69. $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -10\ln\left(\frac{x}{10}\right)$

70. Verifique se cada função nos Exercícios 64 - 69 é o inverso da função correspondente nos Exercícios 58 - 63. (Combine #58 e #64 e assim por diante.)

Nos Exercícios 71 - 74, encontre a inversa da função a partir da “perspectiva procedural” e represente graficamente a função e sua inversa no mesmo conjunto de eixos.

71. $f(x) = 3^{x+2} - 4$

72. $f(x) = \log_4(x - 1)$

73. $f(x) = -2^{-x} + 1$

74. $f(x) = 5\log(x) - 2$

(Escalas Logarítmicas) Nos Exercícios 75 - 77, introduzimos três escalas de medição amplamente utilizadas que envolvem logaritmos comuns: a escala Richter, a escala de decibéis e a escala de pH. Os cálculos envolvidos em todas as três escalas são quase idênticos, por isso preste atenção às diferenças sutis.

75. Os terremotos são eventos complicados e não é nossa intenção fornecer uma discussão completa da ciência envolvida neles. Em vez disso, encaminhamos o leitor interessado para um curso sólido em Geologia[8] ou o Programa de Riscos de Terremotos do Serviço Geológico dos EUA encontrado em aqui e apresente apenas uma versão simplificada da escala Richter. A escala Richter mede a magnitude de um terremoto comparando a amplitude das ondas sísmicas de um determinado terremoto com aquelas de um "evento de magnitude 0", que foi escolhido para ser uma leitura sismográfica de 0.001 milímetros registrada em um sismômetro 100 quilômetros do epicentro do terremoto. Especificamente, a magnitude de um terremoto é dada por

$$M(x) = \log\left(\frac{x}{0.001}\right)$$

onde x é a leitura do sismógrafo em milímetros do terremoto registrado 100 quilômetros do epicentro.

    (a) Mostre que $M(0.001) = 0$.
    (b) Calcular $M(80,000)$.
    (c) Mostre que um terremoto que registrou 6.7 na escala Richter teve uma leitura sismográfica dez vezes maior do que um terremoto que mediu 5.7.
    (d) Encontre duas notícias sobre terremotos recentes que apresentam suas magnitudes na escala Richter. Quantas vezes maior foi a leitura do sismógrafo do terremoto de maior magnitude?

76. Embora a escala de decibéis possa ser usada em muitas disciplinas,[9] restringiremos nossa atenção ao seu uso em acústica, especificamente na medição do nível de intensidade do som. O nível de intensidade sonora L (medido em decibéis) de uma intensidade sonora I (medido em watts por metro quadrado) é dado por

$$L(I) = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Assim como a escala Richter, esta escala compara I com uma linha de base: $10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ é o limiar da audição humana.

    (a) Calcular $L(10^{-6})$.
    (b) Os danos à sua audição podem começar com uma exposição de curto prazo a níveis sonoros em torno de 115 decibéis. Que intensidade I é necessária para produzir este nível?
    (c) Calcula $L(1)$. Como isso se compara ao limiar da dor que gira em torno de 140 decibéis?

[8] sólido como uma rocha, talvez?
[9] Veja esta webpage para obter mais informações.

77. O pH de uma solução é uma medida de sua acidez ou alcalinidade. Especificamente, pH = $-\log[H^+]$ onde $[H^+]$ é a concentração de íons de hidrogênio em moles por litro. Uma solução com pH inferior a 7 é um ácido, uma com pH superior a 7 é uma base (alcalina) e um pH de 7 é considerado neutro.

    (a) A concentração de íons de hidrogênio da água pura é $[H^+] = 10^{-7}$. Encontre seu pH.

    (b) Encontre o pH de uma solução com $[H^+] = 6.3 \times 10^{-13}$.

    (c) O pH do ácido gástrico (o ácido do estômago) é de cerca de 0.7. Qual é a concentração de íons de hidrogênio correspondente?

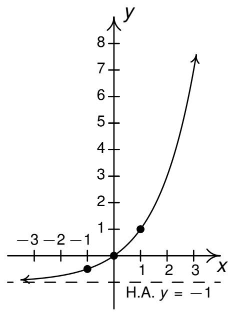
78. Mostre que $\log_b 1 = 0$ e $\log_b b = 1$ para cada $b > 0$, $b \neq 1$.

79. (Pergunta bônus maluca) Sem usar sua calculadora, determine qual é maior: e^π ou π^e.

RESPOSTAS

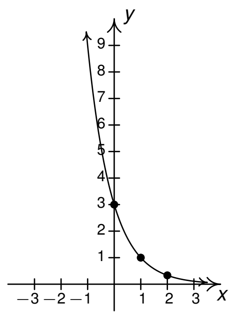
1. $\log_2(8) = 3$
2. $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$
3. $\log_4(32) = \frac{5}{2}$
4. $\log_{\frac{1}{3}}(9) = -2$
5. $\log_{\frac{4}{25}}\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
6. $\log(0.001) = -3$
7. $\ln(1) = 0$
8. $5^2 = 25$
9. $(25)^{\frac{1}{2}} = 5$
10. $3^{-4} = \frac{1}{81}$
11. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$
12. $10^2 = 100$
13. $10^{-1} = 0.1$
14. $e^1 = e$
15. $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
16. $\log_3(27) = 3$
17. $\log_6(216) = 3$
18. $\log_2(32) = 5$
19. $\log_6\left(\frac{1}{36}\right) = -2$
20. $\log_8(4) = \frac{2}{3}$
21. $\log_{36}(216) = \frac{3}{2}$
22. $\log_{\frac{1}{5}}(625) = -4$
23. $\log_{\frac{1}{6}}(216) = -3$
24. $\log_{36}(36) = 1$
25. $\log\frac{1}{1000000} = -6$
26. $\log(0.01) = -2$
27. $\ln\left(e^3\right) = 3$
28. $\log_4(8) = \frac{3}{2}$
29. $\log_6(1) = 0$
30. $\log_{13}\left(\sqrt{13}\right) = \frac{1}{2}$
31. $\log_{36}\left(\sqrt[4]{36}\right) = \frac{1}{4}$
32. $7^{\log_7(3)} = 3$
33. $36^{\log_{36}(216)} = 216$
34. $\log_{36}\left(36^{216}\right) = 216$
35. $\ln(e^5) = 5$
36. $\log\left(\sqrt[9]{10^{11}}\right) = \frac{11}{9}$
37. $\log\left(\sqrt[3]{10^5}\right) = \frac{5}{3}$
38. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$
39. $\log_5\left(3^{\log_3 5}\right) = 1$
40. $\log\left(e^{\ln(100)}\right) = 2$
41. $\log_2\left(3^{-\log_3(2)}\right) = -1$
42. $\ln\left(42^{6\log(1)}\right) = 0$
43. $(-\infty, \infty)$
44. $(-2, \infty)$
45. $(5, \infty)$
46. $(-\infty, -6) \cup (-3, \infty)$
47. $(-2, -1) \cup (1, \infty)$
48. $(-6, -3) \cup (5, \infty)$
49. $(4, 7)$
50. $(5, \infty)$
51. $(-\infty, \infty)$
52. $[1, \infty)$
53. $(-\infty, -7) \cup (1, \infty)$
54. $(13, \infty)$
55. $(0, 125) \cup (125, \infty)$
56. Domínio vazio
57. $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

58. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(-1, \infty)$



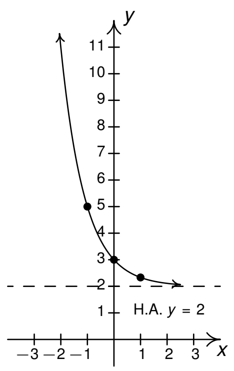
$y = g(x) = 2^x - 1$

59. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(0, \infty)$



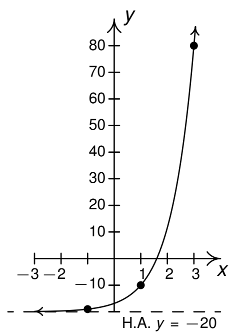
$y = g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

60. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(2, \infty)$



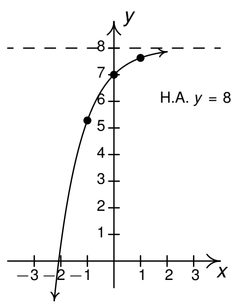
$y = g(x) = 3^{-x} + 2$

61. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(-20, \infty)$



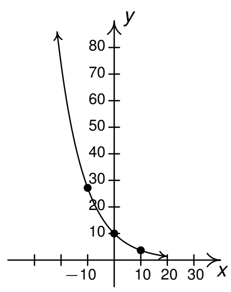
$y = g(x) = 10^{\frac{x+1}{2}} - 20$

62. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, 8)$



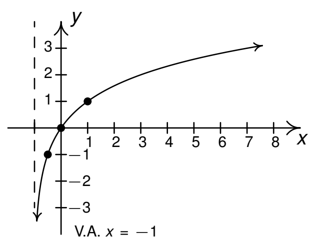
$y = g(x) = 8 - e^{-x}$

63. Domínio de g: $(-\infty, \infty)$
Imagem de g: $(0, \infty)$



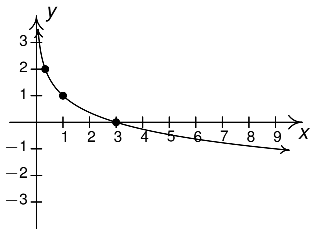
$y = g(x) = 10e^{-0.1x}$

64. Domínio de g: $(-1, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, \infty)$



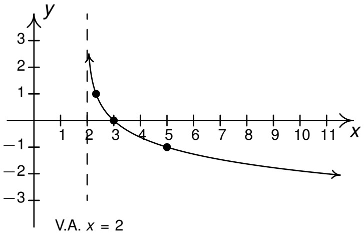
$y = g(x) = \log_2(x + 1)$

65. Domínio de g: $(0, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, \infty)$



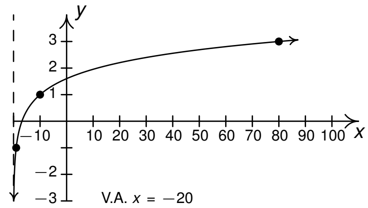
$y = g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) + 1$

66. Domínio de g: $(2, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, \infty)$



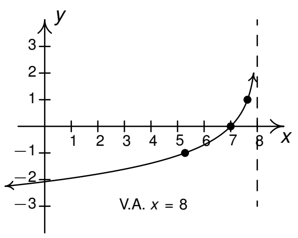
$y = g(x) = -\log_3(x - 2)$

67. Domínio de g: $(-20, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, \infty)$



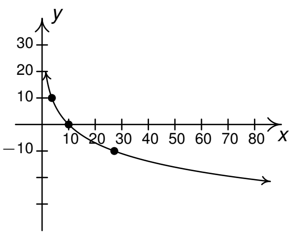
$y = g(x) = 2\log(x + 20) - 1$

68. Domínio de g: $(-\infty, 8)$
Imagem de g:$(-\infty, \infty)$



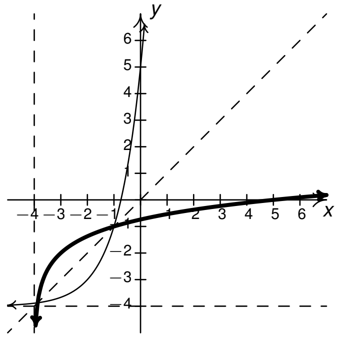
$y = g(x) = -\ln(8 - x)$

69. Domínio de g: $(0, \infty)$
Imagem de g: $(-\infty, \infty)$



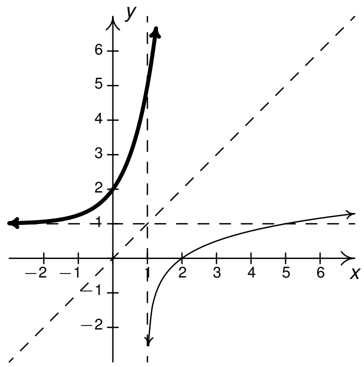
$y = g(x) = -10\ln\left(\frac{x}{10}\right)$

71. $f(x) = 3^{x+2} - 4$
$f^{-1}(x) = \log_3(x+4) - 2$



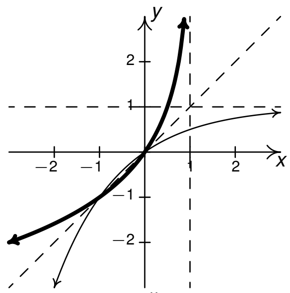
$y = f(x) = 3^{x+2} - 4$
$y = f^{-1}(x) = \log_3(x+4) - 2$

72. $f(x) = \log_4(x-1)$
$f^{-1}(x) = 4^x + 1$



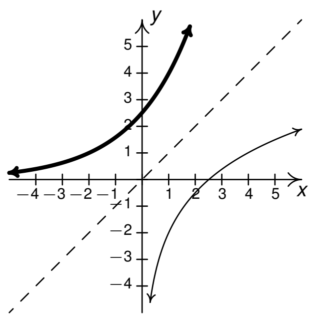
$y = f(x) = \log_4(x-1)$
$y = f^{-1}(x) = 4^x + 1$

73. $f(x) = -2^{-x} + 1$
$f^{-1}(x) = -\log_2(1-x)$



$y = f(x) = -2^{-x} + 1$
$y = f^{-1}(x) = -\log_2(1-x)$

74. $f(x) = 5\log(x) - 2$
$f^{-1}(x) = 10^{\frac{x+2}{5}}$



$y = f(x) = 5\log(x) - 2$
$y = f^{-1}(x) = 10^{\frac{x+2}{5}}$

75. (a) $M(0.001) = \log\left(\frac{0.001}{0.001}\right) = \log(1) = 0$.
    (b) $M(80,000) = \log\left(\frac{80,000}{0.001}\right) = \log(80,000,000) \approx 7.9$.

76. (a) $L(10^{-6}) = 60$ decibéis.
    (b) $I = 10^{-.5} \approx 0.316$ watts por metro quadrado.
    (c) Como $L(1) = 120$ decibéis e $L(100) = 140$ decibéis, um som com nível de intensidade de 140 decibéis tem uma intensidade 100 vezes maior que um som com nível de intensidade de 120 decibéis.

77. (a) O pH da água pura é 7.
    (b) Se $[H^+] = 6.3 \times 10^{-13}$ então a solução tem um pH de 12.2.
    (c) $[H^+] = 10^{-0.7} \approx 0.1995$ moles por litro.

21 PROPRIEDADES DO LOGARITMO

Nos Exercícios 1 - 15, expanda o logaritmo dado e simplifique. Suponha, quando necessário, que todas as quantidades representam números reais positivos.

1. $\ln(x^3y^2)$
2. $\log_2\left(\dfrac{128}{x^2+4}\right)$
3. $\log_5\left(\dfrac{z}{25}\right)^3$
4. $\log(1.23\times 10^{37})$
5. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{z}}{xy}\right)$
6. $\log_5\left(x^2-25\right)$
7. $\log_{\sqrt{2}}\left(4x^3\right)$
8. $\log_{\frac{1}{3}}(9x(y^3-8))$
9. $\log\left(1000x^3y^5\right)$
10. $\log_3\left(\dfrac{x^2}{81y^4}\right)$
11. $\ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{xy}{ez}}\right)$
12. $\log_6\left(\dfrac{216}{x^3y}\right)^4$
13. $\log\left(\dfrac{100x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{10}}\right)$
14. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{4\sqrt[3]{x^2}}{y\sqrt{z}}\right)$
15. $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{10\sqrt{yz}}\right)$

Nos Exercícios 16 - 29, use as propriedades dos logaritmos para escrever a expressão como um único logaritmo.

16. $4\ln(x)+2\ln(y)$
17. $\log_2(x)+\log_2(y)-\log_2(z)$
18. $\log_3(x)-2\log_3(y)$
19. $\frac{1}{2}\log_3(x)-2\log_3(y)-\log_3(z)$
20. $2\ln(x)-3\ln(y)-4\ln(z)$
21. $\log(x)-\frac{1}{3}\log(z)+\frac{1}{2}\log(y)$
22. $-\frac{1}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\ln(y)+\frac{1}{3}\ln(z)$
23. $\log_5(x)-3$
24. $3-\log(x)$
25. $\log_7(x)+\log_7(x-3)-2$
26. $\ln(x)+\frac{1}{2}$
27. $\log_2(x)+\log_4(x)$
28. $\log_2(x)+\log_4(x-1)$
29. $\log_2(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

Nos Exercícios 30 - 33, use a fórmula de mudança de base apropriada para converter a expressão dada em uma expressão com a base indicada.

30. 7^{x-1} para base e

31. $\log_3(x+2)$ para base 10

32. $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ para base e

33. $\log(x^2+1)$ para base e

Nos Exercícios 34 - 39, use a fórmula de mudança de base apropriada para aproximar o logaritmo.

34. $\log_3(12)$

35. $\log_5(80)$

36. $\log_6(72)$

37. $\log_4\left(\frac{1}{10}\right)$

38. $\log_{\frac{3}{5}}(1000)$

39. $\log_{\frac{2}{3}}(50)$

40. Compare e contraste os gráficos de $y = \ln(x^2)$ e $y = 2\ln(x)$.

41. Prove a regra do quociente e a regra da potência para logaritmos.

42. Dê exemplos numéricos para mostrar que, em geral,

    (a) $\log_b(x+y) \neq \log_b(x) + \log_b(y)$

    (b) $\log_b(x-y) \neq \log_b(x) - \log_b(y)$

    (c) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

43. A equação de Henderson-Hasselbalch: Suponha que HA represente um ácido fraco. Então temos uma reação química reversível

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-.$$

A constante de dissociação ácida, K_a, é dada por

$$K_\alpha = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = [H^+]\frac{[A^-]}{[HA]},$$

onde os colchetes denotam as concentrações exatamente como fizemos no Exercício 77 na Seção 20. O símbolo pK_a é definido de forma semelhante ao pH em que $pK_a = -\log(K_a)$. Usando a definição de pH do Exercício 77 e as propriedades dos logaritmos, derive a Equação de Henderson-Hasselbalch que afirma

$$\text{pH} = pK_a + \log\frac{[A^-]}{[HA]}$$

44. Pesquise a história dos logaritmos, incluindo a origem da própria palavra "logaritmo".

45. Há uma cena no filme "Apollo 13" em que várias pessoas no Controle da Missão usam réguas de cálculo para verificar um cálculo. Essa cena foi precisa? Procure outras referências da cultura pop a logaritmos e réguas de cálculo.

RESULTADOS

1. $3\ln(x) + 2\ln(y)$
2. $7 - \log_2(x^2 + 4)$
3. $3\log_5(z) - 6$
4. $\log(1.23) + 37$
5. $\frac{1}{2}\ln(z) - \ln(x) - \ln(y)$
6. $\log_5(x - 5) + \log_5(x + 5)$
7. $3\log_{\sqrt{2}}(x) + 4$
8. $-2 + \log_{\frac{1}{3}}(x) + \log_{\frac{1}{3}}(y - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(y^2 + 2y + 4)$
9. $3 + 3\log(x) + 5\log(y)$
10. $2\log_3(x) - 4 - 4\log_3(y)$
11. $\frac{1}{4}\ln(x) + \frac{1}{4}\ln(y) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln(z)$
12. $12 - 12\log_6(x) - 4\log_6(y)$
13. $\frac{5}{3} + \log(x) + \frac{1}{2}\log(y)$
14. $-2 + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}(x) - \log_{\frac{1}{2}}(y) - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(z)$
15. $\frac{1}{3}\ln(x) - \ln(10) - \frac{1}{2}\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(z)$
16. $\ln(x^4 y^2)$
17. $\log_2\left(\frac{xy}{z}\right)$
18. $\log_3\left(\frac{x}{y^2}\right)$
19. $\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{y^2 z}\right)$
20. $\ln\left(\frac{x^2}{y^3 z^4}\right)$
21. $\log\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}\right)$
22. $\ln\left(\sqrt[3]{\frac{z}{xy}}\right)$
23. $\log_5\left(\frac{x}{125}\right)$
24. $\log\left(\frac{1000}{x}\right)$
25. $\log_7\left(\frac{x(x-3)}{49}\right)$
26. $\ln\left(x\sqrt{e}\right)$
27. $\log_2\left(x^{3/2}\right)$
28. $\log_2\left(x\sqrt{x - 1}\right)$
29. $\log_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$
30. $7^{x-1} = e^{(x-1)\ln(7)}$
31. $\log_3(x + 2) = \frac{\log(x+2)}{\log(3)}$
32. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = e^{x\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
33. $\log(x^2 + 1) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(10)}$
34. $\log_3(12) \approx 2.26186$
35. $\log_5(80) \approx 2.72271$
36. $\log_6(72) \approx 2.38685$
37. $\log_4\left(\frac{1}{10}\right) \approx -1.66096$
38. $\log_{\frac{3}{5}}(1000) \approx -13.52273$
39. $\log_{\frac{2}{3}}(50) \approx -9.64824$

22 Equações e Inequações Exponenciais

Nos Exercícios 1 - 33, resolva a equação analiticamente.

1. $2^{4x} = 8$
2. $3^{(x-1)} = 27$
3. $5^{2x-1} = 125$
4. $4^{2x} = \frac{1}{2}$
5. $8^x = \frac{1}{128}$
6. $2^{(x^3-x)} = 1$
7. $3^{7x} = 81^{4-2x}$
8. $9 \cdot 3^{7x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x}$
9. $3^{2x} = 5$
10. $5^{-x} = 2$
11. $5^x = -2$
12. $3^{(x-1)} = 29$
13. $(1.005)^{12x} = 3$
14. $e^{-5730k} = \frac{1}{2}$
15. $2000e^{0.1t} = 4000$
16. $500\left(1 - e^{2x}\right) = 250$
17. $70 + 90e^{-0.1t} = 75$
18. $30 - 6e^{-0.1x} = 20$
19. $\dfrac{100e^x}{e^x + 2} = 50$
20. $\dfrac{5000}{1 + 2e^{-3t}} = 2500$
21. $\dfrac{150}{1 + 29e^{-0.8t}} = 75$
22. $25\left(\frac{4}{5}\right)^x = 10$
23. $e^{2x} = 2e^x$
24. $7e^{2x} = 28e^{-6x}$
25. $3^{(x-1)} = 2^x$
26. $3^{(x-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+5)}$
27. $7^{3+7x} = 3^{4-2x}$
28. $e^{2x} - 3e^x - 10 = 0$
29. $e^{2x} = e^x + 6$
30. $4^x + 2^x = 12$
31. $e^x - 3e^{-x} = 2$
32. $e^x + 15e^{-x} = 8$
33. $3^x + 25 \cdot 3^{-x} = 10$

Nos Exercícios 34 - 39, resolva a inequação analiticamente.

34. $e^x > 53$
35. $1000\,(1.005)^{12t} \geq 3000$
36. $2^{(x^3-x)} < 1$
37. $25\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq 10$
38. $\dfrac{150}{1 + 29e^{-0.8t}} \leq 130$
39. $70 + 90e^{-0.1t} \leq 75$

Nos Exercícios 40 - 45, use o GeoGebra para ajudá-lo a resolver a equação ou inequação.

40. $2^x = x^2$
41. $e^x = \ln(x) + 5$
42. $e^{\sqrt{x}} = x + 1$
43. $e^{-x} - xe^{-x} \geq 0$
44. $3^{(x-1)} < 2^x$
45. $e^x < x^3 - x$
46. Como $f(x) = \ln(x)$ é uma função estritamente crescente, se $0 < a < b$ então $\ln(a) < \ln(b)$. Use este fato para resolver a desigualdade $e^{(3x-1)} > 6$ sem um diagrama de sinais. Utilize esta técnica para resolver as inequações nos Exercícios 34 - 39. (NOTA: Isole a função exponencial primeiro!)
47. Calcule a inversa de $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Indique o domínio e a imagem de f e f^{-1}.
48. Vamos mostrar rigorosamente que $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{5-x}\right)$ é de fato a inversa de $f(x) = \dfrac{5e^x}{e^x + 1}$.

(a) Mostre que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ para todo x no domínio de f e que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ para todo x no domínio de f^{-1}.

(b) Encontre a imagem de f encontrando o domínio de f^{-1}.

(c) Seja $g(x) = \dfrac{5x}{x+1}$ e $h(x) = e^x$. Mostre que $f = g \circ h$ e que $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$. (Sabemos que isso é verdade em geral pelo Exercício 30 na Seção 18, mas é bom ver um exemplo específico da propriedade.)

49. Com a ajuda de seus colegas, resolva a inequação $e^x > x^n$ para uma variedade de números naturais n. O que você poderia conjecturar sobre a "velocidade" na qual $f(x) = e^x$ cresce em comparação com qualquer polinômio?

RESPOSTAS

1. $x = \frac{3}{4}$
2. $x = 4$
3. $x = 2$
4. $x = -\frac{1}{4}$
5. $x = -\frac{7}{3}$
6. $x = -1,\ 0,\ 1$
7. $x = \frac{16}{15}$
8. $x = -\frac{2}{11}$
9. $x = \frac{\ln(5)}{2\ln(3)}$
10. $x = -\frac{\ln(2)}{\ln(5)}$
11. Sem solução.
12. $x = \frac{\ln(29)+\ln(3)}{\ln(3)}$
13. $x = \frac{\ln(3)}{12\ln(1.005)}$
14. $k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-5730} = \frac{1}{5730}\ln(2)$
15. $t = \frac{\ln(2)}{0.1} = 10\ln(2)$
16. $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2)$
17. $t = \frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{-0.1} = 10\ln(18)$
18. $x = -10\ln\left(\frac{5}{3}\right) = 10\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
19. $x = \ln(2)$
20. $t = \frac{1}{3}\ln(2)$
21. $t = \frac{\ln\left(\frac{1}{29}\right)}{-0.8} = \frac{5}{4}\ln(29)$
22. $x = \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{\ln(2)-\ln(5)}{\ln(4)-\ln(5)}$
23. $x = \ln(2)$
24. $x = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\ln(2)$
25. $x = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}$
26. $x = \frac{\ln(3)+5\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(3)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln(3)-5\ln(2)}{\ln(3)+\ln(2)}$
27. $x = \frac{4\ln(3)-3\ln(7)}{7\ln(7)+2\ln(3)}$
28. $x = \ln(5)$
29. $x = \ln(3)$
30. $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$
31. $x = \ln(3)$
32. $x = \ln(3), \ln(5)$
33. $x = \frac{\ln(5)}{\ln(3)}$
34. $(\ln(53), \infty)$
35. $\left[\frac{\ln(3)}{12\ln(1.005)}, \infty\right)$
36. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
37. $\left(-\infty, \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}\right] = \left(-\infty, \frac{\ln(2)-\ln(5)}{\ln(4)-\ln(5)}\right]$
38. $\left(-\infty, \frac{\ln\left(\frac{2}{377}\right)}{-0.8}\right] = \left(-\infty, \frac{5}{4}\ln\left(\frac{377}{2}\right)\right]$
39. $\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{-0.1}, \infty\right) = [10\ln(18), \infty)$
40. $x \approx -0.76666,\ x = 2,\ x = 4$
41. $x \approx 0.01866,\ x \approx 1.7115$
42. $x = 0$
43. $(-\infty, 1]$
44. $\approx (-\infty, 2.7095)$
45. $\approx (2.3217, 4.3717)$
46. $x > \frac{1}{3}(\ln(6) + 1)$
47. $f^{-1} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Tanto f quanto f^{-1} têm domínio $(-\infty, \infty)$ e imagem $(-\infty, \infty)$.

23 Equações e Inequações Logarítmicas

Nos Exercícios 1 - 24, resolva a equação analiticamente.

1. $\log(3x-1)=\log(4-x)$
2. $\log_2\left(x^3\right)=\log_2(x)$
3. $\ln\left(8-x^2\right)=\ln(2-x)$
4. $\log_5\left(18-x^2\right)=\log_5(6-x)$
5. $\log_3(7-2x)=2$
6. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=-3$
7. $\ln\left(x^2-99\right)=0$
8. $\log(x^2-3x)=1$
9. $\log_{125}\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{1}{3}$
10. $\log\left(\dfrac{x}{10^{-3}}\right)=4.7$
11. $-\log(x)=5.4$
12. $10\log\left(\dfrac{x}{10^{-12}}\right)=150$
13. $6-3\log_5(2x)=0$
14. $3\ln(x)-2=1-\ln(x)$
15. $\log_3(x-4)+\log_3(x+4)=2$
16. $\log_5(2x+1)+\log_5(x+2)=1$
17. $\log_{169}(3x+7)-\log_{169}(5x-9)=\dfrac{1}{2}$
18. $\ln(x+1)-\ln(x)=3$
19. $2\log_7(x)=\log_7(2)+\log_7(x+12)$
20. $\log(x)-\log(2)=\log(x+8)-\log(x+2)$
21. $\log_3(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x)+8$
22. $\ln(\ln(x))=3$
23. $(\log(x))^2=2\log(x)+15$
24. $\ln(x^2)=(\ln(x))^2$

Nos Exercícios 25 - 30, resolva a inequação analiticamente.

25. $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}<0$
26. $x\ln(x)-x>0$
27. $10\log\left(\dfrac{x}{10^{-12}}\right)\geq 90$
28. $5.6\leq\log\left(\dfrac{x}{10^{-3}}\right)\leq 7.1$
29. $2.3<-\log(x)<5.4$
30. $\ln(x^2)\leq(\ln(x))^2$

Nos Exercícios 31 - 34, use o GeoGebra para ajudá-lo a resolver a equação ou inequação.

31. $\ln(x)=e^{-x}$
32. $\ln(x)=\sqrt[4]{x}$
33. $\ln(x^2+1)\geq 5$
34. $\ln(-2x^3-x^2+13x-6)<0$
35. Como $f(x)=e^x$ é uma função estritamente crescente, se $a<b$ então $e^a<e^b$. Use este fato para resolver a inequação $\ln(2x+1)<3$ sem um diagrama de sinais. Use esta técnica para resolver as desigualdades nos Exercícios 27 - 29. (Compare isso com o exercício 46 na seção 22.)
36. Resolva $\ln(3-y)-\ln(y)=2x+\ln(5)$ para y.
37. Vamos mostrar que $f^{-1}(x)=10^{\frac{x}{x+1}}$ é de fato a inversa de $f(x)=\dfrac{\log(x)}{1-\log(x)}$.

(a) Mostre que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ para todo x no domínio de f e que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ para todo x no domínio de f^{-1}.

(b) Encontre a imagem de f encontrando o domínio de f^{-1}.

(c) Seja $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ e $h(x) = \log(x)$. Mostre que $f = g \circ h$ e $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$. (Sabemos que isso é verdade em geral pelo Exercício 30 na Seção 18, mas é bom ver um exemplo específico da propriedade.)

38. Seja $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Calcule $f^{-1}(x)$ e encontre seu domínio e imagem.

39. Explique a equação no Exercício 10 e a desigualdade no Exercício 28 acima em termos da escala Richter para magnitude do terremoto. (Veja o exercício 75 na seção 20.)

40. Explique a equação no Exercício 12 e a desigualdade no Exercício 12 acima em termos do nível de intensidade sonora medido em decibéis. (Veja o exercício 76 na seção 20.)

41. Explique a equação no Exercício 11 e a desigualdade no Exercício 29 acima em termos do pH de uma solução. (Veja o exercício 77 na seção 20.)

42. Com a ajuda de seus colegas, resolva a inequação $\sqrt[n]{x} > \ln(x)$ para uma variedade de números naturais n. O que você poderia conjecturar sobre a “velocidade” na qual $f(x) = \ln(x)$ cresce em comparação com qualquer função raiz n-ésima?

RESPOSTAS

1. $x = \frac{5}{4}$
2. $x = 1$
3. $x = -2$
4. $x = -3,\ 4$
5. $x = -1$
6. $x = \frac{9}{2}$
7. $x = \pm 10$
8. $x = -2,\ 5$
9. $x = -\frac{17}{7}$
10. $x = 10^{1.7}$
11. $x = 10^{-5.4}$
12. $x = 10^{3}$
13. $x = \frac{25}{2}$
14. $x = e^{3/4}$
15. $x = 5$
16. $x = \frac{1}{2}$
17. $x = 2$
18. $x = \frac{1}{e^3-1}$
19. $x = 6$
20. $x = 4$
21. $x = 81$
22. $x = e^{e^3}$
23. $x = 10^{-3},\ 10^{5}$
24. $x = 1,\ x = e^2$
25. (e, ∞)
26. (e, ∞)
27. $\left[10^{-3}, \infty\right)$
28. $\left[10^{2.6}, 10^{4.1}\right]$
29. $\left(10^{-5.4}, 10^{-2.3}\right)$
30. $(0, 1] \cup [e^2, \infty)$
31. $x \approx 1.3098$
32. $x \approx 4.177,\ x \approx 5503.665$
33. $\approx (-\infty, -12.1414) \cup (12.1414, \infty)$
34. $\approx\ (-3.0281, -3) \cup (0.5, 0.5991) \cup (1.9299, 2)$
35. $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{e^3 - 1}{2}$
36. $y = \dfrac{3}{5e^{2x} + 1}$
38. $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$. O domínio de f^{-1} é $(-\infty, \infty)$ e sua imagem é igual ao domínio de f, ou seja, $(-1, 1)$.

24 ÂNGULOS

Nos Exercícios 1 a 4, converta os ângulos para o sistema GMS. Arredonde cada uma de suas respostas para o segundo mais próximo.

1. $63.75°$
2. $200.325°$
3. $-317.06°$
4. $179.999°$

Nos Exercícios 5 a 8, converta os ângulos para graus decimais. Arredonde cada uma de suas respostas para três casas decimais.

5. $125°50'$
6. $-32°10'12''$
7. $502°35'$
8. $237°58'43''$

Nos Exercícios 9 a 28, represente graficamente o ângulo orientado em posição padrão. Classifique cada ângulo de acordo com onde se encontra o lado terminal e, em seguida, forneça dois ângulos côngruos, sendo um positivo e o outro negativo.

9. $330°$
10. $-135°$
11. $120°$
12. $405°$
13. $-270°$
14. $\dfrac{5\pi}{6}$
15. $-\dfrac{11\pi}{3}$
16. $\dfrac{5\pi}{4}$
17. $\dfrac{3\pi}{4}$
18. $-\dfrac{\pi}{3}$
19. $\dfrac{7\pi}{2}$
20. $\dfrac{\pi}{4}$
21. $-\dfrac{\pi}{2}$
22. $\dfrac{7\pi}{6}$
23. $-\dfrac{5\pi}{3}$
24. 3π
25. -2π
26. $-\dfrac{\pi}{4}$
27. $\dfrac{15\pi}{4}$
28. $-\dfrac{13\pi}{6}$

Nos Exercícios 29 a 36, converta o ângulo da medida em graus para a medida em radianos, fornecendo o valor exato em termos de π.

29. $0°$
30. $240°$
31. $135°$
32. $-270°$
33. $-315°$
34. $150°$
35. $45°$
36. $-225°$

Nos Exercícios 37 a 44, converta o ângulo da medida em radianos para a medida em graus.

37. π
38. $-\dfrac{2\pi}{3}$
39. $\dfrac{7\pi}{6}$
40. $\dfrac{11\pi}{6}$
41. $\dfrac{\pi}{3}$
42. $\dfrac{5\pi}{3}$
43. $-\dfrac{\pi}{6}$
44. $\dfrac{\pi}{2}$

Nos Exercícios 45 a 49, esboce o arco orientado na Circunferência Unitária que corresponde ao número real fornecido.

45. $t = \frac{5\pi}{6}$ 46. $t = -\pi$ 47. $t = 6$ 48. $t = -2$ 49. $t = 12$

50. Um ioiô com diâmetro de 2.25 polegadas gira a uma taxa de 4500 revoluções por minuto. Qual é a velocidade com que a borda do ioiô está girando em milhas por hora? Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

51. Quantas revoluções por minuto o ioiô do exercício 50 precisaria completar para que a borda do ioiô estivesse girando a uma taxa de 42 milhas por hora? Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

52. No truque de ioiô 'Around the World', o artista lança o ioiô de modo que ele descreve um círculo vertical com raio igual ao da corda do ioiô. Se a corda do ioiô tem 28 polegadas de comprimento e o ioiô leva 3 segundos para completar uma revolução do círculo, calcule a velocidade do ioiô em milhas por hora. Arredonde sua resposta para duas casas decimais.

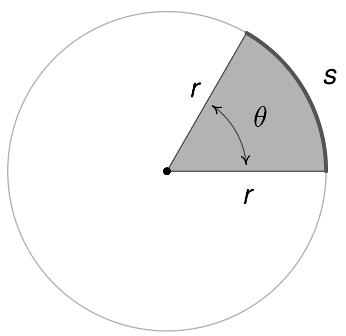
53. Um disco rígido de computador contém um disco circular com diâmetro de 2.5 polegadas e gira a uma taxa de 7200 RPM (rotações por minuto). Encontre a velocidade linear de um ponto na borda do disco em milhas por hora.

54. Uma pedra ficou presa na banda de rodagem do meu pneu e, quando eu estava dirigindo a 70 milhas por hora, a pedra soltou e atingiu a parte interna da lataria do carro. Qual era a velocidade, em milhas por hora, da pedra quando saiu da banda de rodagem? (O pneu tem um diâmetro de 23 polegadas.)

55. A Roda Gigante no Cedar Point é um círculo com diâmetro de 128 pés que repousa em uma plataforma com altura de 8 pés, fazendo com que sua altura total seja de 136 pés. Ela completa duas revoluções em 2 minutos e 7 segundos. Supondo que os passageiros estejam na borda do círculo, qual é a velocidade deles em milhas por hora?

56. Considere o círculo de raio r ilustrado abaixo com ângulo central θ, medido em radianos, e arco subtendido de comprimento s. Prove que a área do setor sombreado é $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

    (Dica: Use a proporção $\frac{A}{\text{área do círculo}} = \frac{s}{\text{circunferência do círculo}}$.)



Nos Exercícios 57 a 62, use o resultado do Exercício 56 para calcular as áreas dos setores circulares com os ângulos centrais e raios dados.

57. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $r = 12$

58. $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$, $r = 100$

59. $\theta = 330°$, $r = 9.3$

60. $\theta = \pi$, $r = 1$

61. $\theta = 240°$, $r = 5$

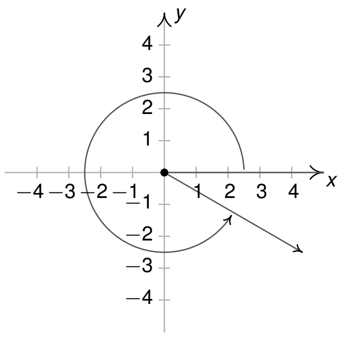
62. $\theta = 1°$, $r = 117$

63. Imagine uma corda amarrada ao redor da Terra no equador. Mostre que você só precisa adicionar 2π pés de comprimento à corda para levantá-la um pé acima do solo ao redor de todo o equador. (Você NÃO precisa saber o raio da Terra para mostrar isso.)

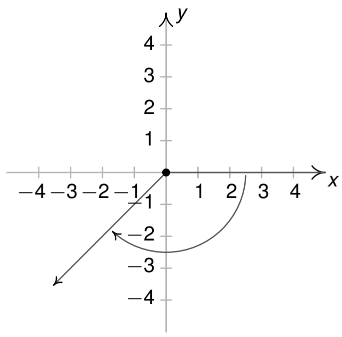
64. Com a ajuda de seus colegas de classe, procure uma prova de que π é, de fato, uma constante.

RESPOSTAS

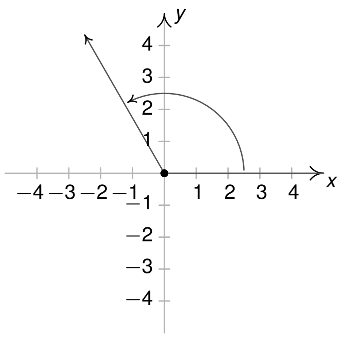
1. $63°45'$
2. $200°19'30''$
3. $-317°3'36''$
4. $179°59'56''$
5. $125.833°$
6. $-32.17°$
7. $502.583°$
8. $237.979°$
9. $330°$ é um ângulo do Quadrante IV
côngruo a $690°$ e $-30°$



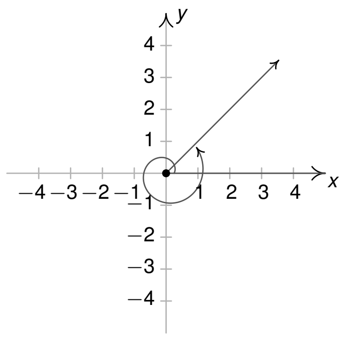
10. $-135°$ é um ângulo do Quadrante III
côngruo a $225°$ e $-495°$



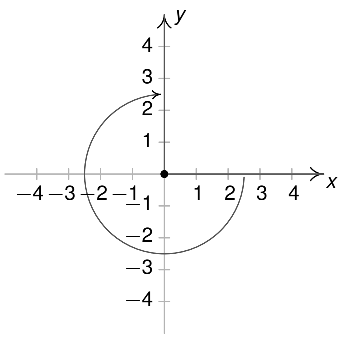
11. $120°$ é um ângulo do Quadrante II
côngruo a $480°$ e $-240°$



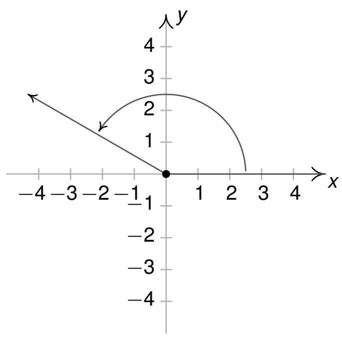
12. $405°$ é um ângulo do Quadrante I
côngruo a $45°$ e $-315°$



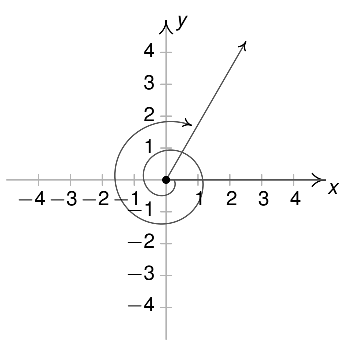
13. $-270°$ está sobre o eixo y positivo
côngruo a $90°$ e $-630°$



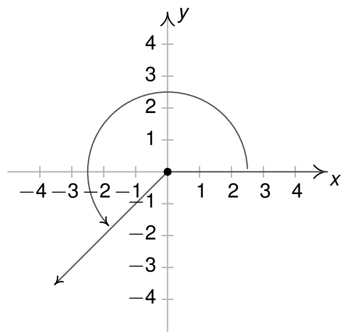
14. $\dfrac{5\pi}{6}$ é um ângulo do Quadrante II
côngruo a $\dfrac{17\pi}{6}$ e $-\dfrac{7\pi}{6}$



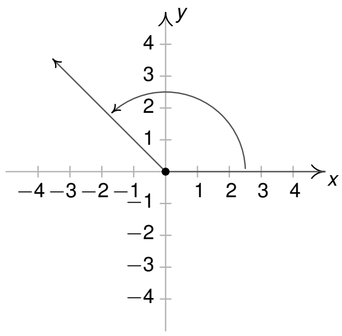
15. $-\dfrac{11\pi}{3}$ é um ângulo do Quadrante I
côngruo a $\dfrac{\pi}{3}$ e $-\dfrac{5\pi}{3}$



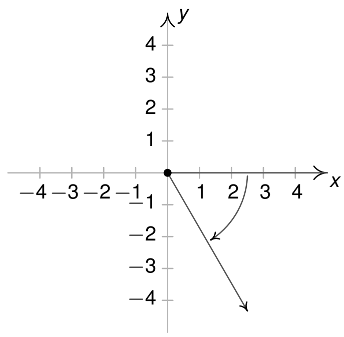
16. $\dfrac{5\pi}{4}$ é um ângulo do Quadrante III
côngruo a $\dfrac{13\pi}{4}$ e $-\dfrac{3\pi}{4}$



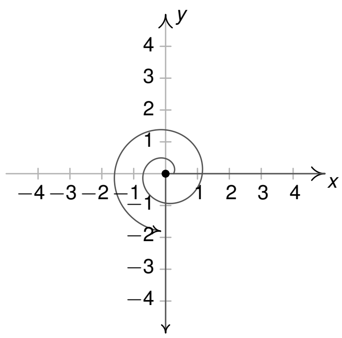
17. $\dfrac{3\pi}{4}$ é um ângulo do Quadrante II
côngruo a $\dfrac{11\pi}{4}$ e $-\dfrac{5\pi}{4}$



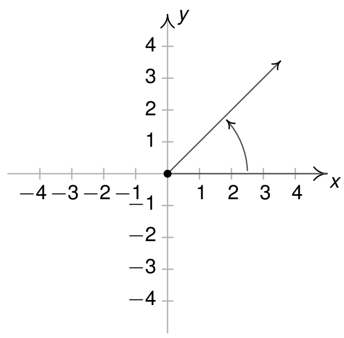
18. $-\dfrac{\pi}{3}$ é um ângulo do Quadrante IV
côngruo a $\dfrac{5\pi}{3}$ e $-\dfrac{7\pi}{3}$



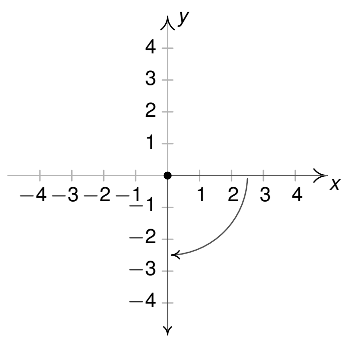
19. $\dfrac{7\pi}{2}$ está sobre o eixo y negativo
côngruo a $\dfrac{3\pi}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{2}$



20. $\dfrac{\pi}{4}$ é um ângulo do Quadrante I
côngruo a $\dfrac{9\pi}{4}$ e $-\dfrac{7\pi}{4}$

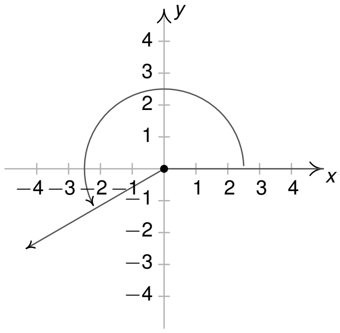


21. $-\dfrac{\pi}{2}$ está sobre o eixo y negativo
côngruo a $\dfrac{3\pi}{2}$ e $-\dfrac{5\pi}{2}$



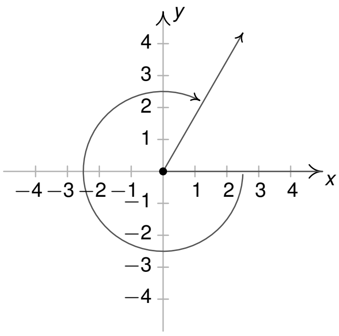
22. $\dfrac{7\pi}{6}$ é um ângulo do Quadrante III

côngruo a $\frac{19\pi}{6}$ e $-\frac{5\pi}{6}$



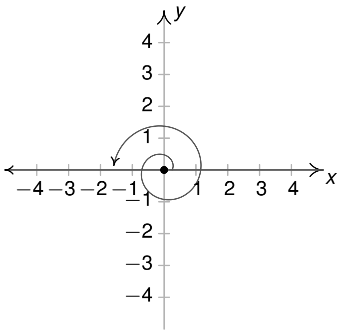
23. $-\frac{5\pi}{3}$ é um ângulo do Quadrante I

côngruo a $\frac{\pi}{3}$ e $-\frac{11\pi}{3}$



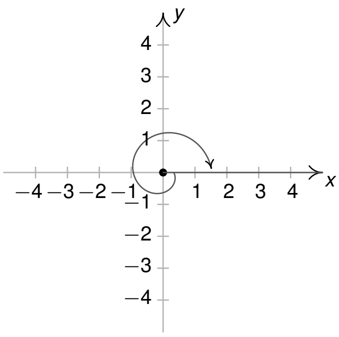
24. 3π está sobre o eixo x negativo

côngruo a π e $-\pi$



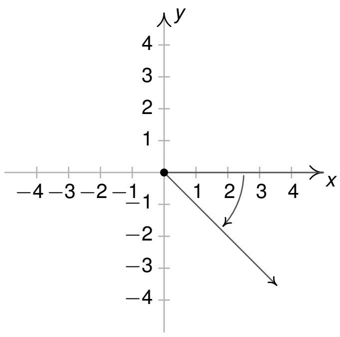
25. -2π está sobre o eixo x positivo

côngruo a 2π e -4π



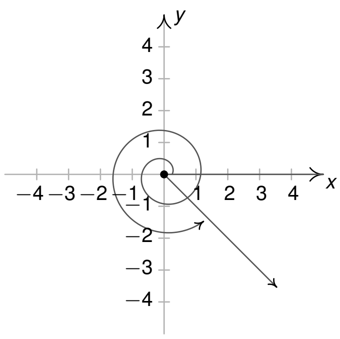
26. $-\frac{\pi}{4}$ é um ângulo do Quadrante IV

côngruo a $\frac{7\pi}{4}$ e $-\frac{9\pi}{4}$



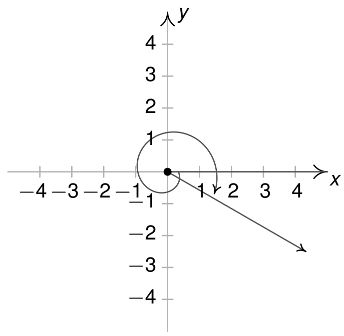
27. $\frac{15\pi}{4}$ é um ângulo do Quadrante IV

côngruo a $\frac{7\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}$



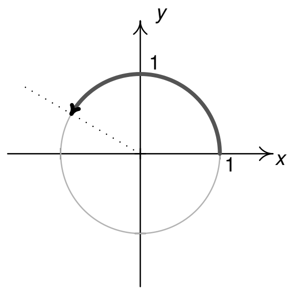
28. $-\frac{13\pi}{6}$ é um ângulo do Quadrante IV

côngruo a $\dfrac{11\pi}{6}$ e $-\dfrac{\pi}{6}$

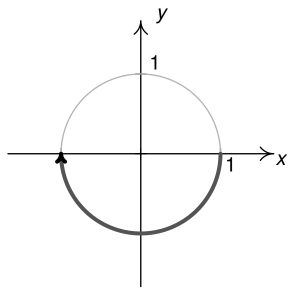


29. 0
30. $\dfrac{4\pi}{3}$
31. $\dfrac{3\pi}{4}$
32. $-\dfrac{3\pi}{2}$
33. $-\dfrac{7\pi}{4}$
34. $\dfrac{5\pi}{6}$
35. $\dfrac{\pi}{4}$
36. $-\dfrac{5\pi}{4}$
37. $180°$
38. $-120°$
39. $210°$
40. $330°$
41. $60°$
42. $300°$
43. $-30°$
44. $90°$

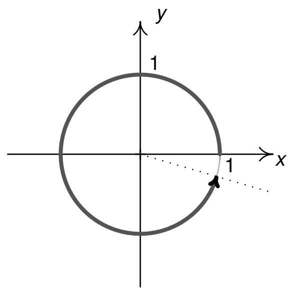
45. $t = \dfrac{5\pi}{6}$



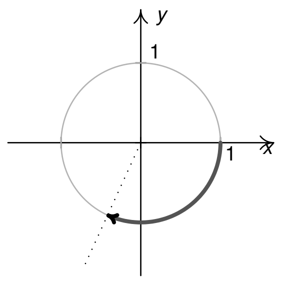
46. $t = -\pi$



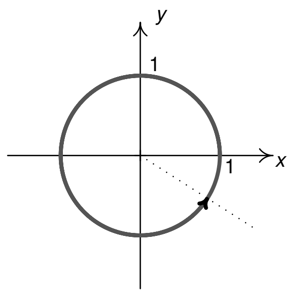
47. $t = 6$



48. $t = -2$



49. $t = 12$ (entre 1 e 2 revoluções)



50. Cerca de 30.12 milhas por hora

51. Cerca de 6274.52 revoluções por minuto

52. Cerca de 3.33 milhas por hora

53. Cerca de 53.55 milhas por hora

54. 70 milhas por hora

55. Cerca de 4.32 milhas por hora

57. 12π unidades quadradas

58. 6250π unidades quadradas

59. $79.2825\pi \approx 249.07$ unidades quadradas

60. $\frac{\pi}{2}$ unidades quadradas

61. $\frac{50\pi}{3}$ unidades quadradas

62. $38.025\pi \approx 119.46$ unidades quadradas

25 O Círculo Unitário

Nos Exercícios 1 a 20, encontre o valor exato do cosseno e do seno do ângulo dado.

1. $\theta = 0$
2. $\theta = \frac{\pi}{4}$
3. $\theta = \frac{\pi}{3}$
4. $\theta = \frac{\pi}{2}$
5. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
6. $\theta = \frac{3\pi}{4}$
7. $\theta = \pi$
8. $\theta = \frac{7\pi}{6}$
9. $\theta = \frac{5\pi}{4}$
10. $\theta = \frac{4\pi}{3}$
11. $\theta = \frac{3\pi}{2}$
12. $\theta = \frac{5\pi}{3}$
13. $\theta = \frac{7\pi}{4}$
14. $\theta = \frac{23\pi}{6}$
15. $\theta = -\frac{13\pi}{2}$
16. $\theta = -\frac{43\pi}{6}$
17. $\theta = -\frac{3\pi}{4}$
18. $\theta = -\frac{\pi}{6}$
19. $\theta = \frac{10\pi}{3}$
20. $\theta = 117\pi$

Nos Exercícios 21 a 30, utilize os resultados sobre redução ao primeiro quadrante para encontrar o valor solicitado.

21. Se $\sin(\theta) = -\frac{7}{25}$ com θ no Quadrante IV, qual é $\cos(\theta)$?
22. Se $\cos(\theta) = \frac{4}{9}$ com θ no Quadrante I, qual é $\sin(\theta)$?
23. Se $\sin(\theta) = \frac{5}{13}$ com θ no Quadrante II, qual é $\cos(\theta)$?
24. Se $\cos(\theta) = -\frac{2}{11}$ com θ no Quadrante III, qual é $\sin(\theta)$?
25. Se $\sin(\theta) = -\frac{2}{3}$ com θ no Quadrante III, qual é $\cos(\theta)$?
26. Se $\cos(\theta) = \frac{28}{53}$ com θ no Quadrante IV, qual é $\sin(\theta)$?
27. Se $\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, qual é $\cos(\theta)$?
28. Se $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $2\pi < \theta < \frac{5\pi}{2}$, qual é $\sin(\theta)$?
29. Se $\sin(\theta) = -0.42$ e $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, qual é $\cos(\theta)$?
30. Se $\cos(\theta) = -0.98$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, qual é $\sin(\theta)$?

Nos Exercícios 31 a 39, encontre todos os ângulos que satisfazem a equação fornecida.

31. $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$

32. $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

33. $\sin(\theta) = 0$

34. $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

35. $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

36. $\cos(\theta) = -1$

37. $\sin(\theta) = -1$

38. $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

39. $\cos(\theta) = -1.001$

Nos Exercícios 40 a 48, resolva a equação para t.

40. $\cos(t) = 0$

41. $\sin(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

42. $\cos(t) = 3$

43. $\sin(t) = -\dfrac{1}{2}$

44. $\cos(t) = \dfrac{1}{2}$

45. $\sin(t) = -2$

46. $\cos(t) = 1$

47. $\sin(t) = 1$

48. $\cos(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nos Exercícios 49 a 54, utilize o GeoGebra para aproximar o valor dado com três casas decimais. Certifique-se de usar a medida de ângulo (grau ou radiano) apropriada!

49. $\sin(78.95^\circ)$

50. $\cos(-2.01)$

51. $\sin(392.994)$

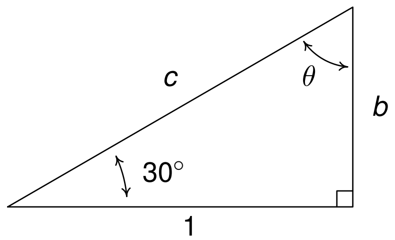
52. $\cos(207^\circ)$

53. $\sin(\pi^\circ)$

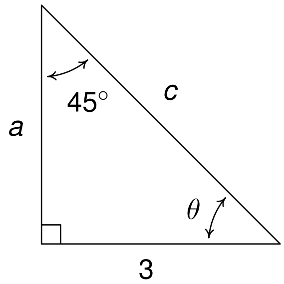
54. $\cos(e)$

Nos Exercícios 55 a 58, encontre a medida do ângulo faltante e os comprimentos dos lados ausentes.

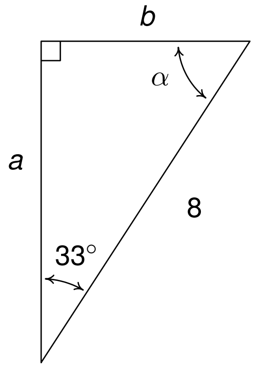
55. Encontre θ, b e c.



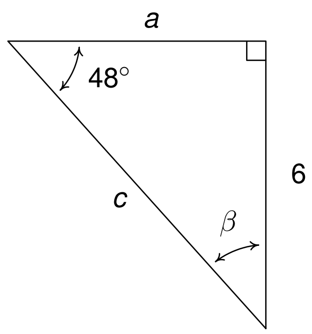
56. Encontre θ, a e c.



57. Encontre α, *a* e *b*.



58. Encontre β, *a* e *c*.



Nos Exercícios 59 a 64, assuma que θ é um ângulo agudo em um triângulo retângulo e calcule lado solicitado.

59. Se $\theta = 12°$ e o cateto adjacente a θ tem comprimento 4, qual é o comprimento da hipotenusa?

60. Se $\theta = 78.123°$ e a hipotenusa tem comprimento 5280, qual é o comprimento do cateto adjacente a θ?

61. Se $\theta = 59°$ e o cateto oposto a θ tem comprimento 117.42, qual é o comprimento da hipotenusa?

62. Se $\theta = 5°$ e a hipotenusa tem comprimento 10, qual é o comprimento do cateto oposto a θ?

63. Se $\theta = 5°$ e a hipotenusa tem comprimento 10, qual é o comprimento do cateto adjacente a θ?

64. Se $\theta = 37.5°$ e o cateto oposto a θ tem comprimento 306, qual é o comprimento do cateto adjacente a θ?

Nos Exercícios 65 a 68, seja θ o ângulo em posição padrão cujo lado terminal contém o ponto dado e, em seguida, calcule $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$.

65. $P(-7, 24)$
66. $Q(3, 4)$
67. $R(5, -9)$
68. $T(-2, -11)$

Nos Exercícios 69 a 72, encontre as equações de movimento para o cenário dado. Suponha que o centro do movimento seja a origem, o movimento seja no sentido anti-horário e que $t = 0$ corresponda a uma posição ao longo do eixo positivo x.

69. Um ponto na borda do ioiô giratório no Exercício 50 da Seção 24.

    Lembre-se: O diâmetro do ioiô é de 2,25 polegadas e ele gira a 4500 rotações por minuto.

70. O ioiô no exercício 52 da Seção 24.

    Lembre-se: O raio do círculo é de 28 polegadas e ele completa uma revolução em 3 segundos.

71. Um ponto na borda do disco rígido no Exercício 53 da Seção 24.

    Lembre-se: O diâmetro do disco rígido é de 2,5 polegadas e ele gira a 7200 rotações por minuto.

72. Um passageiro na Giant Wheel no Exercício 55 da Seção 24.

    Lembre-se: O diâmetro é de 128 pés e completa 2 revoluções em 2 minutos e 7 segundos.

73. Considere os números: 0, 1, 2, 3, 4. Tire a raiz quadrada de cada um desses números e, em seguida, divida cada um por 2. Os números resultantes devem parecer estranhamente familiares.

74. Sejam α e β os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo. (Assim, α e β são ângulos complementares.) Mostre que sin(α) = cos(β) e sin(β) = cos(α). O fato de que as co-funções de ângulos complementares são iguais neste caso não é um acidente, e um resultado mais geral será apresentado na Seção 27.

RESPOSTAS

1. $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
5. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$
8. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
9. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
11. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
12. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
13. $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
14. $\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
15. $\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = -1$
16. $\cos\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
17. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
18. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
19. $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
20. $\cos(117\pi) = -1$, $\sin(117\pi) = 0$
21. Se $\sin(\theta) = -\frac{7}{25}$ com θ no Quadrante IV, então $\cos(\theta) = \frac{24}{25}$.
22. Se $\cos(\theta) = \frac{4}{9}$ com θ no Quadrante I, então $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{65}}{9}$.
23. Se $\sin(\theta) = \frac{5}{13}$ com θ no Quadrante II, então $\cos(\theta) = -\frac{12}{13}$.
24. Se $\cos(\theta) = -\frac{2}{11}$ com θ no Quadrante III, então $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{117}}{11}$.
25. Se $\sin(\theta) = -\frac{2}{3}$ com θ no Quadrante III, então $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.
26. Se $\cos(\theta) = \frac{28}{53}$ com θ no Quadrante IV, então $\sin(\theta) = -\frac{45}{53}$.
27. Se $\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

28. Se $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $2\pi < \theta < \frac{5\pi}{2}$, então $\sin(\theta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

29. Se $\sin(\theta) = -0.42$ e $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos(\theta) = -\sqrt{0.8236} \approx -0.9075$.

30. Se $\cos(\theta) = -0.98$ e $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\sin(\theta) = \sqrt{0.0396} \approx 0.1990$.

31. $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$ quando $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

32. $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ quando $\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

33. $\sin(\theta) = 0$ quando $\theta = \pi k$ para qualquer inteiro k.

34. $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

35. $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quando $\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ou $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

36. $\cos(\theta) = -1$ quando $\theta = (2k+1)\pi$ para qualquer inteiro k.

37. $\sin(\theta) = -1$ quando $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

38. $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quando $\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $\theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

39. $\cos(\theta) = -1.001$ nunca ocorre

40. $\cos(t) = 0$ quando $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$ para qualquer inteiro k.

41. $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ ou $t = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

42. $\cos(t) = 3$ nunca ocorre.

43. $\sin(t) = -\frac{1}{2}$ quando $t = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ ou $t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

44. $\cos(t) = \frac{1}{2}$ quando $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ou $t = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

45. $\sin(t) = -2$ nunca ocorre.

46. $\cos(t) = 1$ quando $t = 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

47. $\sin(t) = 1$ quando $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

48. $\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ou $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

49. $\sin(78.95°) \approx 0.981$

50. $\cos(-2.01) \approx -0.425$

51. $\sin(392.994) \approx -0.291$

52. $\cos(207°) \approx -0.891$ 53. $\sin(\pi°) \approx 0.055$ 54. $\cos(e) \approx -0.912$

55. $\theta = 60°$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

56. $\theta = 45°$, $a = 3$, $c = 3\sqrt{2}$

57. $\alpha = 57°$, $a = 8\cos(33°) \approx 6.709$, $b = 8\sin(33°) \approx 4.357$

58. $\beta = 42°$, $c = \dfrac{6}{\sin(48°)} \approx 8.074$, $a = \sqrt{c^2 - 6^2} \approx 5.402$

59. A hipotenusa tem comprimento $\dfrac{4}{\cos(12°)} \approx 4.089$.

60. O cateto adjacente a θ tem comprimento $5280\cos(78.123°) \approx 1086.68$.

61. A hipotenusa tem comprimento $\dfrac{117.42}{\sin(59°)} \approx 136.99$.

62. O cateto oposto a θ tem comprimento $10\sin(5°) \approx 0.872$.

63. O cateto adjacente a θ tem comprimento $10\cos(5°) \approx 9.962$.

64. A hipotenusa tem comprimento $c = \dfrac{306}{\sin(37.5°)} \approx 502.660$, então o cateto adjacente a θ tem comprimento $\sqrt{c^2 - 306^2} \approx 398.797$.

65. $\cos(\theta) = -\dfrac{7}{25}$, $\sin(\theta) = \dfrac{24}{25}$

66. $\cos(\theta) = \dfrac{3}{5}$, $\sin(\theta) = \dfrac{4}{5}$

67. $\cos(\theta) = \dfrac{5\sqrt{106}}{106}$, $\sin(\theta) = -\dfrac{9\sqrt{106}}{106}$

68. $\cos(\theta) = -\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$, $\sin(\theta) = -\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

69. $r = 1.125$ polegadas, $\omega = 9000\pi \,\frac{\text{radianos}}{\text{minuto}}$, $x = 1.125\cos(9000\pi\, t)$, $y = 1.125\sin(9000\pi\, t)$. Aqui, x e y são medidos em polegadas e t é medido em minutos.

70. $r = 28$ polegadas, $\omega = \frac{2\pi}{3}\,\frac{\text{radianos}}{\text{segundo}}$, $x = 28\cos\left(\frac{2\pi}{3}\, t\right)$, $y = 28\sin\left(\frac{2\pi}{3}\, t\right)$. Aqui, x e y são medidos em polegadas e t é medido em segundos.

71. $r = 1.25$ polegadas, $\omega = 14400\pi \,\frac{\text{radianos}}{\text{minuto}}$, $x = 1.25\cos(14400\pi\, t)$, $y = 1.25\sin(14400\pi\, t)$. Aqui, x e y são medidos em polegadas e t é medido em minutos.

72. $r = 64$ pés, $\omega = \frac{4\pi}{127}\,\frac{\text{radianos}}{\text{segundo}}$, $x = 64\cos\left(\frac{4\pi}{127}\, t\right)$, $y = 64\sin\left(\frac{4\pi}{127}\, t\right)$. Aqui, x e y são medidos em pés e t é medido em segundos.

Nos Exercícios 1 a 20, encontre o valor exato ou declare que é indefinido.

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$
3. $\csc\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
5. $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
6. $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
7. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
8. $\cot\left(\frac{13\pi}{2}\right)$
9. $\tan(117\pi)$
10. $\sec\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
11. $\csc(3\pi)$
12. $\cot(-5\pi)$
13. $\tan\left(\frac{31\pi}{2}\right)$
14. $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$
15. $\csc\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
16. $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
17. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\sec(-7\pi)$
19. $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)$
20. $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Nos Exercícios 21 a 34, utilize as informações fornecidas para encontrar os valores exatos das outras funções circulares de θ.

21. $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$ com θ no Quadrante II
22. $\tan(\theta) = \frac{12}{5}$ com θ no Quadrante III
23. $\csc(\theta) = \frac{25}{24}$ com θ no Quadrante I
24. $\sec(\theta) = 7$ com θ no Quadrante IV
25. $\csc(\theta) = -\frac{10\sqrt{91}}{91}$ com θ no Quadrante III
26. $\cot(\theta) = -23$ com θ no Quadrante II
27. $\tan(\theta) = -2$ com θ no Quadrante IV.
28. $\sec(\theta) = -4$ com θ no Quadrante II.
29. $\cot(\theta) = \sqrt{5}$ com θ no Quadrante III.
30. $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ com θ no Quadrante I.
31. $\cot(\theta) = 2$ com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
32. $\csc(\theta) = 5$ com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
33. $\tan(\theta) = \sqrt{10}$ com $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.
34. $\sec(\theta) = 2\sqrt{5}$ com $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

Nos Exercícios 35 a 42, utilize o GeoGebra para aproximar o valor dado com três casas decimais. Certifique-se de usar o modo apropriado de medida de ângulo!

35. $\csc(78.95^\circ)$
36. $\tan(-2.01)$
37. $\cot(392.994)$
38. $\sec(207^\circ)$
39. $\csc(5.902)$
40. $\tan(39.672^\circ)$
41. $\cot(3^\circ)$
42. $\sec(0.45)$

Nos Exercícios 43 a 57, encontre todos os ângulos que satisfazem a equação.

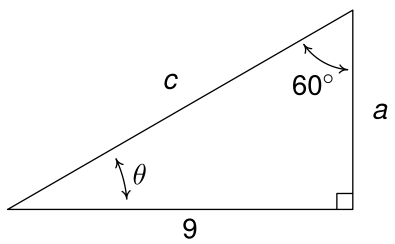
43. $\tan(\theta) = \sqrt{3}$
44. $\sec(\theta) = 2$
45. $\csc(\theta) = -1$
46. $\cot(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
47. $\tan(\theta) = 0$
48. $\sec(\theta) = 1$
49. $\csc(\theta) = 2$
50. $\cot(\theta) = 0$
51. $\tan(\theta) = -1$
52. $\sec(\theta) = 0$
53. $\csc(\theta) = -\dfrac{1}{2}$
54. $\sec(\theta) = -1$
55. $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$
56. $\csc(\theta) = -2$
57. $\cot(\theta) = -1$

Nos Exercícios 58 a 65, resolva a equação para t. Forneça valores exatos.

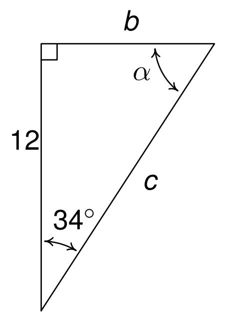
58. $\cot(t) = 1$
59. $\tan(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
60. $\sec(t) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
61. $\csc(t) = 0$
62. $\cot(t) = -\sqrt{3}$
63. $\tan(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
64. $\sec(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
65. $\csc(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Nos Exercícios 66 - 69, encontre as quantidades pedidas.

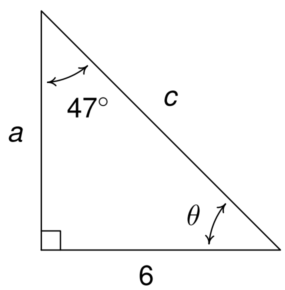
66. Encontre θ, *a* e *c*.



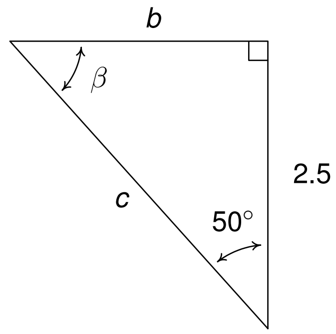
67. Encontre α, *b* e *c*.



68. Encontre θ, *a* e *c*.



69. Encontre β, *b* e *c*.



Nos Exercícios 70 - 75, assuma que θ é um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

70. Se $\theta = 30°$ e o cateto oposto a θ tem comprimento 4, qual é o comprimento do cateto adjacente a θ?

71. Se $\theta = 15°$ e a hipotenusa tem comprimento 10, qual é o comprimento do cateto oposto a θ?

72. Se $\theta = 87°$ e o cateto adjacente a θ tem comprimento 2, qual é o comprimento do cateto oposto a θ?

73. Se θ = 38.2° e o cateto oposto a θ tem comprimento 14, qual é o comprimento da hipotenusa?

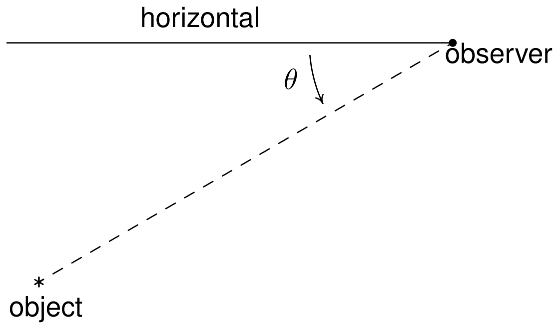
74. Se θ = 2.05° e a hipotenusa tem comprimento 3.98, qual é o comprimento do cateto adjacente a θ?

75. Se θ = 42° e o cateto adjacente a θ tem comprimento 31, qual é o comprimento do cateto oposto a θ?

76. Uma árvore, de pé em solo plano, projeta uma sombra de 120 pés. O ângulo de elevação, a partir do final da sombra até o topo da árvore, é de 21.4°. Encontre a altura da árvore, arredondando em pés. Com a ajuda de seus colegas de classe, pesquise o termo *umbra versa* e veja qual é a sua relação com a sombra neste problema.

77. A torre de transmissão da estação de rádio WSAZ (Casa de "Álgebra pela Manhã com Carl e Jeff") possui duas enormes luzes vermelhas piscantes: uma no topo e outra a alguns metros abaixo do topo. De um ponto a 5000 pés de distância da base da torre, em terreno plano, o ângulo de elevação para a luz superior é de 7.970° e para a segunda luz é de 7.125°. Encontre a distância entre as luzes, arredondando em pés.

78. O ângulo de depressão de um objeto refere-se ao ângulo cujo lado inicial é uma linha horizontal acima do objeto e cujo lado terminal é a linha de visão para o objeto abaixo da horizontal. Isso é representado esquematicamente abaixo.



O ângulo de depressão a partir da horizontal até o objeto é θ.

   (a) Mostre que se a linha horizontal está acima e paralela ao solo nivelado, então o ângulo de depressão (do observador para o objeto) e o ângulo de inclinação (do objeto para o observador) serão congruentes, pois são ângulos alternados internos.

   (b) De uma torre de observação de incêndios a 200 pés acima do solo plano na Floresta Nacional de Mapinguari, um guarda avista um incêndio ao longe. O ângulo de depressão até o incêndio é de 2.5°. Qual é a distância do incêndio até a base da torre?

   (c) O mapinguari, visto pelo guarda-florestal na parte 78b, está correndo diretamente do incêndio em direção à torre de observação. O guarda-florestal faz duas observações. Na primeira observação, o ângulo de depressão da torre para o mapinguari é de 6°. Na segunda observação, feita apenas 10 segundos depois, o ângulo de depressão é de 6.5°. Qual é a distância que o mapinguari percorreu nesses 10 segundos? Arredonde sua resposta para o pé mais próximo. Qual é a velocidade dele em milhas por hora? Arredonde sua resposta para a milha por hora mais próxima. Se o Mapinguari mantiver esse ritmo, quanto tempo ele levará para chegar à torre de observação a partir de sua localização na segunda observação? Arredonde sua resposta para o minuto mais próximo.

79. Quando estou a 30 pés de distância de uma árvore em casa, o ângulo de elevação até o topo da árvore é de 50° e o ângulo de depressão até a base da árvore é de 10°. Qual é a altura da árvore? Arredonde sua resposta para o pé mais próximo.

80. Do mirante do farol em Ponto do Mapinguari, a 50 pés acima da superfície do Lago Ippizuti, um salva-vidas avista um barco no lago navegando diretamente em direção ao farol. A primeira observação teve um ângulo de depressão de 8.2° e a segunda observação teve um ângulo de depressão de 25.9°. Quão longe o barco viajou entre as observações?

81. Um cabo de sustentação de 1000 pés de comprimento está preso ao topo de uma torre. Quando esticado, faz um ângulo de 43° com o solo. Qual é a altura da torre? A que distância da base da torre o cabo atinge o solo?

Nos Exercícios 82 - 128, verifique a identidade. Suponha que todas as quantidades estejam definidas.

82. $\cos(\theta)\sec(\theta) = 1$

83. $\tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$

84. $\sin(\theta)\csc(\theta) = 1$

85. $\tan(\theta)\cot(\theta) = 1$

86. $\csc(\theta)\cos(\theta) = \cot(\theta)$

87. $\dfrac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \sec(\theta)\tan(\theta)$

88. $\dfrac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \csc(\theta)\cot(\theta)$

89. $\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)+\tan(\theta)$

90. $\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \csc(\theta)-\cot(\theta)$

91. $\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin^2(\theta)} = \sec(\theta)$

92. $\dfrac{\sin(\theta)}{1-\cos^2(\theta)} = \csc(\theta)$

93. $\dfrac{\sec(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \cos(\theta)$

94. $\dfrac{\csc(\theta)}{1+\cot^2(\theta)} = \sin(\theta)$

95. $\dfrac{\tan(\theta)}{\sec^2(\theta)-1} = \cot(\theta)$

96. $\dfrac{\cot(\theta)}{\csc^2(\theta)-1} = \tan(\theta)$

97. $4\cos^2(\theta)+4\sin^2(\theta) = 4$

98. $9-\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) = 8$

99. $\tan^3(\theta) = \tan(\theta)\sec^2(\theta)-\tan(\theta)$

100. $\sin^5(\theta) = \left(1-\cos^2(\theta)\right)^2\sin(\theta)$

101. $\sec^{10}(\theta) = \left(1+\tan^2(\theta)\right)^4\sec^2(\theta)$

102. $\cos^2(\theta)\tan^3(\theta) = \tan(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta)$

103. $\sec^4(\theta)-\sec^2(\theta) = \tan^2(\theta)+\tan^4(\theta)$

104. $\dfrac{\cos(\theta)+1}{\cos(\theta)-1} = \dfrac{1+\sec(\theta)}{1-\sec(\theta)}$

105. $\dfrac{\sin(\theta)+1}{\sin(\theta)-1} = \dfrac{1+\csc(\theta)}{1-\csc(\theta)}$

106. $\dfrac{1-\cot(\theta)}{1+\cot(\theta)} = \dfrac{\tan(\theta)-1}{\tan(\theta)+1}$

107. $\dfrac{1-\tan(\theta)}{1+\tan(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}$

108. $\tan(\theta)+\cot(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta)$

109. $\csc(\theta)-\sin(\theta) = \cot(\theta)\cos(\theta)$

110. $\cos(\theta)-\sec(\theta) = -\tan(\theta)\sin(\theta)$

111. $\cos(\theta)(\tan(\theta)+\cot(\theta)) = \csc(\theta)$

112. $\sin(\theta)(\tan(\theta)+\cot(\theta)) = \sec(\theta)$

113. $\dfrac{1}{1-\cos(\theta)} + \dfrac{1}{1+\cos(\theta)} = 2\csc^2(\theta)$

114. $\dfrac{1}{\sec(\theta)+1} + \dfrac{1}{\sec(\theta)-1} = 2\csc(\theta)\cot(\theta)$

115. $\dfrac{1}{\csc(\theta)+1} + \dfrac{1}{\csc(\theta)-1} = 2\sec(\theta)\tan(\theta)$

116. $\dfrac{1}{\csc(\theta)-\cot(\theta)} - \dfrac{1}{\csc(\theta)+\cot(\theta)} = 2\cot(\theta)$

117. $\dfrac{\cos(\theta)}{1-\tan(\theta)} + \dfrac{\sin(\theta)}{1-\cot(\theta)} = \sin(\theta)+\cos(\theta)$

118. $\dfrac{1}{\sec(\theta)+\tan(\theta)} = \sec(\theta)-\tan(\theta)$

119. $\dfrac{1}{\sec(\theta)-\tan(\theta)} = \sec(\theta)+\tan(\theta)$

120. $\dfrac{1}{\csc(\theta)-\cot(\theta)} = \csc(\theta)+\cot(\theta)$

121. $\dfrac{1}{\csc(\theta)+\cot(\theta)} = \csc(\theta)-\cot(\theta)$

122. $\dfrac{1}{1-\sin(\theta)} = \sec^2(\theta)+\sec(\theta)\tan(\theta)$

123. $\dfrac{1}{1+\sin(\theta)} = \sec^2(\theta)-\sec(\theta)\tan(\theta)$

124. $\dfrac{1}{1-\cos(\theta)} = \csc^2(\theta)+\csc(\theta)\cot(\theta)$

125. $\dfrac{1}{1+\cos(\theta)} = \csc^2(\theta)-\csc(\theta)\cot(\theta)$

126. $\dfrac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)} = \dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

127. $\csc(\theta)-\cot(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

128. $\dfrac{1-\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)} = (\sec(\theta)-\tan(\theta))^2$

Nos Exercícios 129 - 132, verifique a identidade. Talvez seja necessário consultar as seções 9 e 21 para uma revisão das propriedades do módulo e dos logaritmos antes de prosseguir.

129. $\ln|\sec(\theta)| = -\ln|\cos(\theta)|$

130. $-\ln|\csc(\theta)| = \ln|\sin(\theta)|$

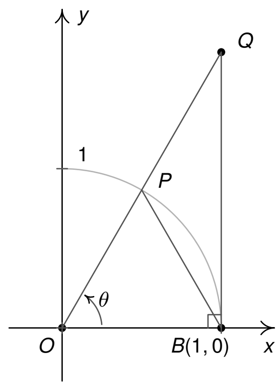
131. $-\ln|\sec(\theta) - \tan(\theta)| = \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|$

132. $-\ln|\csc(\theta) + \cot(\theta)| = \ln|\csc(\theta) - \cot(\theta)|$

133. Verifique os domínios e imagens das funções tangente, cossecante e cotangente.

134. Como fizemos no Exercício 74 na Seção 25, sejam α e β os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo. (Portanto, α e β são ângulos complementares.) Mostre que $\sec(\alpha) = \csc(\beta)$ e $\tan(\alpha) = \cot(\beta)$. O facto das co-funções de ângulos complementares serem iguais neste caso não é um acidente e um resultado mais geral será dado na Seção 27.

135. Queremos estabelecer a desigualdade $\cos(\theta) < \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} < 1$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Use o diagrama abaixo para responder o seguinte:



(a) Mostre que o triângulo OPB tem área $\dfrac{1}{2}\sin(\theta)$.

(b) Mostre que o setor circular OPB com ângulo central θ tem área $\dfrac{1}{2}\theta$.

(c) Mostre que o triângulo OQB tem área $\dfrac{1}{2}\tan(\theta)$.

(d) Comparando áreas, mostre que $\sin(\theta) < \theta < \tan(\theta)$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(e) Use a desigualdade $\sin(\theta) < \theta$ para mostrar que $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} < 1$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(f) Use a desigualdade $\theta < \tan(\theta)$ para mostrar que $\cos(\theta) < \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Combine isso com a parte anterior para completar a prova.

136. Mostre que $\cos(\theta) < \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} < 1$ também vale para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$.

137. Por que o fato de $\tan(\theta) = 3 = \frac{3}{1}$ não significa $\sin(\theta) = 3$ e $\cos(\theta) = 1$?

RESPOSTAS

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
2. $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
3. $\csc\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2$
4. $\cot\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
5. $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
6. $\sec\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ é indefinido
7. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. $\cot\left(\frac{13\pi}{2}\right) = 0$
9. $\tan(117\pi) = 0$
10. $\sec\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 2$
11. $\csc(3\pi)$ é indefinido
12. $\cot(-5\pi)$ é indefinido
13. $\tan\left(\frac{31\pi}{2}\right)$ é indefinido
14. $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
15. $\csc\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
16. $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$
17. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
18. $\sec(-7\pi) = -1$
19. $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
20. $\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$
21. $\sin(\theta) = \frac{3}{5}, \cos(\theta) = -\frac{4}{5}, \tan(\theta) = -\frac{3}{4}, \csc(\theta) = \frac{5}{3}, \sec(\theta) = -\frac{5}{4}, \cot(\theta) = -\frac{4}{3}$
22. $\sin(\theta) = -\frac{12}{13}, \cos(\theta) = -\frac{5}{13}, \tan(\theta) = \frac{12}{5}, \csc(\theta) = -\frac{13}{12}, \sec(\theta) = -\frac{13}{5}, \cot(\theta) = \frac{5}{12}$
23. $\sin(\theta) = \frac{24}{25}, \cos(\theta) = \frac{7}{25}, \tan(\theta) = \frac{24}{7}, \csc(\theta) = \frac{25}{24}, \sec(\theta) = \frac{25}{7}, \cot(\theta) = \frac{7}{24}$
24. $\sin(\theta) = \frac{-4\sqrt{3}}{7}, \cos(\theta) = \frac{1}{7}, \tan(\theta) = -4\sqrt{3}, \csc(\theta) = -\frac{7\sqrt{3}}{12}, \sec(\theta) = 7, \cot(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{12}$
25. $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{91}}{10}, \cos(\theta) = -\frac{3}{10}, \tan(\theta) = \frac{\sqrt{91}}{3}, \csc(\theta) = -\frac{10\sqrt{91}}{91}, \sec(\theta) = -\frac{10}{3}, \cot(\theta) = \frac{3\sqrt{91}}{91}$
26. $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{530}}{530}, \cos(\theta) = -\frac{23\sqrt{530}}{530}, \tan(\theta) = -\frac{1}{23}, \csc(\theta) = \sqrt{530}, \sec(\theta) = -\frac{\sqrt{530}}{23}, \cot(\theta) = -23$
27. $\sin(\theta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tan(\theta) = -2, \csc(\theta) = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \sec(\theta) = \sqrt{5}, \cot(\theta) = -\frac{1}{2}$
28. $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos(\theta) = -\frac{1}{4}, \tan(\theta) = -\sqrt{15}, \csc(\theta) = \frac{4\sqrt{15}}{15}, \sec(\theta) = -4, \cot(\theta) = -\frac{\sqrt{15}}{15}$
29. $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{6}}{6}, \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{30}}{6}, \tan(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \csc(\theta) = -\sqrt{6}, \sec(\theta) = -\frac{\sqrt{30}}{5}, \cot(\theta) = \sqrt{5}$
30. $\sin(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos(\theta) = \frac{1}{3}, \tan(\theta) = 2\sqrt{2}, \csc(\theta) = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \sec(\theta) = 3, \cot(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4}$
31. $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan(\theta) = \frac{1}{2}, \csc(\theta) = \sqrt{5}, \sec(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot(\theta) = 2$
32. $\sin(\theta) = \frac{1}{5}, \cos(\theta) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan(\theta) = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \csc(\theta) = 5, \sec(\theta) = -\frac{5\sqrt{6}}{12}, \cot(\theta) = -2\sqrt{6}$
33. $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{110}}{11}, \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{11}}{11}, \tan(\theta) = \sqrt{10}, \csc(\theta) = -\frac{\sqrt{110}}{10}, \sec(\theta) = -\sqrt{11}, \cot(\theta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$
34. $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{95}}{10}, \cos(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{10}, \tan(\theta) = -\sqrt{19}, \csc(\theta) = -\frac{2\sqrt{95}}{19}, \sec(\theta) = 2\sqrt{5}, \cot(\theta) = -\frac{\sqrt{19}}{19}$

35. $\csc(78.95°) \approx 1.019$

36. $\tan(-2.01) \approx 2.129$

37. $\cot(392.994) \approx 3.292$

38. $\sec(207°) \approx -1.122$

39. $\csc(5.902) \approx -2.688$

40. $\tan(39.672°) \approx 0.829$

41. $\cot(3°) \approx 19.081$

42. $\sec(0.45) \approx 1.111$

43. $\tan(\theta) = \sqrt{3}$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ para qualquer inteiro k

44. $\sec(\theta) = 2$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ or $\theta = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k

45. $\csc(\theta) = -1$ quando $\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

46. $\cot(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ para qualquer inteiro k

47. $\tan(\theta) = 0$ quando $\theta = \pi k$ para qualquer inteiro k

48. $\sec(\theta) = 1$ quando $\theta = 2\pi k$ para qualquer inteiro k

49. $\csc(\theta) = 2$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ or $\theta = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k.

50. $\cot(\theta) = 0$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ para qualquer inteiro k

51. $\tan(\theta) = -1$ quando $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$ para qualquer inteiro k

52. $\sec(\theta) = 0$ nunca acontece

53. $\csc(\theta) = -\dfrac{1}{2}$ nunca acontece

54. $\sec(\theta) = -1$ quando $\theta = \pi + 2\pi k = (2k+1)\pi$ para qualquer inteiro k

55. $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$ quando $\theta = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$ para qualquer inteiro k

56. $\csc(\theta) = -2$ quando $\theta = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k$ or $\theta = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k

57. $\cot(\theta) = -1$ quando $\theta = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$ para qualquer inteiro k

58. $\cot(t) = 1$ quando $t = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$ para qualquer inteiro k

59. $\tan(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ quando $t = \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ para qualquer inteiro k

60. $\sec(t) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ quando $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$ or $t = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k

61. $\csc(t) = 0$ nunca acontece

62. $\cot(t) = -\sqrt{3}$ quando $t = \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$ para qualquer inteiro k

63. $\tan(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ quando $t = \frac{5\pi}{6} + \pi k$ para qualquer inteiro k

64. $\sec(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ quando $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ or $t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k

65. $\csc(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ quando $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ or $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ para qualquer inteiro k

66. $\theta = 30°$, $a = 3\sqrt{3}$, $c = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

67. $\alpha = 56°$, $b = 12\tan(34°) = 8.094$, $c = 12\sec(34°) = \frac{12}{\cos(34°)} \approx 14.475$

68. $\theta = 43°$, $a = 6\cot(47°) = \frac{6}{\tan(47°)} \approx 5.595$, $c = 6\csc(47°) = \frac{6}{\sin(47°)} \approx 8.204$

69. $\beta = 40°$, $b = 2.5\tan(50°) \approx 2.979$, $c = 2.5\sec(50°) = \frac{2.5}{\cos(50°)} \approx 3.889$

70. O cateto adjacente to θ tem comprimento $4\sqrt{3} \approx 6.928$

71. O cateto oposto θ tem comprimento $10\sin(15°) \approx 2.588$

72. O cateto oposto θ is $2\tan(87°) \approx 38.162$

73. A hipotenusa tem comprimento $14\csc(38.2°) = \frac{14}{\sin(38.2°)} \approx 22.639$

74. O cateto adjacente to θ tem comprimento $3.98\cos(2.05°) \approx 3.977$

75. O cateto oposto θ tem comprimento $31\tan(42°) \approx 27.912$

76. A árvore tem cerca de 47 pés de altura.

77. As luzes distam cerca de 75 pés uma da outra.

78. (b) O incêndio está a cerca de 4581 pés da base da torre.
    (c) O mapinguari correu $200\cot(6°) - 200\cot(6.5°) \approx 147$ pés naqueles 10 segundos. Isso dá $\approx$ 10 milhas por hora. Na segunda observação, o mapinguari estava ≈ 1755 pés da torre, o que significa que ele, se mantiver o ritmo, alcançará a torre em cerca de 2 minutos.

79. A árvore tem cerca de 41 pés de altura.

80. O barco percorreu cerca de 244 pés.

81. A torre tem cerca de 682 pés de altura. O cabo de sustentação atinge o solo a cerca de 731 pés de distância da base da torre.

27 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Nos Exercícios 1 - 6, utilize o fato da função ser par ou ímpar para verificar a identidade. Suponha que todas as quantidades estejam definidas.

1. $\sin(3\pi - 2\theta) = -\sin(2\theta - 3\pi)$
2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4} - 5t\right) = \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $\tan(-t^2 + 1) = -\tan(t^2 - 1)$
4. $\csc(-\theta - 5) = -\csc(\theta + 5)$
5. $\sec(-6t) = \sec(6t)$
6. $\cot(9 - 7\theta) = -\cot(7\theta - 9)$

Nos Exercícios 7 - 21, use as Identidades de Soma e Diferença para encontrar o valor exato. Você talvez precisse de outras identidades também.

7. $\cos(75°)$
8. $\sec(165°)$
9. $\sin(105°)$
10. $\csc(195°)$
11. $\cot(255°)$
12. $\tan(375°)$
13. $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$
14. $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
15. $\tan\left(\frac{13\pi}{12}\right)$
16. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
17. $\tan\left(\frac{17\pi}{12}\right)$
18. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
19. $\cot\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
20. $\csc\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
21. $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
22. Se α é um ângulo do Quadrante IV com $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, e $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, onde $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, encontre
    (a) $\cos(\alpha + \beta)$
    (b) $\sin(\alpha + \beta)$
    (c) $\tan(\alpha + \beta)$
    (d) $\cos(\alpha - \beta)$
    (e) $\sin(\alpha - \beta)$
    (f) $\tan(\alpha - \beta)$
23. Se $\csc(\alpha) = 3$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e β é um ângulo do Quadrante II com $\tan(\beta) = -7$, encontre
    (a) $\cos(\alpha + \beta)$
    (b) $\sin(\alpha + \beta)$
    (c) $\tan(\alpha + \beta)$
    (d) $\cos(\alpha - \beta)$
    (e) $\sin(\alpha - \beta)$
    (f) $\tan(\alpha - \beta)$
24. Se $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$, onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e $\cos(\beta) = \frac{12}{13}$ onde $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, encontre
    (a) $\sin(\alpha + \beta)$
    (b) $\cos(\alpha - \beta)$
    (c) $\tan(\alpha - \beta)$

25. Se $\sec(\alpha) = -\frac{5}{3}$, onde $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, e $\tan(\beta) = \frac{24}{7}$, onde $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, encontre

(a) $\csc(\alpha - \beta)$ (b) $\sec(\alpha + \beta)$ (c) $\cot(\alpha + \beta)$

Nos Exercícios 26 - 38, verifique a identidade.

26. $\cos(\theta - \pi) = -\cos(\theta)$

27. $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

28. $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\theta)$

29. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$

30. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta)$

31. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$

32. $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta)$

33. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{1+\cot(\alpha)\tan(\beta)}{1-\cot(\alpha)\tan(\beta)}$

34. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

35. $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)}{\tan(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\beta)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\beta)\cos(\beta)}$

36. $\dfrac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h} = \cos(t)\left(\dfrac{\sin(h)}{h}\right) + \sin(t)\left(\dfrac{\cos(h)-1}{h}\right)$

37. $\dfrac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h} = \cos(t)\left(\dfrac{\cos(h)-1}{h}\right) - \sin(t)\left(\dfrac{\sin(h)}{h}\right)$

38. $\dfrac{\tan(t+h)-\tan(t)}{h} = \left(\dfrac{\tan(h)}{h}\right)\left(\dfrac{\sec^2(t)}{1-\tan(t)\tan(h)}\right)$

Nos Exercícios 39 - 48, utilize as Fórmulas de Arco Metade para encontrar o valor exato. Você talvez precise de outras identidades também.

39. $\cos(75°)$ (compare com o Exercício 7)

40. $\sin(105°)$ (compare com o Exercício 9)

41. $\cos(67.5°)$

42. $\sin(157.5°)$

43. $\tan(112.5°)$

44. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ (compare com o Exercício 16)

45. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (compare com o Exercício 18)

46. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

47. $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

48. $\tan\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Nos Exercícios 49 - 58, use as informações fornecidas sobre θ para encontrar os valores exatos de

- $\sin(2\theta)$
- $\cos(2\theta)$
- $\tan(2\theta)$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

49. $\sin(\theta) = -\frac{7}{25}$ onde $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
50. $\cos(\theta) = \frac{28}{53}$ onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
51. $\tan(\theta) = \frac{12}{5}$ onde $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
52. $\csc(\theta) = 4$ onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
53. $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$ onde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
54. $\sin(\theta) = -\frac{4}{5}$ onde $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
55. $\cos(\theta) = \frac{12}{13}$ onde $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
56. $\sin(\theta) = \frac{5}{13}$ onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
57. $\sec(\theta) = \sqrt{5}$ onde $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
58. $\tan(\theta) = -2$ onde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Nos Exercícios 59 - 73, verifique a identidade. Suponha que todas as quantidades estejam definidas.

59. $(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 = 1 + \sin(2\theta)$
60. $(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2 = 1 - \sin(2\theta)$
61. $\tan(2\theta) = \dfrac{1}{1 - \tan(\theta)} - \dfrac{1}{1 + \tan(\theta)}$
62. $\csc(2\theta) = \dfrac{\cot(\theta) + \tan(\theta)}{2}$
63. $8\sin^4(\theta) = \cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 3$
64. $8\cos^4(\theta) = \cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3$
65. $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$
66. $\sin(4\theta) = 4\sin(\theta)\cos^3(\theta) - 4\sin^3(\theta)\cos(\theta)$
67. $32\sin^2(\theta)\cos^4(\theta) = 2 + \cos(2\theta) - 2\cos(4\theta) - \cos(6\theta)$
68. $32\sin^4(\theta)\cos^2(\theta) = 2 - \cos(2\theta) - 2\cos(4\theta) + \cos(6\theta)$
69. $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$
70. $\cos(8\theta) = 128\cos^8(\theta) - 256\cos^6(\theta) + 160\cos^4(\theta) - 32\cos^2(\theta) + 1$ (Dica: Use o resultado do Exercício 69.)
71. $\sec(2\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} + \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$
72. $\dfrac{1}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} + \dfrac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} = \dfrac{2\cos(\theta)}{\cos(2\theta)}$
73. $\dfrac{1}{\cos(\theta) - \sin(\theta)} - \dfrac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} = \dfrac{2\sin(\theta)}{\cos(2\theta)}$

Nos Exercícios 74 - 79, escreva o produto dado como uma soma. Talvez seja necessário usar outras identidades.

74. $\cos(3\theta)\cos(5\theta)$
75. $\sin(2\theta)\sin(7\theta)$
76. $\sin(9\theta)\cos(\theta)$
77. $\cos(2\theta)\cos(6\theta)$
78. $\sin(3\theta)\sin(2\theta)$
79. $\cos(\theta)\sin(3\theta)$

Nos Exercícios 80 - 85, escreva a soma dada como um produto.

80. $\cos(3\theta) + \cos(5\theta)$
81. $\sin(2\theta) - \sin(7\theta)$
82. $\cos(5\theta) - \cos(6\theta)$
83. $\sin(9\theta) - \sin(-\theta)$
84. $\sin(\theta) + \cos(\theta)$
85. $\cos(\theta) - \sin(\theta)$

86. Suponha que θ seja um ângulo do Quadrante I com $\sin(\theta) = x$. Verifique as seguintes fórmulas

    (a) $\cos(\theta) = \sqrt{1 - x^2}$
    (b) $\sin(2\theta) = 2x\sqrt{1 - x^2}$
    (c) $\cos(2\theta) = 1 - 2x^2$

87. Discuta com seus colegas como cada uma das fórmulas no Exercício 86 muda se assumirmos que θ é um ângulo do Quadrante II, III ou IV.

88. Suponha que θ seja um ângulo do Quadrante I com $\tan(\theta) = x$. Verifique as seguintes fórmulas

    (a) $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
    (b) $\sin(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
    (c) $\sin(2\theta) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
    (d) $\cos(2\theta) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

89. Discuta com seus colegas como cada uma das fórmulas no Exercício 88 muda se assumirmos que θ é um ângulo do Quadrante II, III ou IV.

90. Se $\sin(\theta) = \dfrac{x}{2}$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $\cos(2\theta)$ em termos de x.

91. Se $\tan(\theta) = \dfrac{x}{7}$ para $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $\sin(2\theta)$ em termos de x.

92. Se $\sec(\theta) = \dfrac{x}{4}$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)|$ em termos de x.

93. Mostre que $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ para todo θ.

94. Seja θ um ângulo do Quadrante III com $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{5}$. Mostre que esta informação não é suficiente para determinar o sinal de $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ assumindo primeiro que $3\pi < \theta < \dfrac{7\pi}{2}$ e então assumindo que $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ e calculando $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ em ambos os casos.

95. Sem usar sua calculadora, mostre que $\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

96. No exercício 69, você verificou uma identidade que expressa cos(4θ) como um polinômio em termos de cos(θ). Você consegue encontrar um polinômio em termos de cos(θ) para cos(5θ)? cos(6θ)? Você consegue encontrar um padrão para que cos($n\theta$) possa ser escrito como um polinômio em cosseno para qualquer número natural n?

97. No exercício 65, você verifica uma identidade que expressa sin(3θ) como um polinômio em termos de sin(θ). Você pode fazer o mesmo para sin(5θ)? E quanto a sin(4θ)? Se não, o que há de errado?

RESPOSTAS

7. $\cos(75°) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

8. $\sec(165°) = -\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{2}-\sqrt{6}$

9. $\sin(105°) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

10. $\csc(195°) = \dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

11. $\cot(255°) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$

12. $\tan(375°) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

13. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

14. $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

15. $\tan\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

16. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

17. $\tan\left(\dfrac{17\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

18. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

19. $\cot\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = -(2+\sqrt{3})$

20. $\csc\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

21. $\sec\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

22. (a) $\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ (b) $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

(c) $\tan(\alpha+\beta) = -7$ (d) $\cos(\alpha-\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(e) $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (f) $\tan(\alpha-\beta) = -1$

23. (a) $\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{4+7\sqrt{2}}{30}$ (b) $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{28-\sqrt{2}}{30}$

(c) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{-28+\sqrt{2}}{4+7\sqrt{2}} = \dfrac{63-100\sqrt{2}}{41}$ (d) $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{-4+7\sqrt{2}}{30}$

(e) $\sin(\alpha-\beta) = -\dfrac{28+\sqrt{2}}{30}$ (f) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{28+\sqrt{2}}{4-7\sqrt{2}} = -\dfrac{63+100\sqrt{2}}{41}$

24. (a) $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{16}{65}$ (b) $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{33}{65}$ (c) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{56}{33}$

25. (a) $\csc(\alpha-\beta) = -\dfrac{5}{4}$ (b) $\sec(\alpha+\beta) = \dfrac{125}{117}$ (c) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{117}{44}$

39. $\cos(75^\circ) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

40. $\sin(105^\circ) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

41. $\cos(67.5^\circ) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

42. $\sin(157.5^\circ) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

43. $\tan(112.5^\circ) = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -1-\sqrt{2}$

44. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

45. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

46. $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

47. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

48. $\tan\left(\dfrac{7\pi}{8}\right) = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 1-\sqrt{2}$

49.
- $\sin(2\theta) = -\dfrac{336}{625}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{527}{625}$
- $\tan(2\theta) = -\dfrac{336}{527}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{1}{7}$

50.
- $\sin(2\theta) = \dfrac{2520}{2809}$
- $\cos(2\theta) = -\dfrac{1241}{2809}$
- $\tan(2\theta) = -\dfrac{2520}{1241}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{106}}{106}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{9\sqrt{106}}{106}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{5}{9}$

51.
- $\sin(2\theta) = \dfrac{120}{169}$
- $\cos(2\theta) = -\dfrac{119}{169}$
- $\tan(2\theta) = -\dfrac{120}{119}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}$

52.
- $\sin(2\theta) = -\dfrac{\sqrt{15}}{8}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{15}}{8-2\sqrt{15}}}$
  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 4+\sqrt{15}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{7}{8}$
- $\tan(2\theta) = -\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

53.
- $\sin(2\theta) = \dfrac{24}{25}$
- $\cos(2\theta) = -\dfrac{7}{25}$
- $\tan(2\theta) = -\dfrac{24}{7}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

54.
- $\sin(2\theta) = \frac{24}{25}$
- $\cos(2\theta) = -\frac{7}{25}$
- $\tan(2\theta) = -\frac{24}{7}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2$

55.
- $\sin(2\theta) = -\frac{120}{169}$
- $\cos(2\theta) = \frac{119}{169}$
- $\tan(2\theta) = -\frac{120}{119}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{26}}{26}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{5}$

56.
- $\sin(2\theta) = -\frac{120}{169}$
- $\cos(2\theta) = \frac{119}{169}$
- $\tan(2\theta) = -\frac{120}{119}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5\sqrt{26}}{26}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{26}}{26}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 5$

57.
- $\sin(2\theta) = -\frac{4}{5}$
- $\cos(2\theta) = -\frac{3}{5}$
- $\tan(2\theta) = \frac{4}{3}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$

  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{10}$

58.
- $\sin(2\theta) = -\frac{4}{5}$
- $\cos(2\theta) = -\frac{3}{5}$
- $\tan(2\theta) = \frac{4}{3}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}$
- $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$

  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{10}$

74. $\frac{\cos(2\theta) + \cos(8\theta)}{2}$

75. $\frac{\cos(5\theta) - \cos(9\theta)}{2}$

76. $\frac{\sin(8\theta) + \sin(10\theta)}{2}$

77. $\frac{\cos(4\theta) + \cos(8\theta)}{2}$

78. $\frac{\cos(\theta) - \cos(5\theta)}{2}$

79. $\frac{\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{2}$

80. $2\cos(4\theta)\cos(\theta)$

81. $-2\cos\left(\frac{9}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right)$

82. $2\sin\left(\frac{11}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$

83. $2\cos(4\theta)\sin(5\theta)$

84. $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

85. $-\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

90. $1 - \frac{x^2}{2}$

91. $\frac{14x}{x^2 + 49}$

92. $\ln|x + \sqrt{x^2 + 16}| - \ln(4)$

Nos Exercícios 1 - 12, represente graficamente um ciclo da função dada. Indique o período, amplitude, mudança de fase e mudança vertical da função.

1. $y = 3\sin(x)$
2. $y = \sin(3x)$
3. $y = -2\cos(x)$
4. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
5. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
6. $y = \sin(2x - \pi)$
7. $y = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$
8. $y = \cos(3x - 2\pi) + 4$
9. $y = \sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$
10. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 1$
11. $y = -\frac{3}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$
12. $y = 4\sin(-2\pi x + \pi)$

Nos Exercícios 13 - 24, represente graficamente um ciclo da função dada. Indique o período da função.

13. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
14. $y = 2\tan\left(\frac{1}{4}x\right) - 3$
15. $y = \frac{1}{3}\tan(-2x - \pi) + 1$
16. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
17. $y = -\csc\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
18. $y = -\frac{1}{3}\sec\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$
19. $y = \csc(2x - \pi)$
20. $y = \sec(3x - 2\pi) + 4$
21. $y = \csc\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$
22. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
23. $y = -11\cot\left(\frac{1}{5}x\right)$
24. $y = \frac{1}{3}\cot\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$

Nos Exercícios 25 - 34, mostre que a função é uma senóide reescrevendo-a nas formas $C(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B$ e $S(x) = A\sin(\omega x + \phi) + B$ para $\omega > 0$ e $0 \le \phi < 2\pi$.

25. $f(x) = \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}\cos(x) + 1$
26. $f(x) = 3\sqrt{3}\sin(3x) - 3\cos(3x)$
27. $f(x) = -\sin(x) + \cos(x) - 2$
28. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)$
29. $f(x) = 2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sin(x)$
30. $f(x) = \frac{3}{2}\cos(2x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + 6$
31. $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(5x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(5x)$
32. $f(x) = -6\sqrt{3}\cos(3x) - 6\sin(3x) - 3$
33. $f(x) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(x) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(x)$
34. $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{6}\right) - 3\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

35. Nos Exercícios 25 - 34, você deve ter notado uma relação entre as fases ϕ para $S(x)$ e $C(x)$. Mostre que se $f(x) = A\sin(\omega x + \alpha) + B$, então $f(x) = A\cos(\omega x + \beta) + B$ onde $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

36. Seja ϕ um ângulo medido em radianos e seja $P(a, b)$ um ponto no lado terminal de ϕ quando ele é desenhado na posição padrão. Use identidades conhecidas para mostrar que $f(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x) + B$ (com $\omega > 0$) pode ser reescrito como $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega x + \phi) + B$.

37.

Nos Exercícios 38 - 43, verifique a identidade representando graficamente os lados direito e esquerdo no GeoGebra.

38. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

39. $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$

40. $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

41. $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

42. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

43. $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

Nos Exercícios 44 - 50, represente graficamente a função com a ajuda do GeoGebra e discuta as questões apresentadas com seus colegas.

44. $f(x) = \cos(3x) + \sin(x)$. Esta função é periódica? Se sim, qual é o período?

45. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Qual parece ser a assíntota horizontal do gráfico?

46. $f(x) = x\sin(x)$. Faça um gráfico $y = \pm x$ no mesmo conjunto de eixos e descreva o comportamento de f.

47. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. O que está acontecendo como $x \to 0$?

48. $f(x) = x - \tan(x)$. Faça um gráfico $y = x$ no mesmo conjunto de eixos e descreva o comportamento de f.

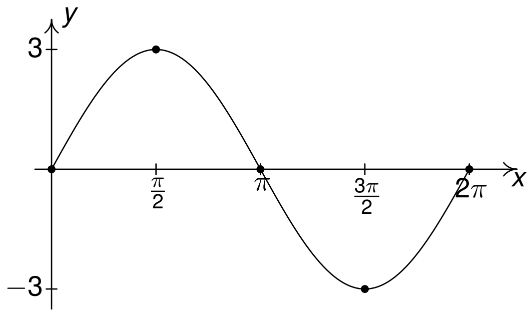
49. $f(x) = e^{-0{,}1x}(\cos(2x) + \sin(2x))$. Faça um gráfico $y = \pm e^{-0.1x}$ no mesmo conjunto de eixos e descreva o comportamento de f.

50. $f(x) = e^{-0{,}1x}(\cos(2x) + 2\sin(x))$. Faça um gráfico $y = \pm e^{-0.1x}$ no mesmo conjunto de eixos e descreva o comportamento de f.

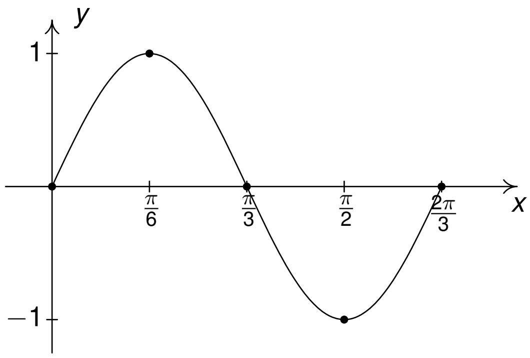
51. Mostre que uma função constante f é periódica mostrando que $f(x + 117) = f(x)$ para todos os números reais x. Em seguida, mostre que f não tem ponto, mostrando que você não pode encontrar um *menor* número p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todos os números reais x. Dito de outra forma, mostre que $f(x+p) = f(x)$ para todos os números reais x para TODOS os valores de $p > 0$, então não existe menor valor para satisfazer a definição de 'período'.

RESPOSTAS

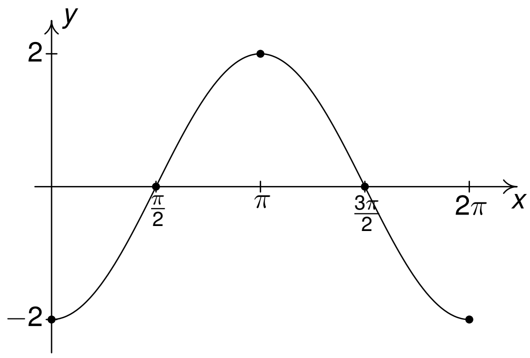
1. $y = 3\sin(x)$
   Período: 2π
   Amplitude: 3
   Mudança de Fase: 0
   Deslocamento Vertical: 0



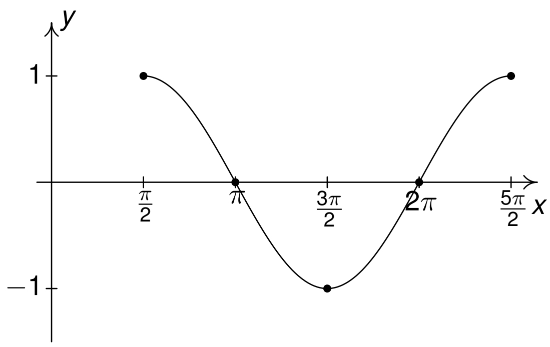
2. $y = \sin(3x)$
   Período: $\dfrac{2\pi}{3}$
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: 0
   Deslocamento Vertical: 0



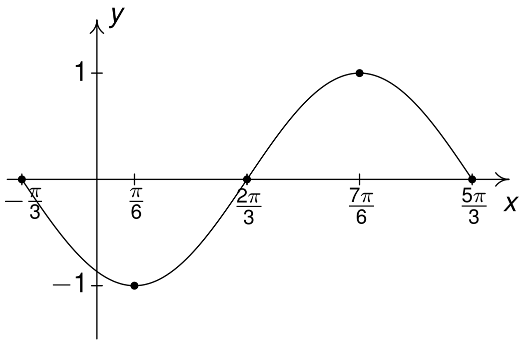
3. $y = -2\cos(x)$
   Período: 2π
   Amplitude: 2
   Mudança de Fase: 0
   Deslocamento Vertical: 0



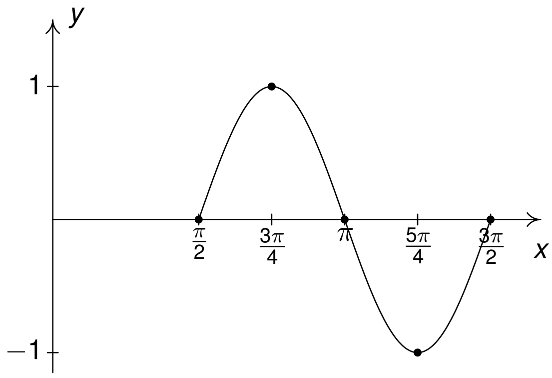
4. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
   Período: 2π
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: $\dfrac{\pi}{2}$
   Deslocamento Vertical: 0



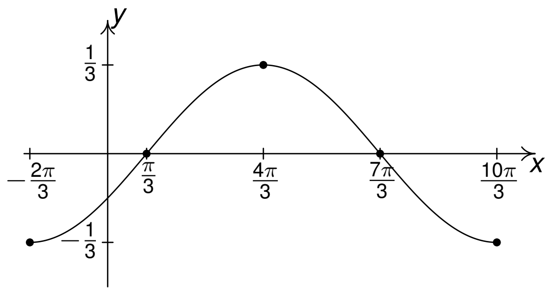
5. $y = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
   Período: 2π
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: $-\dfrac{\pi}{3}$
   Deslocamento Vertical: 0



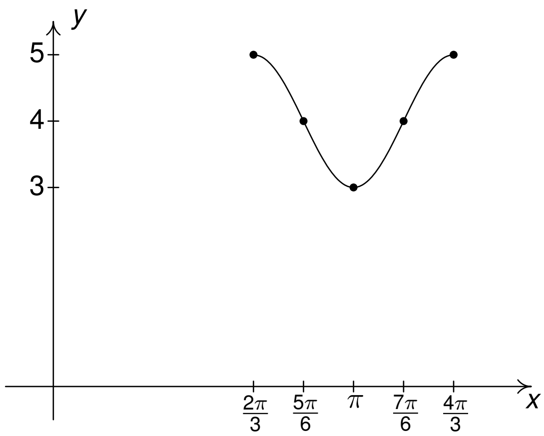
6. $y = \sin(2x - \pi)$
   Período: π
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: $\frac{\pi}{2}$
   Deslocamento Vertical: 0



7. $y = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$
   Período: 4π
   Amplitude: $\frac{1}{3}$
   Mudança de Fase: $-\frac{2\pi}{3}$
   Deslocamento Vertical: 0

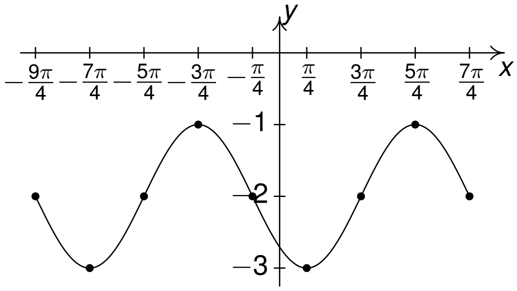


8. $y = \cos(3x - 2\pi) + 4$
   Período: $\frac{2\pi}{3}$
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: $\frac{2\pi}{3}$
   Deslocamento Vertical: 4

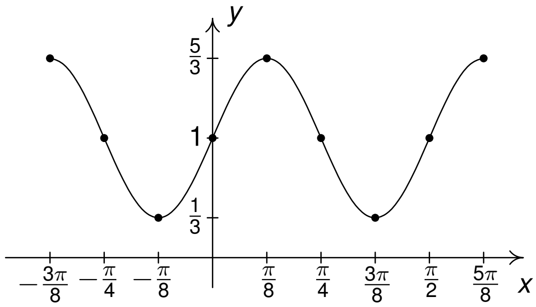


9. $y = \sin\left(-x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$
   Período: 2π
   Amplitude: 1
   Mudança de Fase: $-\frac{\pi}{4}$ (É necessário usar $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ para encontrar isso.)[10]
   Deslocamento Vertical: -2

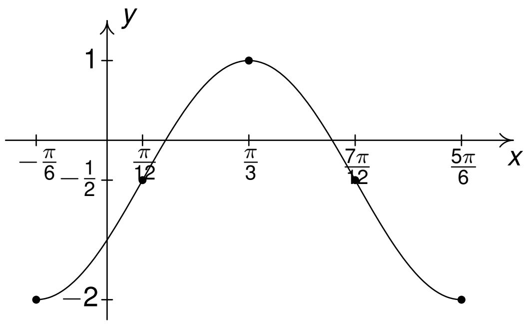
[10] Dois ciclos do gráfico são mostrados para ilustrar a discrepância.



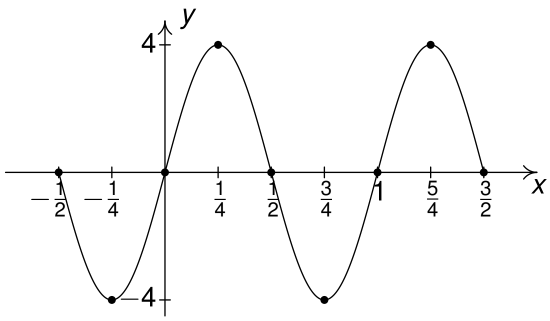
10. $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 1$
    Período: $\frac{\pi}{2}$
    Amplitude: $\frac{2}{3}$
    Mudança de Fase: $\frac{\pi}{8}$ (É necessário usar $y = \frac{2}{3}\cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ para encontrar isso.)
    Deslocamento Vertical: 1



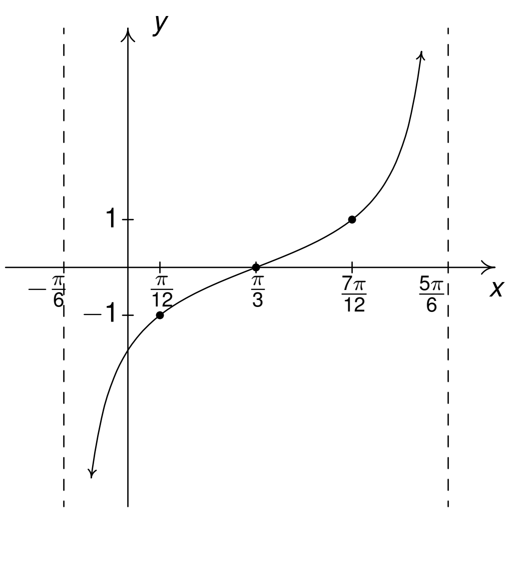
11. $y = -\frac{3}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$
    Período: π
    Amplitude: $\frac{3}{2}$
    Mudança de Fase: $-\frac{\pi}{6}$
    Deslocamento Vertical: $-\frac{1}{2}$



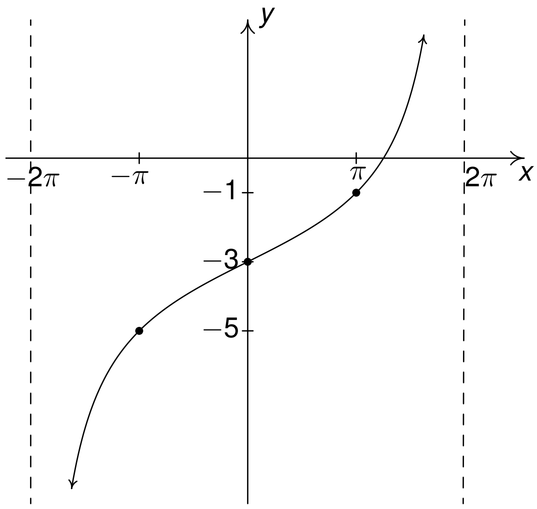
12. $y = 4\sin(-2\pi x + \pi)$
    Período: 1
    Amplitude: 4
    Mudança de Fase: $\frac{1}{2}$ (É necessário usar $y = -4\sin(2\pi x - \pi)$ para encontrar isso.)
    Deslocamento Vertical: 0



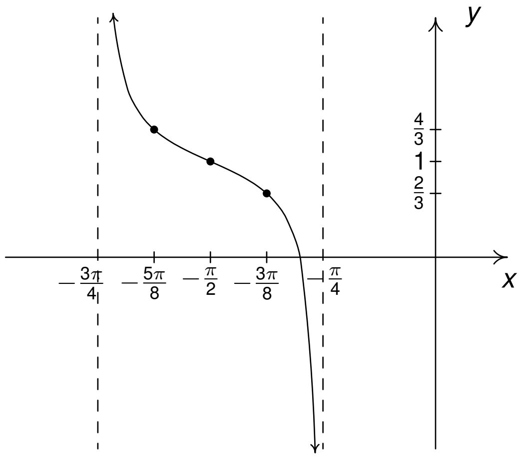
13. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
    Período: π



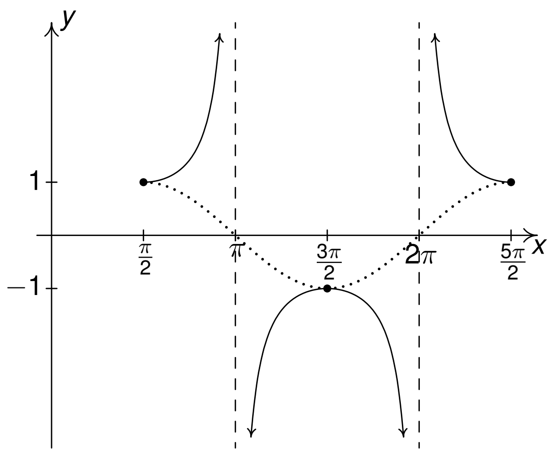
14. $y = 2\tan\left(\frac{1}{4}x\right) - 3$
Período: 4π



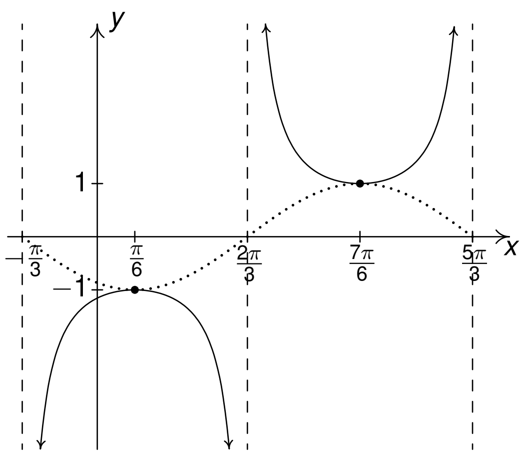
15. $y = \frac{1}{3}\tan(-2x - \pi) + 1$
é equivalente a
$y = -\frac{1}{3}\tan(2x + \pi) + 1$
Período: $\frac{\pi}{2}$



16. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
Comece com $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
Período: 2π



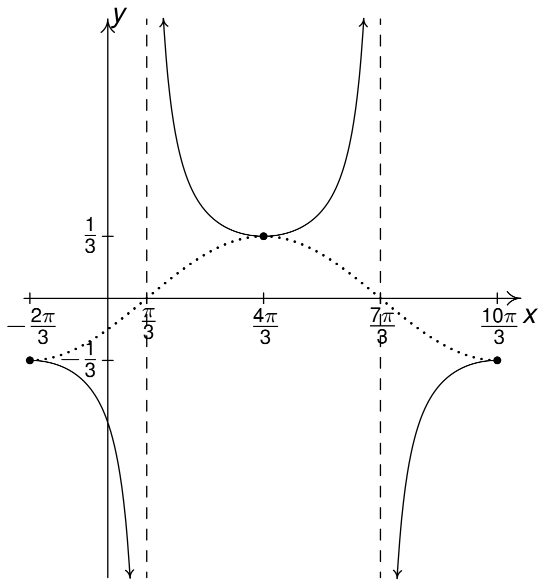
17. $y = -\csc\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
Comece com $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
Período: 2π



18. $y = -\dfrac{1}{3}\sec\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Comece com $y = -\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

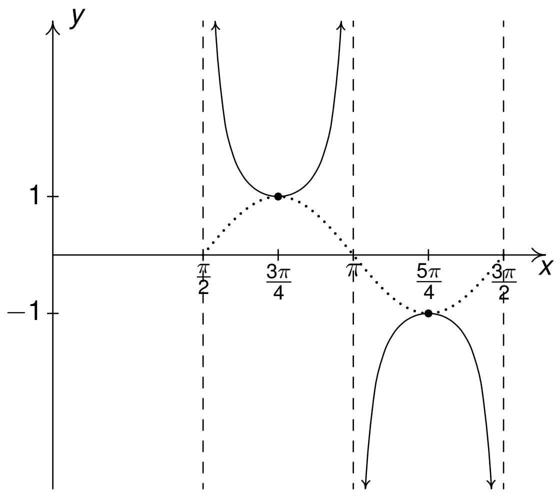
Período: 4π



19. $y = \csc(2x - \pi)$

Comece com $y = \sin(2x - \pi)$

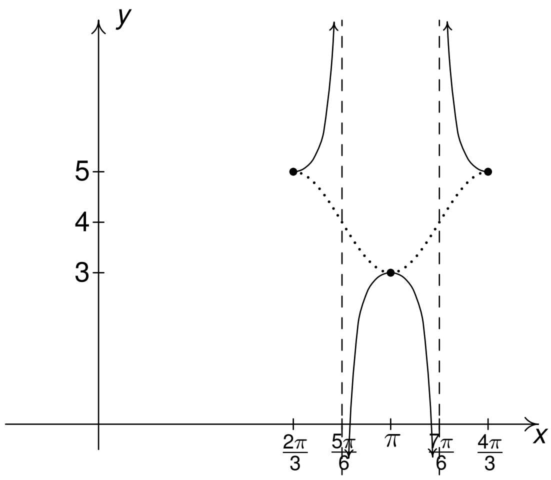
Período: π



20. $y = \sec(3x - 2\pi) + 4$

Comece com $y = \cos(3x - 2\pi) + 4$

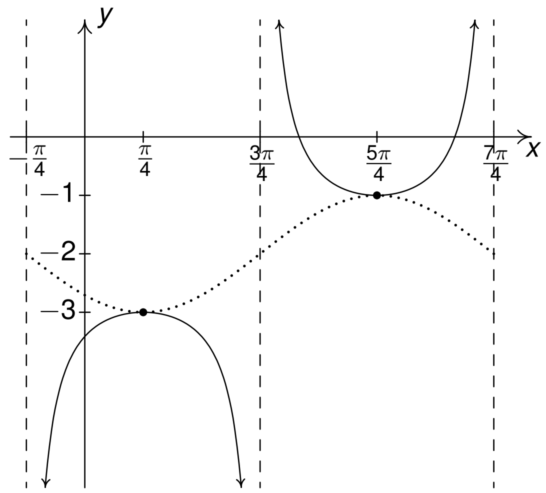
Período: $\dfrac{2\pi}{3}$



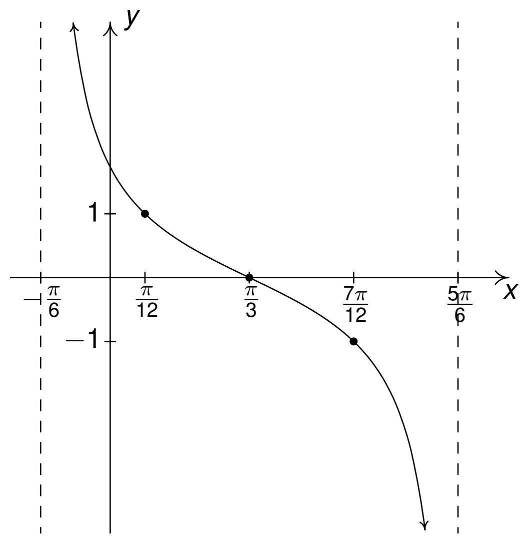
21. $y = \csc\left(-x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$

Comece com $y = \sin\left(-x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2$

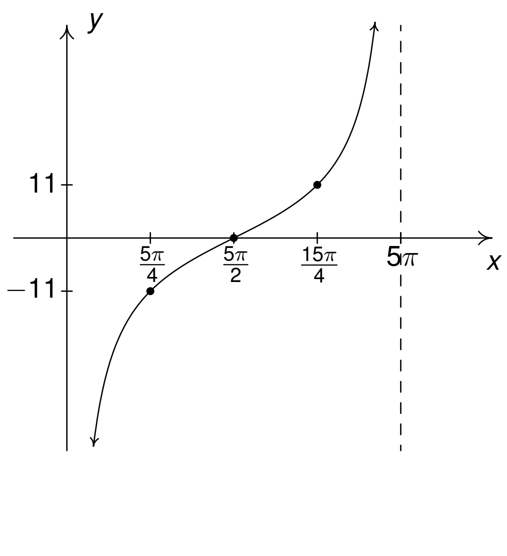
Período: 2π



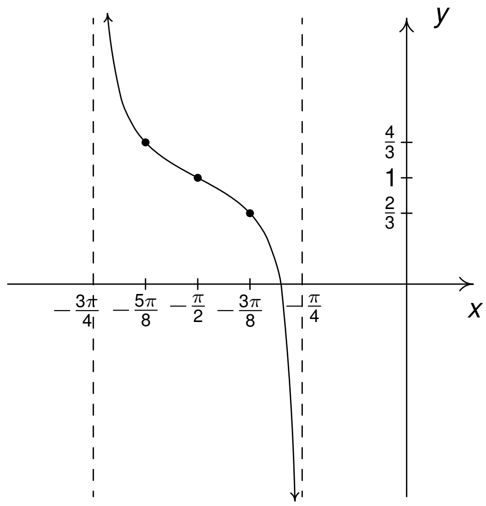
22. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
    Período: π



23. $y = -11\cot\left(\dfrac{1}{5}x\right)$
    Período: 5π



24. $y = \dfrac{1}{3}\cot\left(2x + \dfrac{3\pi}{2}\right) + 1$
    Período: $\dfrac{\pi}{2}$



25. $f(x) = \sqrt{2}\sin(x) + \sqrt{2}\cos(x) + 1 = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\cos\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) + 1$

26. $f(x) = 3\sqrt{3}\sin(3x) - 3\cos(3x) = 6\sin\left(3x + \frac{11\pi}{6}\right) = 6\cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$

27. $f(x) = -\sin(x) + \cos(x) - 2 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) - 2 = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

28. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) = \sin\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right)$

29. $f(x) = 2\sqrt{3}\cos(x) - 2\sin(x) = 4\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

30. $f(x) = \frac{3}{2}\cos(2x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + 6 = 3\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + 6 = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 6$

31. $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(5x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(5x) = \sin\left(5x + \frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right)$

32. $f(x) = -6\sqrt{3}\cos(3x) - 6\sin(3x) - 3 = 12\sin\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right) - 3 = 12\cos\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) - 3$

33. $f(x) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(x) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 5\sin\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) = 5\cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$

34. $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{6}\right) - 3\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{6}\right) = 6\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{5\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\frac{x}{6} + \frac{7\pi}{6}\right)$

29 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Nos Exercícios 1 - 40, encontre o valor exato.

1. $\arcsin(-1)$
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
4. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $\arcsin(0)$
6. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
7. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
9. $\arcsin(1)$
10. $\arccos(-1)$
11. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
12. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
13. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
14. $\arccos(0)$
15. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$
16. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
17. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
18. $\arccos(1)$
19. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$
20. $\arctan(-1)$
21. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
22. $\arctan(0)$
23. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
24. $\arctan(1)$
25. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$
26. $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)$
27. $\operatorname{arccot}(-1)$
28. $\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
29. $\operatorname{arccot}(0)$
30. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
31. $\operatorname{arccot}(1)$
32. $\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)$
33. $\operatorname{arcsec}(2)$
34. $\operatorname{arccsc}(2)$
35. $\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{2}\right)$
36. $\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{2}\right)$
37. $\operatorname{arcsec}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
38. $\operatorname{arccsc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
39. $\operatorname{arcsec}(1)$
40. $\operatorname{arccsc}(1)$

Nos Exercícios 41 - 48, suponha que a imagem do arco secante é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ e que a imagem do arco cossecante é $\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ao encontrar o valor exato.

41. $\operatorname{arcsec}(-2)$
42. $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)$
43. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
44. $\operatorname{arcsec}(-1)$
45. $\operatorname{arccsc}(-2)$
46. $\operatorname{arccsc}\left(-\sqrt{2}\right)$
47. $\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
48. $\operatorname{arccsc}(-1)$

Nos Exercícios 49 - 56, suponha que a imagem do arco secante é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e que a imagem do arco cossecante é $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ao encontrar o valor exato.

49. $\operatorname{arcsec}(-2)$
50. $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)$
51. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
52. $\operatorname{arcsec}(-1)$
53. $\operatorname{arccsc}(-2)$
54. $\operatorname{arccsc}\left(-\sqrt{2}\right)$
55. $\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
56. $\operatorname{arccsc}(-1)$

Nos Exercícios 57 - 86, encontre o valor exato ou declare que ele é indefinido.

57. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
58. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
59. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$
60. $\sin(\arcsin(-0.42))$
61. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{4}\right)\right)$
62. $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
63. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
64. $\cos\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$
65. $\cos(\arccos(-0.998))$
66. $\cos(\arccos(\pi))$
67. $\tan(\arctan(-1))$
68. $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$
69. $\tan\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)$
70. $\tan(\arctan(0.965))$
71. $\tan(\arctan(3\pi))$
72. $\cot(\operatorname{arccot}(1))$
73. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$
74. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(-\frac{7}{24}\right)\right)$
75. $\cot(\operatorname{arccot}(-0.001))$
76. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{17\pi}{4}\right)\right)$
77. $\sec(\operatorname{arcsec}(2))$
78. $\sec(\operatorname{arcsec}(-1))$
79. $\sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
80. $\sec(\operatorname{arcsec}(0.75))$
81. $\sec(\operatorname{arcsec}(117\pi))$
82. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{2}\right)\right)$
83. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$
84. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
85. $\csc(\operatorname{arccsc}(1.0001))$
86. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Nos Exercícios 87 - 106, encontre o valor exato ou declare que ele é indefinido.

87. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
88. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
89. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
90. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$
91. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
92. $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
93. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
94. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$
95. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
96. $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
97. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
98. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

99. $\operatorname{arctan}(\tan(\pi))$

100. $\operatorname{arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

101. $\operatorname{arctan}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

102. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

103. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

104. $\operatorname{arccot}(\cot(\pi))$

105. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

106. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Nos Exercícios 107 - 118, suponha que a imagem do arco secante é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ e que a imagem do arco cossecante é $\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ao encontrar o valor exato.

107. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

108. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

109. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

110. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

111. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

112. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

113. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

114. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

115. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

116. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$

117. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

118. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)$

Nos Exercícios 119 - 130, suponha que a imagem do arco secante é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e que a imagem do arco cossecante é $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ao encontrar o valor exato.

119. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

120. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

121. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

122. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

123. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

124. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

125. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

126. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

127. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

128. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$

129. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$

130. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)$

Nos Exercícios 131 - 154, encontre o valor exato ou declare que ele é indefinido.

131. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

132. $\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

133. $\sin\left(\arctan\left(-2\right)\right)$

134. $\sin\left(\operatorname{arccot}\left(\sqrt{5}\right)\right)$

135. $\sin\left(\operatorname{arccsc}\left(-3\right)\right)$

136. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$

137. $\cos\left(\arctan\left(\sqrt{7}\right)\right)$

138. $\cos\left(\operatorname{arccot}\left(3\right)\right)$

139. $\cos\left(\operatorname{arcsec}\left(5\right)\right)$

140. $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right)$

141. $\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

142. $\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

143. $\tan\left(\operatorname{arccot}\left(12\right)\right)$

144. $\cot\left(\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

145. $\cot\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

146. $\cot\left(\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{5}\right)\right)$

147. $\cot\left(\arctan\left(0.25\right)\right)$

148. $\sec\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

149. $\sec\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$

150. $\sec\left(\arctan\left(10\right)\right)$

151. $\sec\left(\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right)$

152. $\csc\left(\operatorname{arccot}\left(9\right)\right)$

153. $\csc\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

154. $\csc\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

Nos Exercícios 155 - 164, encontre o valor exato ou declare que ele é indefinido.

155. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)+\frac{\pi}{4}\right)$

156. $\cos\left(\operatorname{arcsec}(3)+\arctan(2)\right)$

157. $\tan\left(\arctan(3)+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

158. $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$

159. $\sin\left(2\operatorname{arccsc}\left(\frac{13}{5}\right)\right)$

160. $\sin\left(2\arctan\left(2\right)\right)$

161. $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

162. $\cos\left(2\operatorname{arcsec}\left(\frac{25}{7}\right)\right)$

163. $\cos\left(2\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{5}\right)\right)$

164. $\sin\left(\frac{\arctan(2)}{2}\right)$

Nos Exercícios 165 - 184, reescreva a quantidade como expressões algébricas de x e indique o domínio no qual a equivalência é válida.

165. $\sin(\arccos(x))$

166. $\cos(\arctan(x))$

167. $\tan(\arcsin(x))$

168. $\sec(\arctan(x))$

169. $\csc(\arccos(x))$

170. $\sin(2\arctan(x))$

171. $\sin(2\arccos(x))$

172. $\cos(2\arctan(x))$

173. $\sin(\arccos(2x))$

174. $\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$

175. $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

176. $\cos(\arctan(3x))$

177. $\sin(2\arcsin(7x))$

178. $\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

179. $\cos(2\arcsin(4x))$

180. $\sec(\arctan(2x))\tan(\arctan(2x))$

181. $\sin(\arcsin(x) + \arccos(x))$

182. $\cos(\arcsin(x) + \arctan(x))$

183. $\tan(2\arcsin(x))$

184. $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$

185. Se $\sin(\theta) = \frac{x}{2}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $\theta + \sin(2\theta)$ em termos de x.

186. Se $\tan(\theta) = \frac{x}{7}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ em termos de x.

187. Se $\sec(\theta) = \frac{x}{4}$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, encontre uma expressão para $4\tan(\theta) - 4\theta$ em termos de x.

Nos Exercícios 188 - 207, use o GeoGebra para encontrar soluções aproximadas no intervalo $[0, 2\pi)$.

188. $\sin(x) = \frac{7}{11}$

189. $\cos(x) = -\frac{2}{9}$

190. $\sin(x) = -0.569$

191. $\cos(x) = 0.117$

192. $\sin(x) = 0.008$

193. $\cos(x) = \frac{359}{360}$

194. $\tan(x) = 117$

195. $\cot(x) = -12$

196. $\sec(x) = \frac{3}{2}$

197. $\csc(x) = -\frac{90}{17}$

198. $\tan(x) = -\sqrt{10}$

199. $\sin(x) = \frac{3}{8}$

200. $\cos(x) = -\frac{7}{16}$

201. $\tan(x) = 0.03$

202. $\sin(x) = 0.3502$

203. $\sin(x) = -0.721$

204. $\cos(x) = 0.9824$

205. $\cos(x) = -0.5637$

206. $\cot(x) = \frac{1}{117}$

207. $\tan(x) = -0.6109$

Nos Exercícios 208 - 210, encontre os dois ângulos agudos no triângulo retângulo cujos lados têm os comprimentos dados. Expresse suas respostas usando medida de grau arredondada para duas casas decimais.

208. 3, 4 and 5

209. 5, 12 and 13

210. 336, 527 and 625

211. Um cabo de sustentação de 1000 pés de comprimento está preso ao topo de uma torre. Quando esticado, ele toca o solo nivelado a 360 pés da base da torre. Qual é o ângulo que o fio faz com o solo? Expresse sua resposta usando medida de grau arredondada para uma casa decimal.

212. O Grande Desfiladeiro do Mapinguari tem 7117 pés de profundidade. A partir desse ponto, um incêndio é visto em um local conhecido por estar a 10 milhas de distância da base da parede íngreme do cânion. Que ângulo de depressão é paramado pela linha de visão da borda do cânion até o fogo? Expresse sua resposta usando medida de grau arredondada para uma casa decimal.

213. Estantes estão sendo construídas na Biblioteca de Pesquisa, que deve ter 14 polegadas de profundidade. Uma haste de 18 polegadas será fixada na parede e na parte inferior da prateleira na borda afastada da parede, paramando um triângulo retângulo sob a prateleira para apoiá-la. Que ângulo, com aproximação de grau, a haste fará com a parede?

214. Um paraquedas está sendo puxado por um barco no Lago Ippizuti. O cabo tem 300 pés de comprimento e o paraquedas está 100 pés acima da superfície da água. Qual é o ângulo de elevação do barco até o paraquedas? Expresse sua resposta usando medida de grau arredondada para uma casa decimal.

215. Um programa de marcação e liberação para estudar a população de mapinguaris do Parque Nacional de Mapinguaris é iniciado. De uma torre de 200 pés de altura, um guarda florestal avista um mapinguari avançando pesadamente pela selva diretamente em direção à torre. Seja θ o ângulo de depressão do topo da torre até um ponto no solo. Se o alcance do rifle com um dardo tranquilizante para de 300 pés, encontre o menor valor de θ para o qual o ponto correspondente no solo está ao alcance do rifle. Arredonde sua resposta para o centésimo de grau mais próximo.

Nos Exercícios 216 - 221, reescreva a função dada como uma senóide da parama $S(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ usando os exercícios semelhantes da seção 28 para referência. Aproxime o valor de ϕ (que está em radianos, é claro) com quatro casas decimais.

216. $f(x) = 5\sin(3x) + 12\cos(3x)$

217. $f(x) = 3\cos(2x) + 4\sin(2x)$

218. $f(x) = \cos(x) - 3\sin(x)$

219. $f(x) = 7\sin(10x) - 24\cos(10x)$

220. $f(x) = -\cos(x) - 2\sqrt{2}\sin(x)$

221. $f(x) = 2\sin(x) - \cos(x)$

Nos Exercícios 222 - 233, encontre o domínio da função dada. Escreva suas respostas em notação de intervalo.

222. $f(x) = \arcsin(5x)$

223. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)$

224. $f(x) = \arcsin\left(2x^2\right)$

225. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

226. $f(x) = \arctan(4x)$

227. $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{2x}{x^2-9}\right)$

228. $f(x) = \arctan(\ln(2x-1))$ 229. $f(x) = \operatorname{arccot}(\sqrt{2x-1})$ 230. $f(x) = \operatorname{arcsec}(12x)$

231. $f(x) = \operatorname{arccsc}(x+5)$ 232. $f(x) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x^3}{8}\right)$ 233. $f(x) = \operatorname{arccsc}\left(e^{2x}\right)$

234. Mostre que $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ para $|x| \geq 1$ contanto que usemos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ como a imagem de $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$.

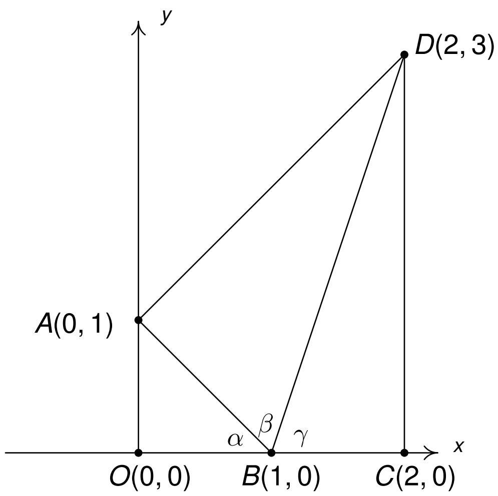
235. Mostre que $\operatorname{arccsc}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ para $|x| \geq 1$ contanto que usemos $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ como a imagem de $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$.

236. Mostre que $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

237.

238. Use a imagem a seguir para mostrar que

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$



(a) Claramente $\triangle AOB$ e $\triangle BCD$ são triângulos retângulos porque a reta que passa por O e A e a reta que passa por C e D são perpendiculares ao eixo x. Use a fórmula da distância para mostrar que $\triangle BAD$ também é um triângulo retângulo (com $\angle BAD$ sendo o ângulo reto), mostrando que os lados do triângulo satisfazem o Teorema de Pitágoras.

(b) Use $\triangle AOB$ para mostrar que $\alpha = \arctan(1)$

(c) Use $\triangle BAD$ para mostrar que $\beta = \arctan(2)$

(d) Use $\triangle BCD$ para mostrar que $\gamma = \arctan(3)$

(e) Use o fato de que O, B e C estão todos no eixo x para concluir que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Assim $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.

RESPOSTAS

1. $\arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
2. $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
3. $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$
4. $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$
5. $\arcsin(0) = 0$
6. $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
7. $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
8. $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
9. $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$
10. $\arccos(-1) = \pi$
11. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$
12. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$
13. $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
14. $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$
15. $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
16. $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
17. $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
18. $\arccos(1) = 0$
19. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
20. $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$
21. $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$
22. $\arctan(0) = 0$
23. $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
24. $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$
25. $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
26. $\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$
27. $\operatorname{arccot}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$
28. $\operatorname{arccot}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
29. $\operatorname{arccot}(0) = \dfrac{\pi}{2}$
30. $\operatorname{arccot}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
31. $\operatorname{arccot}(1) = \dfrac{\pi}{4}$
32. $\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
33. $\operatorname{arcsec}(2) = \dfrac{\pi}{3}$
34. $\operatorname{arccsc}(2) = \dfrac{\pi}{6}$
35. $\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
36. $\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
37. $\operatorname{arcsec}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$
38. $\operatorname{arccsc}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
39. $\operatorname{arcsec}(1) = 0$
40. $\operatorname{arccsc}(1) = \dfrac{\pi}{2}$
41. $\operatorname{arcsec}(-2) = \dfrac{4\pi}{3}$
42. $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$
43. $\operatorname{arcsec}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$
44. $\operatorname{arcsec}(-1) = \pi$
45. $\operatorname{arccsc}(-2) = \dfrac{7\pi}{6}$
46. $\operatorname{arccsc}\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$
47. $\operatorname{arccsc}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{4\pi}{3}$
48. $\operatorname{arccsc}(-1) = \dfrac{3\pi}{2}$

49. $\operatorname{arcsec}(-2) = \frac{2\pi}{3}$

50. $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

51. $\operatorname{arcsec}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$

52. $\operatorname{arcsec}(-1) = \pi$

53. $\operatorname{arccsc}(-2) = -\frac{\pi}{6}$

54. $\operatorname{arccsc}\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

55. $\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

56. $\operatorname{arccsc}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

57. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$

58. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

59. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{3}{5}$

60. $\sin(\arcsin(-0.42)) = -0.42$

61. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{4}\right)\right)$ é indefinido.

62. $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

63. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$

64. $\cos\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{5}{13}$

65. $\cos(\arccos(-0.998)) = -0.998$

66. $\cos(\arccos(\pi))$ é indefinido.

67. $\tan(\arctan(-1)) = -1$

68. $\tan\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) = \sqrt{3}$

69. $\tan\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right) = \frac{5}{12}$

70. $\tan(\arctan(0.965)) = 0.965$

71. $\tan(\arctan(3\pi)) = 3\pi$

72. $\cot(\operatorname{arccot}(1)) = 1$

73. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{3}\right)\right) = -\sqrt{3}$

74. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(-\frac{7}{24}\right)\right) = -\frac{7}{24}$

75. $\cot(\operatorname{arccot}(-0.001)) = -0.001$

76. $\cot\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{17\pi}{4}\right)\right) = \frac{17\pi}{4}$

77. $\sec(\operatorname{arcsec}(2)) = 2$

78. $\sec(\operatorname{arcsec}(-1)) = -1$

79. $\sec\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ é indefinido.

80. $\sec(\operatorname{arcsec}(0.75))$ é indefinido.

81. $\sec(\operatorname{arcsec}(117\pi)) = 117\pi$

82. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{2}\right)\right) = \sqrt{2}$

83. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

84. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ é indefinido.

85. $\csc(\operatorname{arccsc}(1.0001)) = 1.0001$

86. $\csc\left(\operatorname{arccsc}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ é indefinido.

87. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

88. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$

89. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

90. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$

91. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$

92. $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

93. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

94. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

95. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

96. $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

97. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

98. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

99. $\arctan(\tan(\pi)) = 0$

100. $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ é indefinido

101. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$

102. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

103. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

104. $\operatorname{arccot}(\cot(\pi))$ é indefinido

105. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

106. $\operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

107. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

108. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{4\pi}{3}$

109. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{7\pi}{6}$

110. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ é indefinido.

111. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

112. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

113. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{5\pi}{4}$

114. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

115. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2}$

116. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \frac{7\pi}{6}$

117. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = \frac{13\pi}{12}$

118. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = \frac{9\pi}{8}$

119. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

120. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

121. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$

122. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ é indefinido.

123. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

124. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

125. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

126. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

127. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$

128. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$

129. $\operatorname{arcsec}\left(\sec\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = \frac{11\pi}{12}$

130. $\operatorname{arccsc}\left(\csc\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\pi}{8}$

131. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

132. $\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$

133. $\sin\left(\arctan\left(-2\right)\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

134. $\sin\left(\operatorname{arccot}\left(\sqrt{5}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

135. $\sin\left(\operatorname{arccsc}\left(-3\right)\right) = -\frac{1}{3}$

136. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{12}{13}$

137. $\cos\left(\arctan\left(\sqrt{7}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

138. $\cos\left(\operatorname{arccot}\left(3\right)\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

139. $\cos\left(\operatorname{arcsec}\left(5\right)\right) = \frac{1}{5}$

140. $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right) = -2$

141. $\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\sqrt{3}$

142. $\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}$

143. $\tan\left(\operatorname{arccot}\left(12\right)\right) = \frac{1}{12}$

144. $\cot\left(\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{5}{12}$

145. $\cot\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \sqrt{3}$

146. $\cot\left(\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{5}\right)\right) = 2$

147. $\cot\left(\arctan\left(0.25\right)\right) = 4$

148. $\sec\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

149. $\sec\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{13}{5}$

150. $\sec\left(\arctan\left(10\right)\right) = \sqrt{101}$

151. $\sec\left(\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right) = -\sqrt{11}$

152. $\csc\left(\operatorname{arccot}\left(9\right)\right) = \sqrt{82}$

153. $\csc\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{5}{3}$

154. $\csc\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{13}}{2}$

155. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

156. $\cos\left(\operatorname{arcsec}(3) + \arctan(2)\right) = \frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{10}}{15}$

157. $\tan\left(\arctan(3) + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{1}{3}$

158. $\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = -\frac{24}{25}$

159. $\sin\left(2\operatorname{arccsc}\left(\frac{13}{5}\right)\right) = \frac{120}{169}$

160. $\sin\left(2\arctan\left(2\right)\right) = \frac{4}{5}$

161. $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{7}{25}$

162. $\cos\left(2\operatorname{arcsec}\left(\frac{25}{7}\right)\right) = -\frac{527}{625}$

163. $\cos\left(2\operatorname{arccot}\left(-\sqrt{5}\right)\right) = \dfrac{2}{3}$

164. $\sin\left(\dfrac{\arctan(2)}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}$

165. $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$

166. $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ para todo x

167. $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $-1 < x < 1$

168. $\sec(\arctan(x)) = \sqrt{1+x^2}$ para todo x

169. $\csc(\arccos(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ para $-1 < x < 1$

170. $\sin(2\arctan(x)) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ para todo x

171. $\sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$

172. $\cos(2\arctan(x)) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ para todo x

173. $\sin(\arccos(2x)) = \sqrt{1-4x^2}$ para $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

174. $\sin\left(\arccos\left(\dfrac{x}{5}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{5}$ para $-5 \leq x \leq 5$

175. $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ para $-2 \leq x \leq 2$

176. $\cos(\arctan(3x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+9x^2}}$ para todo x

177. $\sin(2\arcsin(7x)) = 14x\sqrt{1-49x^2}$ para $-\dfrac{1}{7} \leq x \leq \dfrac{1}{7}$

178. $\sin\left(2\arcsin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \dfrac{2x\sqrt{3-x^2}}{3}$ para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

179. $\cos(2\arcsin(4x)) = 1-32x^2$ para $-\dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{4}$

180. $\sec(\arctan(2x))\tan(\arctan(2x)) = 2x\sqrt{1+4x^2}$ para todo x

181. $\sin(\arcsin(x)+\arccos(x)) = 1$ para $-1 \leq x \leq 1$

182. $\cos(\arcsin(x)+\arctan(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ para $-1 \leq x \leq 1$

183. $\tan(2\arcsin(x)) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$ para x in $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

184. $\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{2\sqrt{x^2+1}}} & \text{para } x \geq 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{2\sqrt{x^2+1}}} & \text{para } x < 0 \end{cases}$

185. Se $\sin(\theta) = \frac{x}{2}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $\theta + \sin(2\theta) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

186. Se $\tan(\theta) = \frac{x}{7}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{7}\right) - \frac{7x}{x^2+49}$

187. Se $\sec(\theta) = \frac{x}{4}$ para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $4\tan(\theta) - 4\theta = \sqrt{x^2-16} - 4\text{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right)$

188. $x = \arcsin\left(\frac{7}{11}\right) + 2\pi k$ or $x = \pi - \arcsin\left(\frac{7}{11}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.6898, 2.4518$

189. $x = \arccos\left(-\frac{2}{9}\right) + 2\pi k$ or $x = -\arccos\left(-\frac{2}{9}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 1.7949, 4.4883$

190. $x = \pi + \arcsin(0.569) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arcsin(0.569) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 3.7469, 5.6779$

191. $x = \arccos(0.117) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arccos(0.117) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 1.4535, 4.8297$

192. $x = \arcsin(0.008) + 2\pi k$ or $x = \pi - \arcsin(0.008) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.0080, 3.1336$

193. $x = \arccos\left(\frac{359}{360}\right) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arccos\left(\frac{359}{360}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.0746, 6.2086$

194. $x = \arctan(117) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 1.56225, 4.70384$

195. $x = \arctan\left(-\frac{1}{12}\right) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 3.0585, 6.2000$

196. $x = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.8411, 5.4422$

197. $x = \pi + \arcsin\left(\frac{17}{90}\right) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arcsin\left(\frac{17}{90}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 3.3316, 6.0932$

198. $x = \arctan\left(-\sqrt{10}\right) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 1.8771, 5.0187$

199. $x = \arcsin\left(\frac{3}{8}\right) + 2\pi k$ or $x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{8}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.3844, 2.7572$

200. $x = \arccos\left(-\frac{7}{16}\right) + 2\pi k$ or $x = -\arccos\left(-\frac{7}{16}\right) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 2.0236, 4.2596$

201. $x = \arctan(0.03) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.0300, 3.1716$

202. $x = \arcsin(0.3502) + 2\pi k$ or $x = \pi - \arcsin(0.3502) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.3578, 2.784$

203. $x = \pi + \arcsin(0.721) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arcsin(0.721) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 3.9468, 5.4780$

204. $x = \arccos(0.9824) + 2\pi k$ or $x = 2\pi - \arccos(0.9824) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 0.1879, 6.0953$

205. $x = \arccos(-0.5637) + 2\pi k$ or $x = -\arccos(-0.5637) + 2\pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 2.1697, 4.1135$

206. $x = \arctan(117) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 1.5622,\ 4.7038$

207. $x = \arctan(-0.6109) + \pi k$, in $[0, 2\pi)$, $x \approx 2.5932,\ 5.7348$

208. $36.87°$ and $53.13°$ 209. $22.62°$ and $67.38°$ 210. $32.52°$ and $57.48°$

211. $68.9°$ 212. $7.7°$ 213. $51°$ 214. $19.5°$ 215. $41.81°$

216. $f(x) = 5\sin(3x) + 12\cos(3x) = 13\sin\left(3x + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right) \approx 13\sin(3x + 1.1760)$

217. $f(x) = 3\cos(2x) + 4\sin(2x) = 5\sin\left(2x + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \approx 5\sin(2x + 0.6435)$

218. $f(x) = \cos(x) - 3\sin(x) = \sqrt{10}\sin\left(x + \arccos\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\right) \approx \sqrt{10}\sin(x + 2.8198)$

219. $f(x) = 7\sin(10x) - 24\cos(10x) = 25\sin\left(10x + \arcsin\left(-\frac{24}{25}\right)\right) \approx 25\sin(10x - 1.2870)$

220. $f(x) = -\cos(x) - 2\sqrt{2}\sin(x) = 3\sin\left(x + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \approx 3\sin(x + 3.4814)$

221. $f(x) = 2\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{5}\sin\left(x + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right) \approx \sqrt{5}\sin(x - 0.4636)$

222. $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

223. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

224. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

225. $(-\infty, -\sqrt{5}] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$

226. $(-\infty, \infty)$

227. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

228. $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

229. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

230. $\left(-\infty, -\frac{1}{12}\right] \cup \left[\frac{1}{12}, \infty\right)$

231. $(-\infty, -6] \cup [-4, \infty)$

232. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

233. $[0, \infty)$

30 Equações e Inequações Trigonométricas

Nos Exercícios 1 a 18, encontre todas as soluções exatas da equação e, em seguida, liste aquelas que estão no intervalo $[0, 2\pi)$.

1. $\sin(5x) = 0$
2. $\cos(3x) = \frac{1}{2}$
3. $\sin(-2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\tan(6x) = 1$
5. $\csc(4x) = -1$
6. $\sec(3x) = \sqrt{2}$
7. $\cot(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\cos(9x) = 9$
9. $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = 0$
11. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
12. $2\cos\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
13. $\csc(x) = 0$
14. $\tan(2x - \pi) = 1$
15. $\tan^2(x) = 3$
16. $\sec^2(x) = \frac{4}{3}$
17. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$
18. $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

Nos Exercícios 19 a 42, resolva a equação, fornecendo as soluções exatas que estão no intervalo $[0, 2\pi)$.

19. $\sin(x) = \cos(x)$
20. $\sin(2x) = \sin(x)$
21. $\sin(2x) = \cos(x)$
22. $\cos(2x) = \sin(x)$
23. $\cos(2x) = \cos(x)$
24. $\cos(2x) = 2 - 5\cos(x)$
25. $3\cos(2x) + \cos(x) + 2 = 0$
26. $\cos(2x) = 5\sin(x) - 2$
27. $3\cos(2x) = \sin(x) + 2$
28. $2\sec^2(x) = 3 - \tan(x)$
29. $\tan^2(x) = 1 - \sec(x)$
30. $\cot^2(x) = 3\csc(x) - 3$
31. $\sec(x) = 2\csc(x)$
32. $\cos(x)\csc(x)\cot(x) = 6 - \cot^2(x)$
33. $\sin(2x) = \tan(x)$
34. $\cot^4(x) = 4\csc^2(x) - 7$
35. $\cos(2x) + \csc^2(x) = 0$
36. $\tan^3(x) = 3\tan(x)$
37. $\tan^2(x) = \frac{3}{2}\sec(x)$
38. $\cos^3(x) = -\cos(x)$
39. $\tan(2x) - 2\cos(x) = 0$
40. $\csc^3(x) + \csc^2(x) = 4\csc(x) + 4$
41. $2\tan(x) = 1 - \tan^2(x)$
42. $\tan(x) = \sec(x)$

Nos Exercícios 43 a 58, resolva a equação, fornecendo as soluções exatas que estão no intervalo $[0, 2\pi)$.

43. $\sin(6x)\cos(x) = -\cos(6x)\sin(x)$
44. $\sin(3x)\cos(x) = \cos(3x)\sin(x)$
45. $\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x) = 1$

46. $\cos(5x)\cos(3x) - \sin(5x)\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

47. $\sin(x) + \cos(x) = 1$

48. $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 1$

49. $\sqrt{2}\cos(x) - \sqrt{2}\sin(x) = 1$

50. $\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) = 1$

51. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$

52. $3\sqrt{3}\sin(3x) - 3\cos(3x) = 3\sqrt{3}$

53. $\cos(3x) = \cos(5x)$

54. $\cos(4x) = \cos(2x)$

55. $\sin(5x) = \sin(3x)$

56. $\cos(5x) = -\cos(2x)$

57. $\sin(6x) + \sin(x) = 0$

58. $\tan(x) = \cos(x)$

Nos Exercícios 59 a 70, resolva a desigualdade. Expressa a resposta exata em notação de intervalo, restringindo sua atenção a $0 \leq x \leq 2\pi$.

59. $\sin(x) \leq 0$

60. $\tan(x) \geq \sqrt{3}$

61. $\sec^2(x) \leq 4$

62. $\cos^2(x) > \frac{1}{2}$

63. $\cos(2x) \leq 0$

64. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$

65. $\cot^2(x) \geq \frac{1}{3}$

66. $2\cos(x) \geq 1$

67. $\sin(5x) \geq 5$

68. $\cos(3x) \leq 1$

69. $\sec(x) \leq \sqrt{2}$

70. $\cot(x) \leq 4$

Nos Exercícios 71 a 76, resolva a desigualdade. Expressa a resposta exata em notação de intervalo, restringindo sua atenção a $-\pi \leq x \leq \pi$.

71. $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

72. $\sin(x) > \frac{1}{3}$

73. $\sec(x) \leq 2$

74. $\sin^2(x) < \frac{3}{4}$

75. $\cot(x) \geq -1$

76. $\cos(x) \geq \sin(x)$

Nos Exercícios 77 a 82, resolva a desigualdade. Expressa a resposta exata em notação de intervalo, restringindo sua atenção a $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

77. $\csc(x) > 1$

78. $\cos(x) \leq \frac{5}{3}$

79. $\cot(x) \geq 5$

80. $\tan^2(x) \geq 1$

81. $\sin(2x) \geq \sin(x)$

82. $\cos(2x) \leq \sin(x)$

Nos Exercícios 83 a 91, expresse o domínio da função usando a notação de intervalo estendida.

83. $f(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1}$

84. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 1}$

85. $f(x) = \sqrt{\tan^2(x) - 1}$

86. $f(x) = \sqrt{2 - \sec(x)}$

87. $f(x) = \csc(2x)$

88. $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$

89. $f(x) = 3\csc(x) + 4\sec(x)$

90. $f(x) = \ln\left(|\cos(x)|\right)$

91. $f(x) = \arcsin(\tan(x))$

92. Com a ajuda de seus colegas, determine o número de soluções para $\sin(x) = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi)$. Em seguida, encontre o número de soluções para $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ e $\sin(4x) = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi)$. Deverá surgir um padrão. Explique como esse padrão ajudaria a resolver equações como $\sin(11x) = \frac{1}{2}$. Agora, considere $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e $\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = \frac{1}{2}$. O que você encontra? Substitua $\dfrac{1}{2}$ por -1 e repita toda a exploração.

RESPOSTAS

1. $x = \dfrac{\pi k}{5}$; $x = 0, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{3\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \pi, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{7\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5}, \dfrac{9\pi}{5}$

2. $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi k}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{9} + \dfrac{2\pi k}{3}$; $x = \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{11\pi}{9}, \dfrac{13\pi}{9}, \dfrac{17\pi}{9}$

3. $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$; $x = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{6}$

4. $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{6}$; $x = \dfrac{\pi}{24}, \dfrac{5\pi}{24}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{24}, \dfrac{17\pi}{24}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{25\pi}{24}, \dfrac{29\pi}{24}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{37\pi}{24}, \dfrac{41\pi}{24}, \dfrac{15\pi}{8}$

5. $x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$; $x = \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{11\pi}{8}, \dfrac{15\pi}{8}$

6. $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3}$; $x = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{12}, \dfrac{23\pi}{12}$

7. $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi k}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{6}$

8. Sem solução

9. $x = \dfrac{3\pi}{4} + 6\pi k$ ou $x = \dfrac{9\pi}{4} + 6\pi k$; $x = \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$; $x = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

11. $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$ ou $x = \dfrac{13\pi}{12} + \pi k$; $x = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{4}$

12. $x = -\dfrac{19\pi}{12} + 2\pi k$ ou $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi k$; $x = \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}$

13. Sem solução

14. $x = \dfrac{5\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$

15. $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$; $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

16. $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$; $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

17. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

18. $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$; $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

19. $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

20. $x = 0, \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}$

21. $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$

22. $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$

23. $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

24. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

25. $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \arccos\left(\frac{1}{3}\right), 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

26. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

27. $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \arcsin\left(\frac{1}{3}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

28. $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

29. $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

30. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

31. $x = \arctan(2), \pi + \arctan(2)$

32. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

33. $x = 0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

34. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

35. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

36. $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

37. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

38. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

39. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

40. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

41. $x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$

42. Sem solução

43. $x = 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \pi, \frac{8\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$

44. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

45. $x = 0$

46. $x = \frac{\pi}{48}, \frac{11\pi}{48}, \frac{13\pi}{48}, \frac{23\pi}{48}, \frac{25\pi}{48}, \frac{35\pi}{48}, \frac{37\pi}{48}, \frac{47\pi}{48}, \frac{49\pi}{48}, \frac{59\pi}{48}, \frac{61\pi}{48}, \frac{71\pi}{48}, \frac{73\pi}{48}, \frac{83\pi}{48}, \frac{85\pi}{48}, \frac{95\pi}{48}$

47. $x = 0, \frac{\pi}{2}$

48. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

49. $x = \frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

50. $x = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

51. $x = \frac{17\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{47\pi}{24}$

52. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}, \frac{29\pi}{18}$

53. $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$

54. $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

55. $x = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

56. $x = \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{7}$

57. $x = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$

58. $x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.6662, \pi - \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 2.4754$

59. $[\pi, 2\pi]$

60. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$

61. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

62. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

63. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

64. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

65. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$

66. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

67. Sem solução

68. $[0, 2\pi]$

69. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

70. $[\operatorname{arccot}(4), \pi) \cup [\pi + \operatorname{arccot}(4), 2\pi)$

71. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

72. $\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

73. $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

74. $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

75. $\left(-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(0, \frac{3\pi}{4}\right]$

76. $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

77. $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

78. $[-2\pi, 2\pi]$

79. $(-2\pi, \operatorname{arccot}(5) - 2\pi] \cup (-\pi, \operatorname{arccot}(5) - \pi] \cup (0, \operatorname{arccot}(5)] \cup (\pi, \pi + \operatorname{arccot}(5)]$

80. $\left[-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

81. $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$

82. $\left[-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup, \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

83. $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi, (2k+2)\pi)$

84. $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)$

85. $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\left[\frac{(4k+1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{4}\right]\right\}$

86. $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\left[\frac{(6k-1)\pi}{3}, \frac{(6k+1)\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)\right\}$

87. $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

88. $(-\infty, \infty)$

89. $\displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

90. $\displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$

91. $\displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(4k-1)\pi}{4}, \frac{(4k+1)\pi}{4}\right]$