Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=0\\y=-2+t\\z=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question **2.b**, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;-2+t\,;t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

b. En déduire que $AH=\sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.