11. Curvas

- **TÉCNICAS**
- **MECÁNICAS Y MÓVILES**
- **ESPIRALES**
- **CÓNICAS**

11.1. Curvas técnicas

Son aquellas que pueden trazarse con arcos de circunferencia.

11.1.1. óvalo

Curva cerrada y plana, formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre si e iguales dos a dos. Presenta dos ejes de simetría perpendiculares, el eje mayor y el eje menor.

CONSTRUCCIONES

- conocido el eje mayor. *(d MN= 7,5 cm)*

- conocido el eje menor. *(d ST= 5cm)*

- conocidos los ejes. *(d MN= 6,5 cm y d ST= 4 cm)*

11.1.2. ovoide

Curva cerrada y plana, formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí. Uno es una semicircunferencia y dos son simétricos. Presenta un eje de simetría, llamado mayor (MN) o simplemente eje y otro perpendicular llamado menor (ST) o diámetro.

CONSTRUCCIONES

- conocido el eje. *(d MN= 6 cm)*

- conocido el diámetro. (*d ST= 5 cm)*

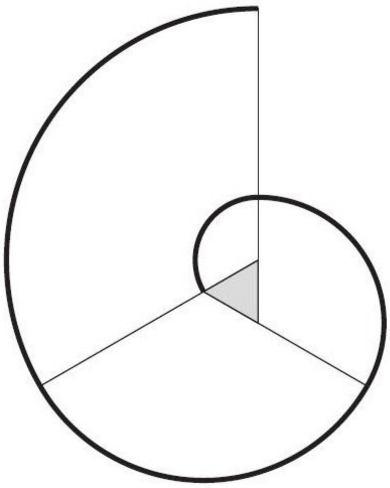
- conocidos eje y diámetro. (*d MN= 6 cm, d ST= 4 cm y d O4N= 1 cm)*

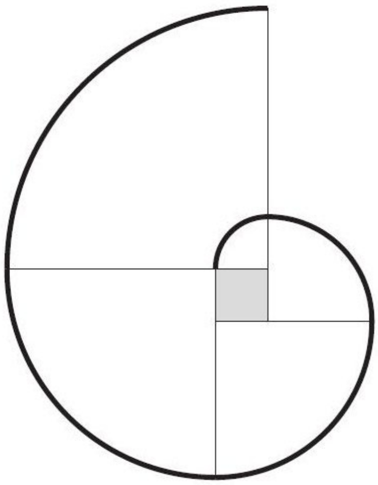
11.1.3 voluta o envolvente

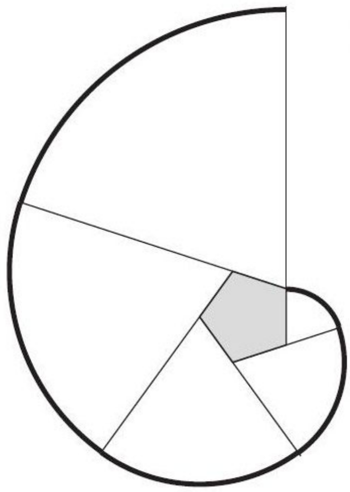
Curva abierta y plana, formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí, cuyos centros son extremos de un segmento o vértices de un polígono. La distancia radial entre dos arcos se llama paso.

Es necesario que conozcamos:

1. segmento o polígono (o paso y número de vértices)
2. posición del primer vértice
3. sentido de la voluta

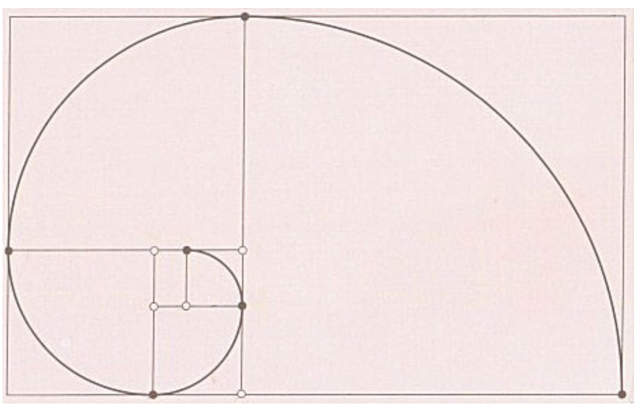


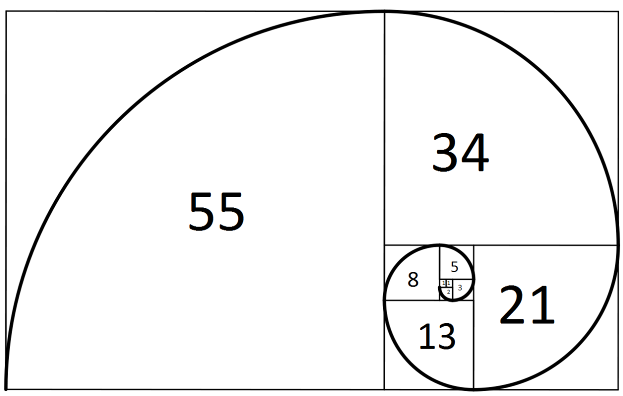




La espiral de Durero, que se aproxima bastante a la espiral logarítmica, es en realidad una voluta cuyo polígono base es un rectángulo áureo.

Si a un rectángulo áureo le añadimos sobre su lado mayor, un cuadrado obtenemos otro rectángulo áureo. Una buena aproximación a esta sucesión de rectángulos áureos es la obtenida a través de los rectángulos cuyos lados son los términos de la sucesión de Fibonacci.





11.2. Curvas mecánicas y móviles

11.2.1. cíclicas

Si una rueda de mueve girando en torno a su eje, todos sus puntos definen circunferencias concéntricas, en cambio si la ponemos a rodar sobre una recta u otra curva, el problema se complica y un punto cualquiera de la rueda describirá una curva mecánica o de rodadura.

Por repetirse periódicamente recibe el nombre de cíclica.

Es decir, se obtienen por el movimiento de un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia o recta.

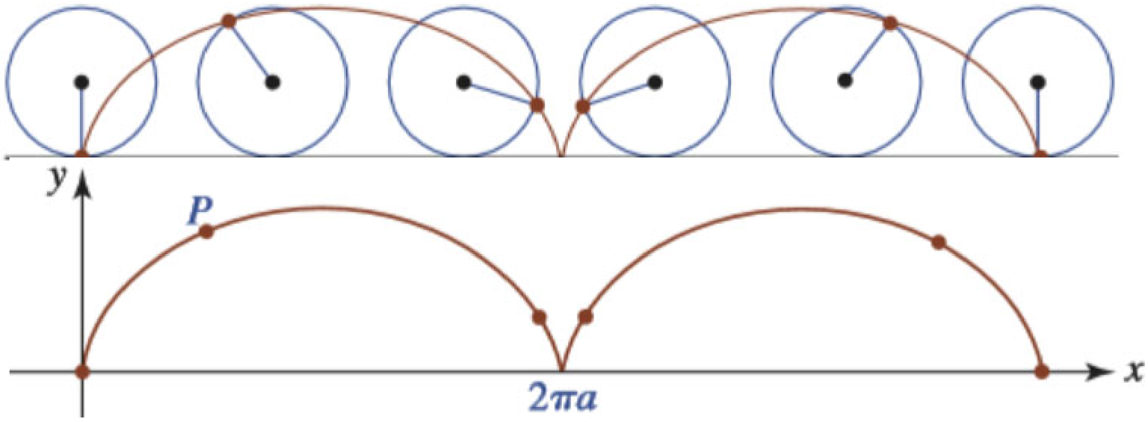
La circunferencia móvil se llama "ruleta" y la línea sobre la que se mueven se llama "base".

Las curvas cíclicas tienen gran importancia en dibujo industrial y en mecánica, sobre todo en el trazado de engranajes.

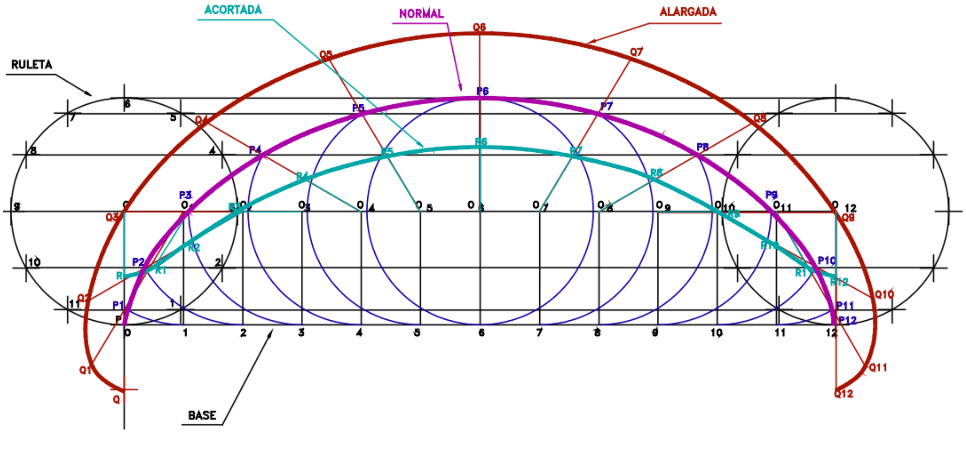
Presenta tres formas:

1. cicloide

Se llama "cicloide normal" la curva que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre una recta base. Puede ser también dilatada y comprimida.



ejemplo: radio= 2,3cm



2. epicicloide

La epicicloide es la curva que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia que hace de base y exteriormente a ella.

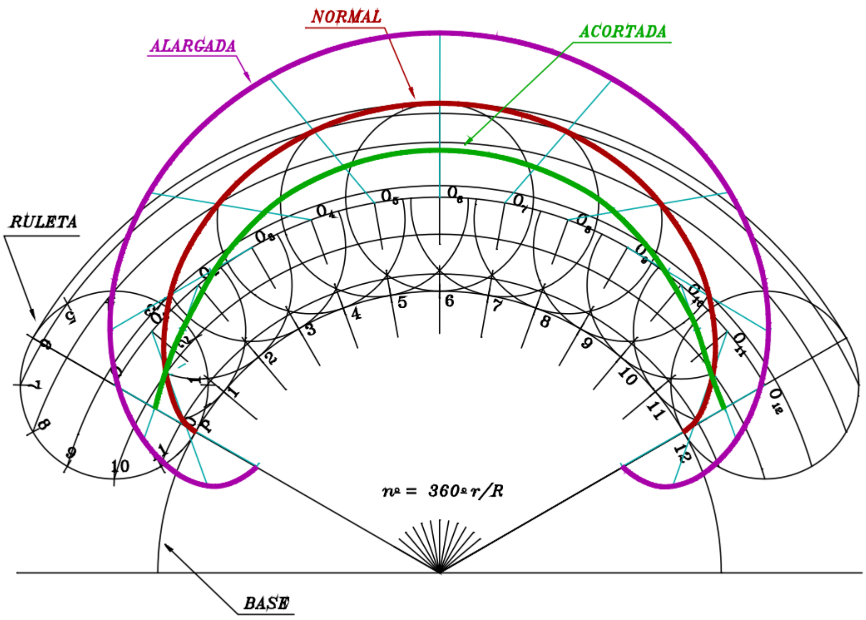
Si imaginariamente se dobla la cicloide de forma que la base se transforme en una circunferencia, se obtendría la epicicloide. Según esto, las construcciones son similares salvo que la rectificación se hará sobre una circunferencia en vez de sobre una recta, para lo que utilizaremos la siguiente formula:

2πR ------- 360º

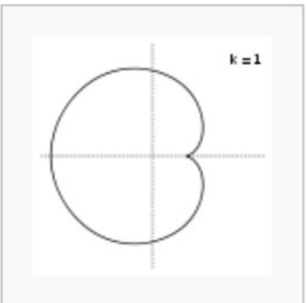
2πr ------- α

Siendo R el radio de la base, r el de la ruleta y α en ángulo de la base que cubre la longitud de la ruleta.

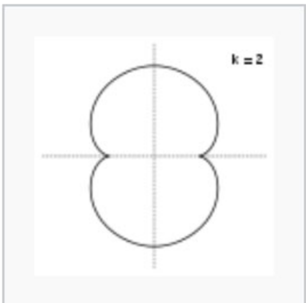
Puede ser también dilatada y comprimida.



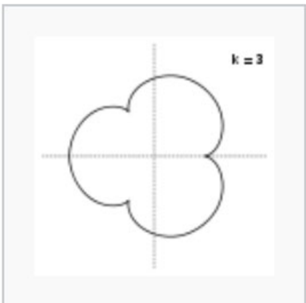
Estableciendo que k=R/r:



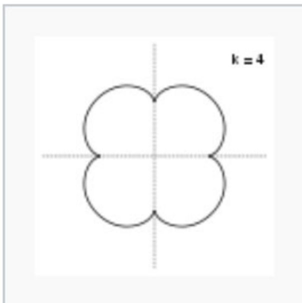
k=1



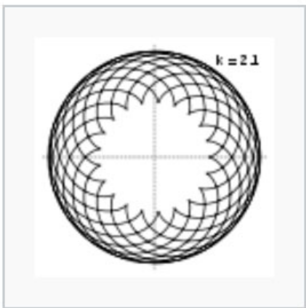
k=2



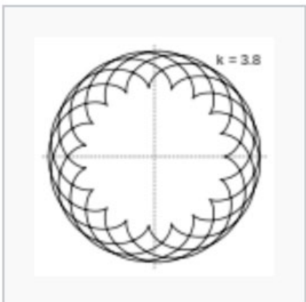
k=3



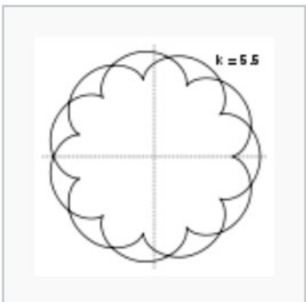
k=4



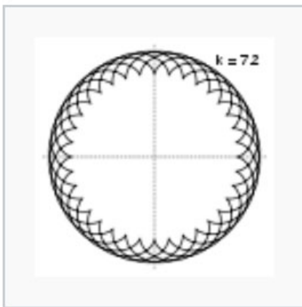
k=2,1=21/10



k=3,8=19/5



k=5,5=11/2



k=7,2=36/5

3. hipocicloide

Si en el caso anterior la circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia que hace de base, lo hace por el interior la curva que se describe es una Hipocicloide.

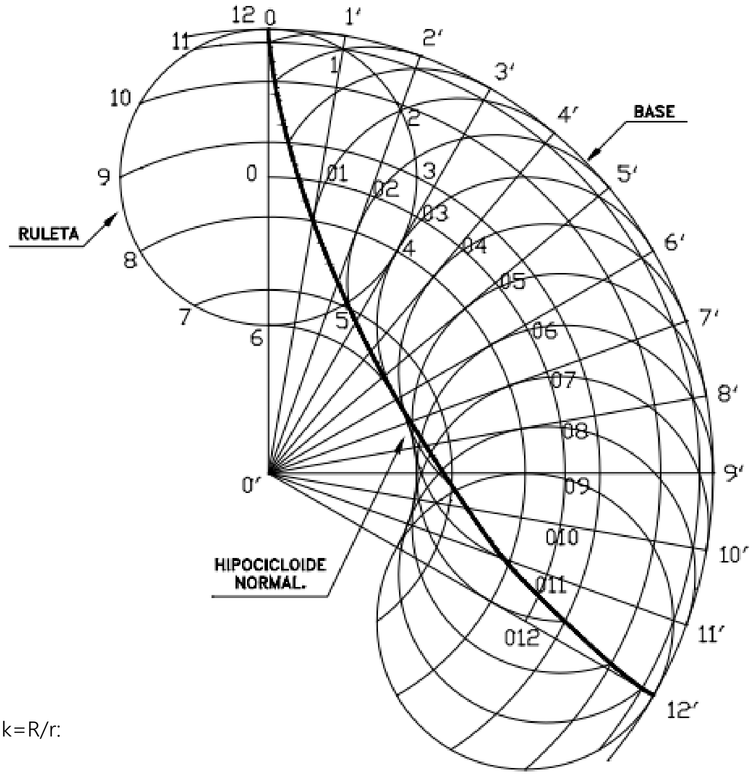
Utilizaremos también la siguiente fórmula para calcular los recorridos:

$2\pi R$ ------- 360º

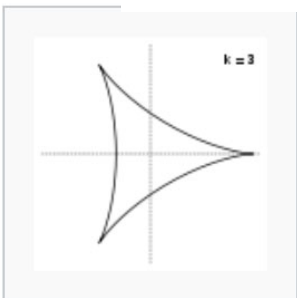
$2\pi r$ ------- α

Siendo R el radio de la base, r el de la ruleta y α en ángulo de la base que cubre la longitud de la ruleta.

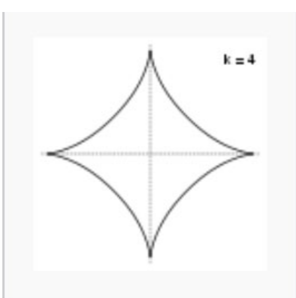
Puede ser también dilatada y comprimida.



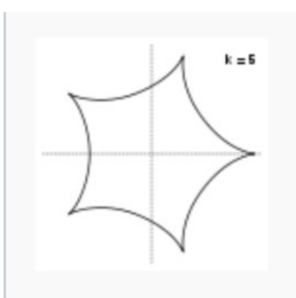
Estableciendo que k=R/r:



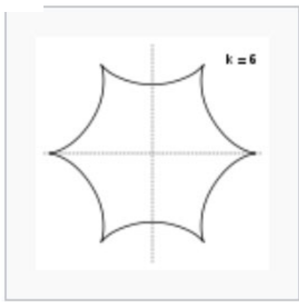
k=3



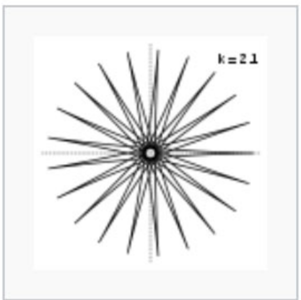
k=4



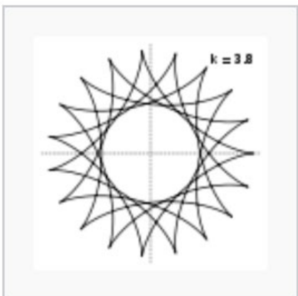
k=5



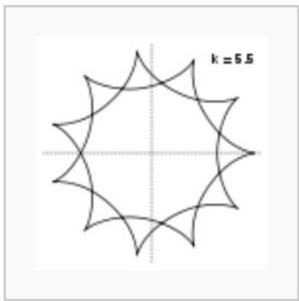
k=6



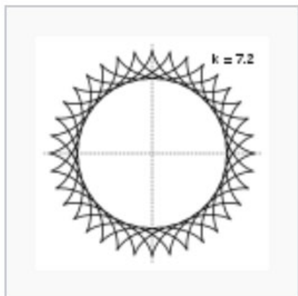
k=2.1



k=3.8



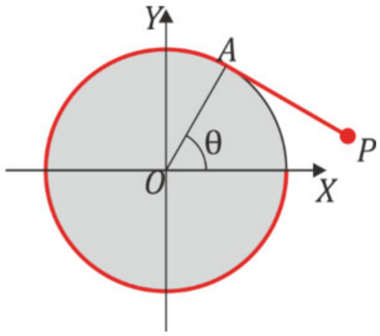
k=5.5

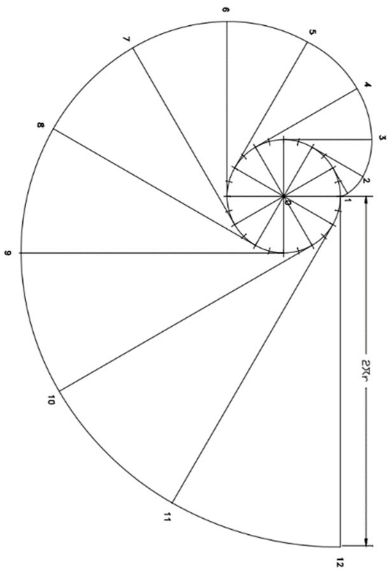


k=7.2

11.2.2. evolvente

Es una curva plana, generada por un punto fijo de una recta tangente a la circunferencia, que se desplaza sobre ella sin resbalar. Se define como el lugar geométrico de las posiciones que va ocupando un punto de una recta que, siendo tangente a una circunferencia, camina sin resbalar sobre ella. El punto generador es el punto T; la circunferencia base es la de centro O y la ruleta es la recta tangente en el punto T.





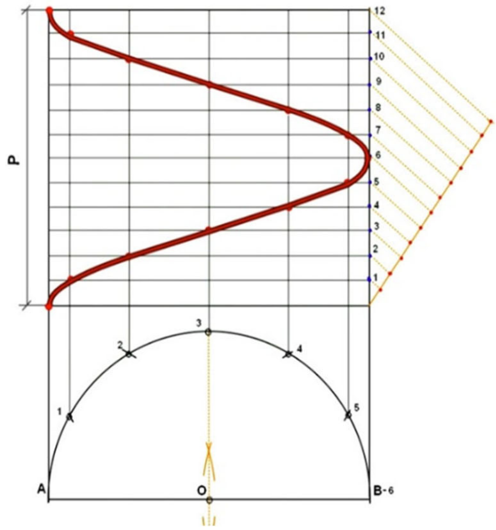
(radio= 2 cm / horario / circunferencia en 11 / centro: 10 arriba, 13,5 dcha, 4 abajo / comienzo en punto inferior)

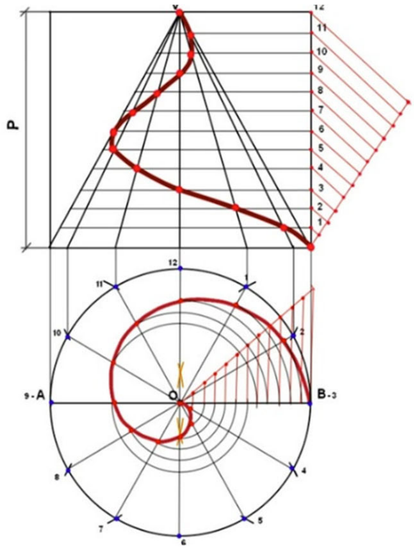
11.2.3. hélices

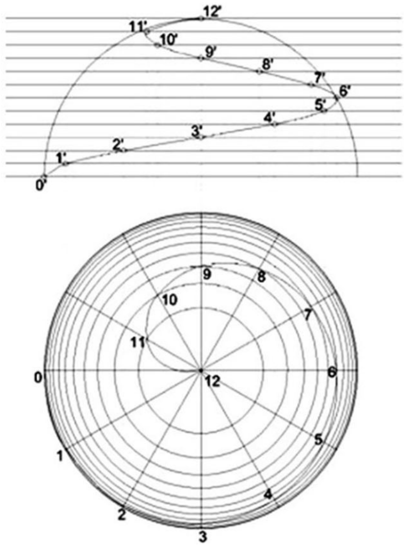
Es una curva tridimensional, continua, con pendiente finita y no nula, que gira alrededor de un cilindro, un cono o una esfera, avanzando en las tres dimensiones (como el borde de un tornillo).

Se denomina paso a la distancia comprendida entre dos puntos de la curva que ocupan una misma generatriz y espira a cada una de las vueltas completas que da el punto en la superficie sobre la que se desplaza.

Por ejemplo, las hélices cilíndrica, cónica y esférica.







(cilindro / paso 6,4 cm / radio 5,5 cm / antihorario / 16 partes)

11.3. Espirales

Línea curva que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él gradualmente.

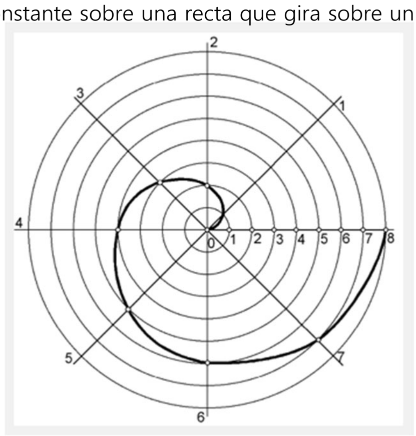
Se denomina paso a la diferencia radial que existe entre dos vueltas o espiras consecutivas.

11.3.1. Arquímedes

La espiral de Arquímedes (o espiral aritmética) obtuvo su nombre del matemático griego Arquímedes, quien vivió en el siglo III A.C.

Se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad angular constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo.

ejemplo: paso 4 cm / antihorario / 11 partes.



11.3.2. Logarítmica o de Bernoulli

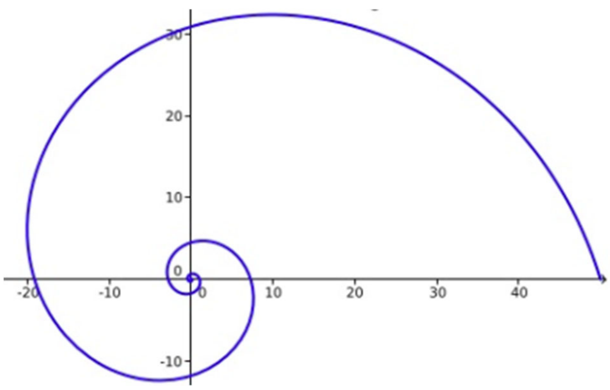
Es una clase de curva que aparece frecuentemente en la naturaleza.

Se distingue de la de Arquímedes por el hecho de que las distancias sobre sus radios se incrementan en progresión geométrica, mientras que en una espiral de Arquímedes la progresión es aritmética.

Se necesita conocer el segmento inicial (primer brazo) y el factor de incremento (para los sucesivos).

No parte del centro.

ejemplo: localiza los primeros 11 radios de una espiral logarítmica, sabiendo que: radio inicial 1 cm / antihorario / 11 partes / factor: 1,3.

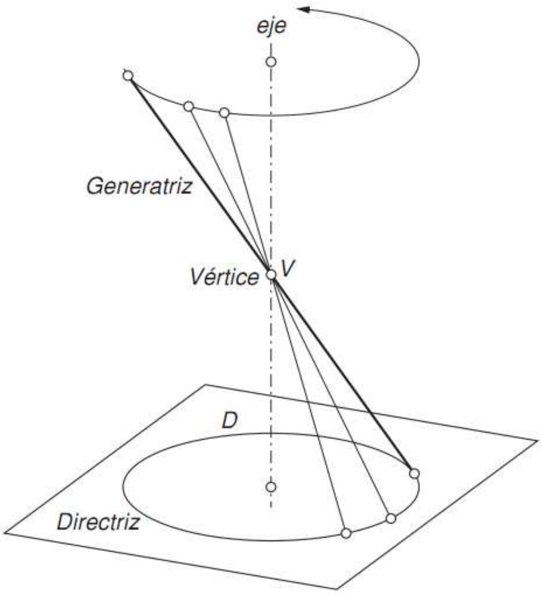


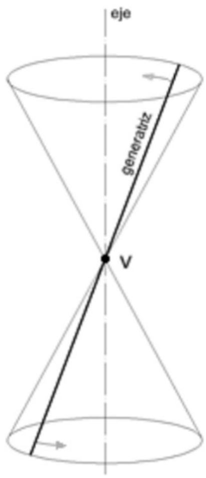
11.3.3. Evolvente

La evolvente de la circunferencia (10.2.2) es una curva mecánica pero también una espiral.

11.4. Curvas cónicas

Se llama superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una línea recta (generatriz) que gira alrededor de otra fija (eje), cortándose en un punto fijo (vértice), sin variar el ángulo que forman.



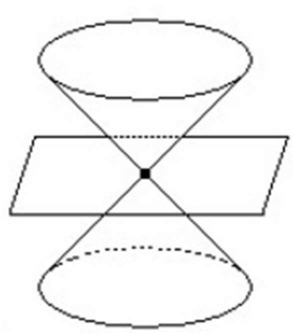


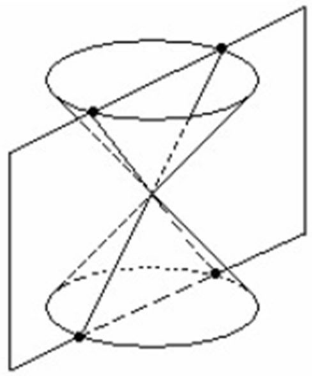
Apolonio de Perge o Apolonio de Perga (Perge, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra Sobre las secciones cónicas. Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos.
También se le atribuye la hipótesis de las orbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.
Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas.
Recopilo su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de El Gran Geómetra.

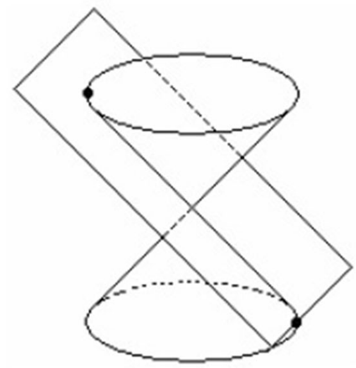
Se generan así dos ramas simétricas respecto al vértice V

Las curvas cónicas se obtienen al intersecar una superficie cónica con un plano. Dependiendo de la posición del plano se obtienen las diferentes cónicas.

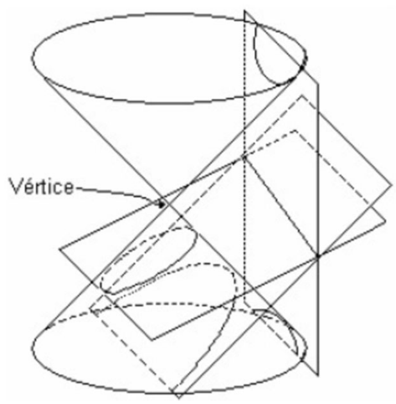
1 - Si el plano pasa por el vértice V, obtenemos las cónicas degeneradas:
- Un punto
- Dos rectas concurrentes en V
- Una recta

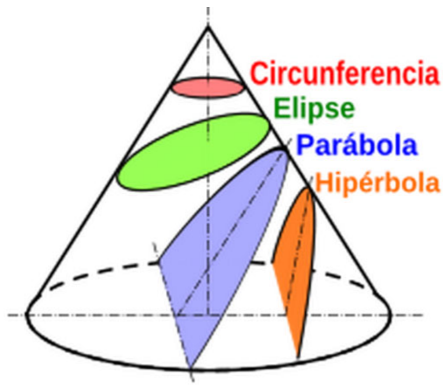


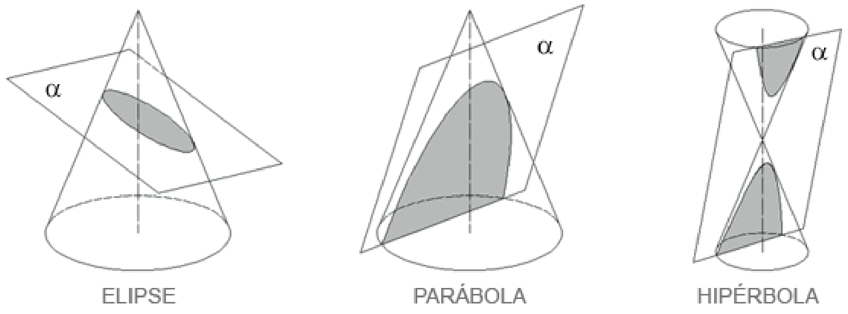


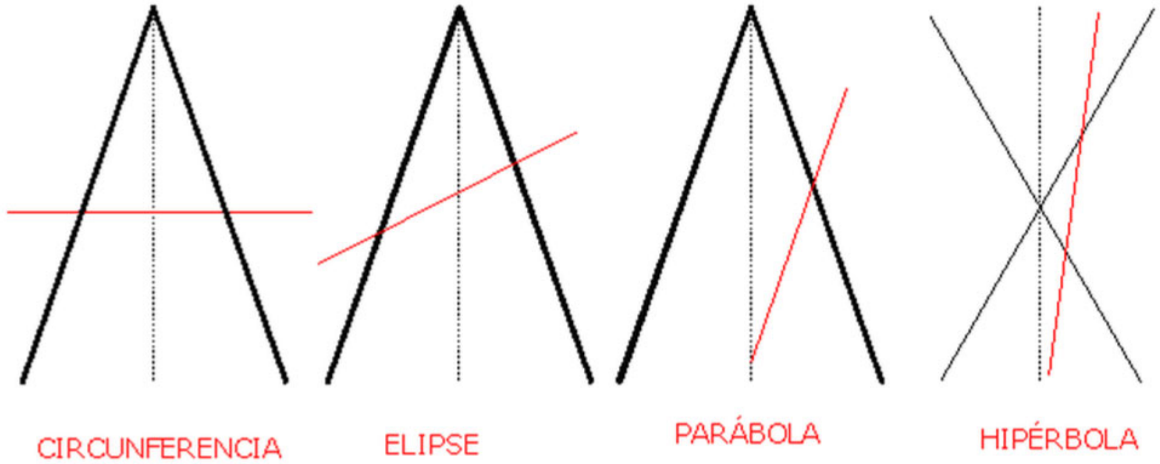


2 - Si el plano no pasa por el vértice V, obtenemos las cónicas no degeneradas:
- Circunferencia
- Elipse
- Parábola
- Hipérbola

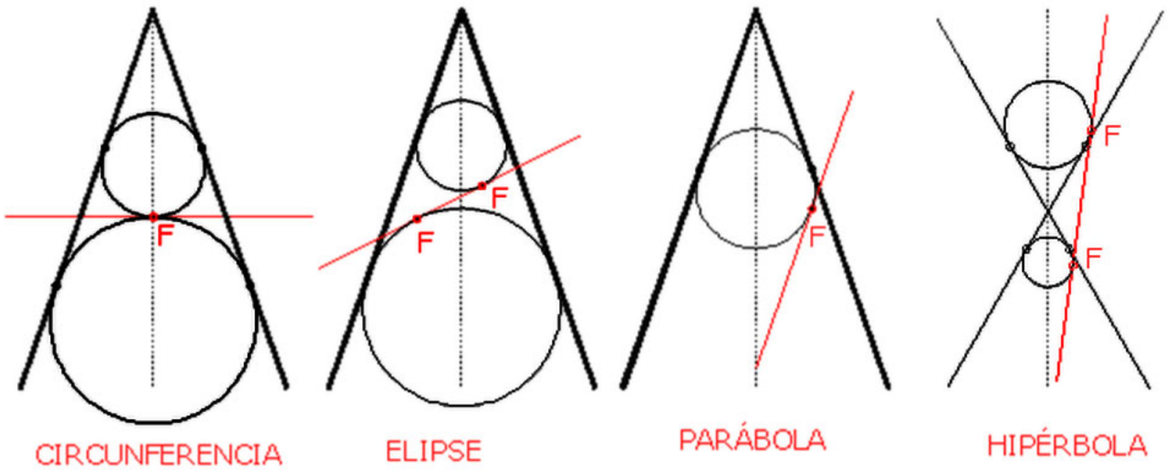




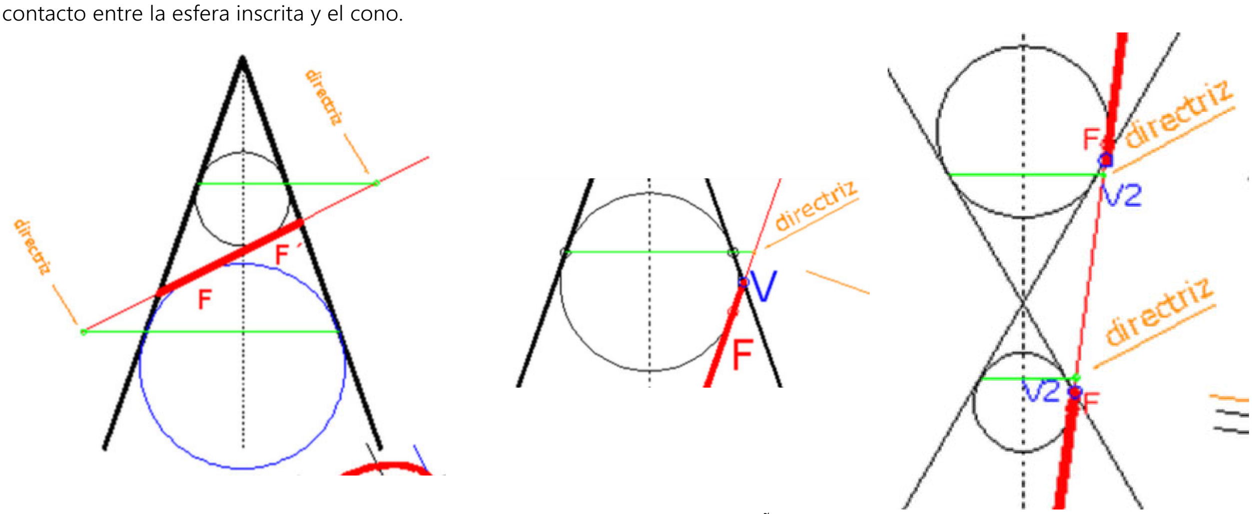




El foco o los focos de una curva cónica son los puntos de tangencia del plano secante que produce la cónica con las esferas inscritas al cono que sean, a la vez, tangentes al plano (teorema de Dandelín).
La elipse y la hipérbola tienen dos. La circunferencia y la parábola uno.



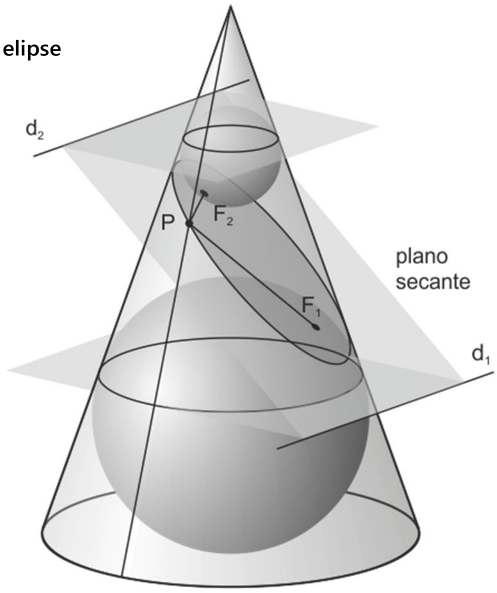
Se denomina directriz de una curva cónica a la recta de intersección del plano secante con el plano que pasa por los puntos de contacto entre la esfera inscrita y el cono.

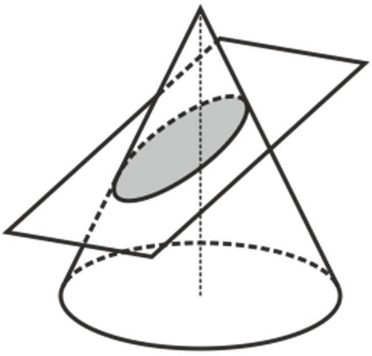


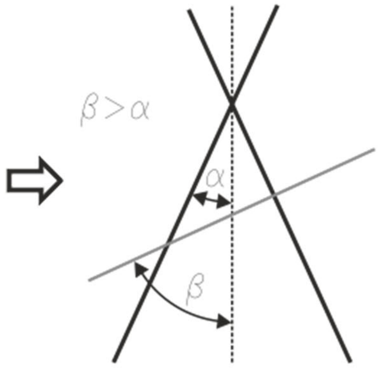
11.4.1. circunferencia
Ya se estudió en temas anteriores. *(lugares geométricos en el tema 2 y tangencias en el tema 9)*

11.4.2. elipse

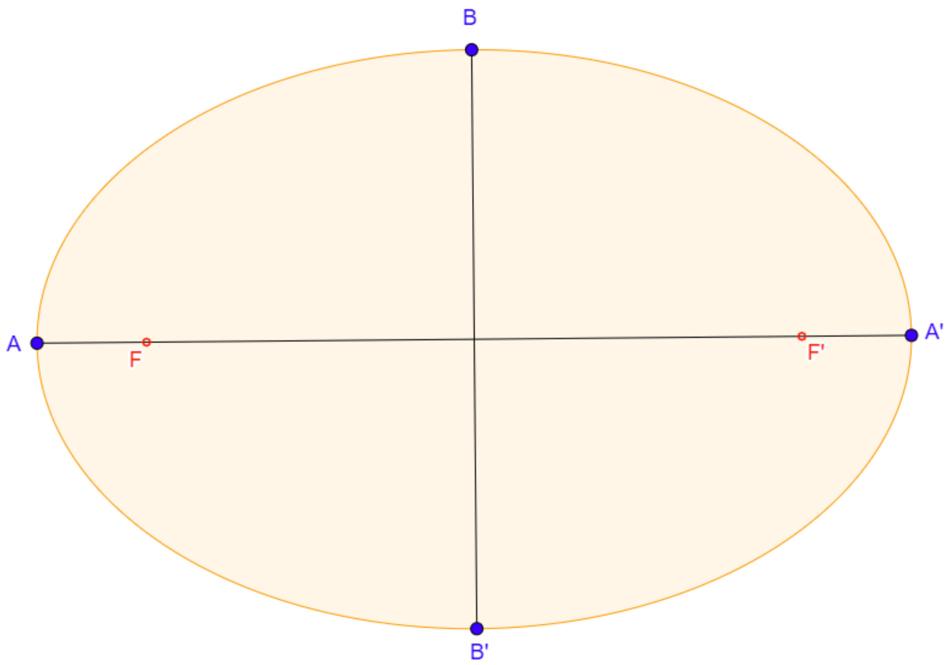
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



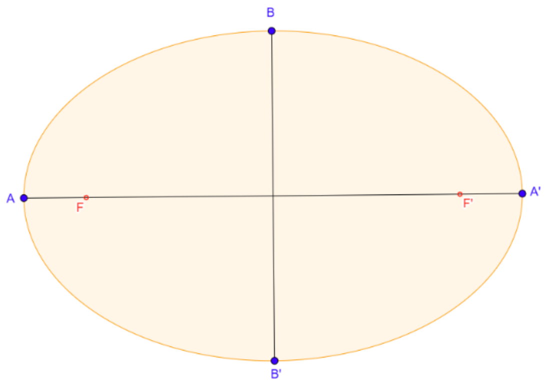




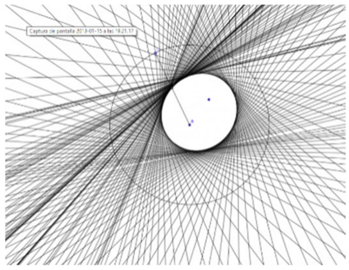
Es una curva plana, cerrada y con dos ejes de simetría cuyos puntos cumplen la condición de que la suma de distancias a dos interiores llamados focos es constante.
El valor de esta suma es igual a la del eje mayor, conocido como 2a.



11.4.2.1. elementos de la elipse
Eje mayor: se llama también eje real, eje focal o diámetro mayor y se representa como 2a. La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a ambos focos es igual a su longitud.
Eje menor:se llama también eje imaginario o eje normal, es perpendicular al eje mayor en su punto medio O y se representa como 2b.
Focos: Son dos puntos fijos de referencia y equidistan del centro O de la elipse.
Distancia focal: Es la magnitud existente entre los focos y se representa como 2c.
Radios vectores: Son los segmentos que unen un punto de la elipse con ambos focos. La suma de sus distancias es igual a 2a (diámetro mayor).



Circunferencia principal: Tiene como centro el de la elipse y su diámetro es 2a. De modo que pasa por los extremos del eje mayor de la elipse. Existe una afinidad entre esta circunferencia y la elipse cuyo eje es el diámetro mayor. La dirección de esta afinidad es perpendicular a ese diámetro.

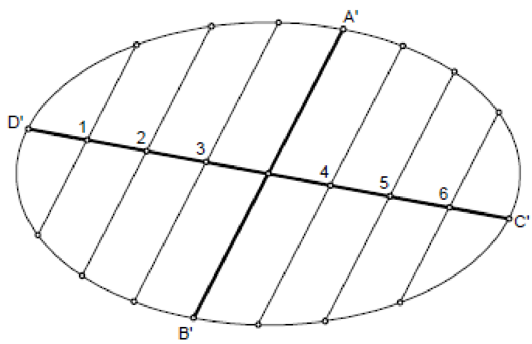


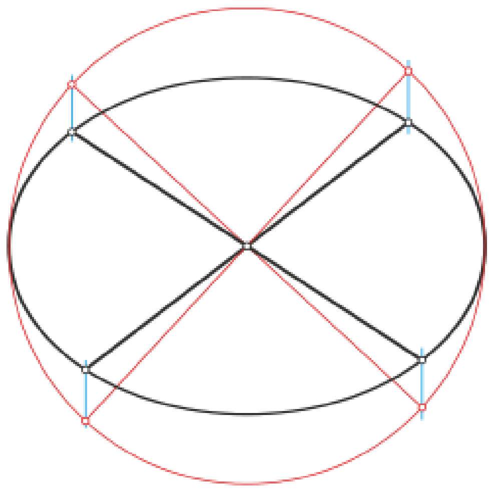
Circunferencia focal: Es la que tiene como centro uno de los focos y como radio 2a (eje mayor). Existen pues dos circunferencias focales.

Diámetros: Cualquier segmento que una dos puntos de la elipse pasando por el centro O se considera diámetro.

Diámetros conjugados: A todo par de diámetros que cumplen con la condición de que cualquier recta secante a la elipse y paralela a uno de ellos queda dividida en dos partes iguales por el otro, se les llama conjugados.
También se dice que son conjugados los diámetros cuyos afines en una circunferencia afín a la elipse son perpendiculares. Los ejes de la elipse son los únicos diámetros conjugados que son perpendiculares entre sí.

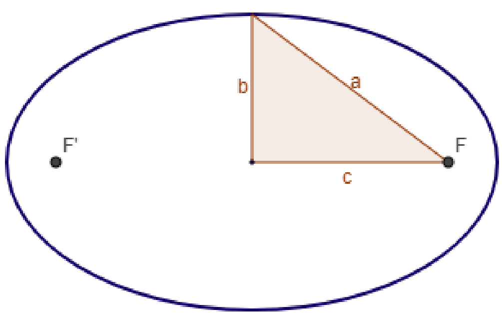
(Ver las prácticas)





Excentricidad ε (épsilon): La excentricidad de la elipse se define como el cociente entre la semidistancia focal (c) y el semieje mayor (a). La cantidad resultante siempre es menor a la unidad. Cuanto más cerca está el foco del centro de la elipse, más se asemeja la elipse a una circunferencia. Si c es nula la excentricidad es cero y la curva ya no es una elipse, sino una circunferencia. En cambio, si la excentricidad se acerca a uno la elipse se va alargando hasta convertirse en una parábola.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{, con } (0 \leq \varepsilon \leq 1)$$



También la podemos poner en función de la directriz ya que la elipse se puede definir como el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a un punto fijo F llamado foco y a una recta fija d llamada directriz, es una constante respectivamente menor que 1 y distinta de 0. Esa constante es la excentricidad. Existe una directriz para cada foco.

11.4.2.2. relaciones entre focos y ejes
Dibuja el eje mayor, el menor y localiza los focos, dados:
A. los ejes
(eje mayor 11 cm / eje menor 4,5 cm)

B. el mayor y la distancia focal
(eje mayor 11 cm / distancia focal 7 cm)

C. el menor y la distancia focal
(eje menor 4,5 cm / distancia focal 7 cm)

11.4.2.3. métodos de construcción
A. por puntos. Responde a la definición de elipse
(eje mayor 11 cm / eje menor 4,5 cm

B. por afinidad
(eje mayor 11 cm / eje menor 4,5 cm)

C. por haces proyectivos o intersecciones
(eje mayor 11 cm / eje menor 4,5 cm)

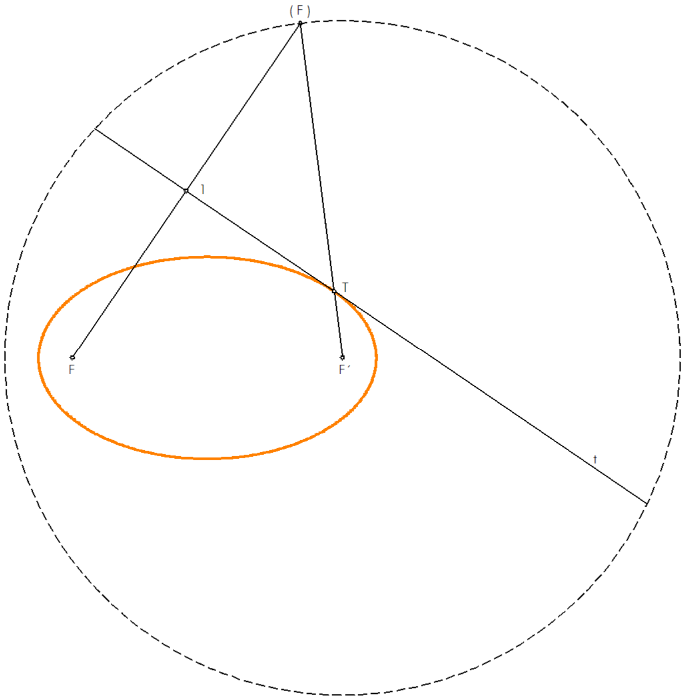
C'. 11 puntos (simplificación del método de haces proyectivos)
(eje mayor 11 cm / eje menor 4,5 cm)

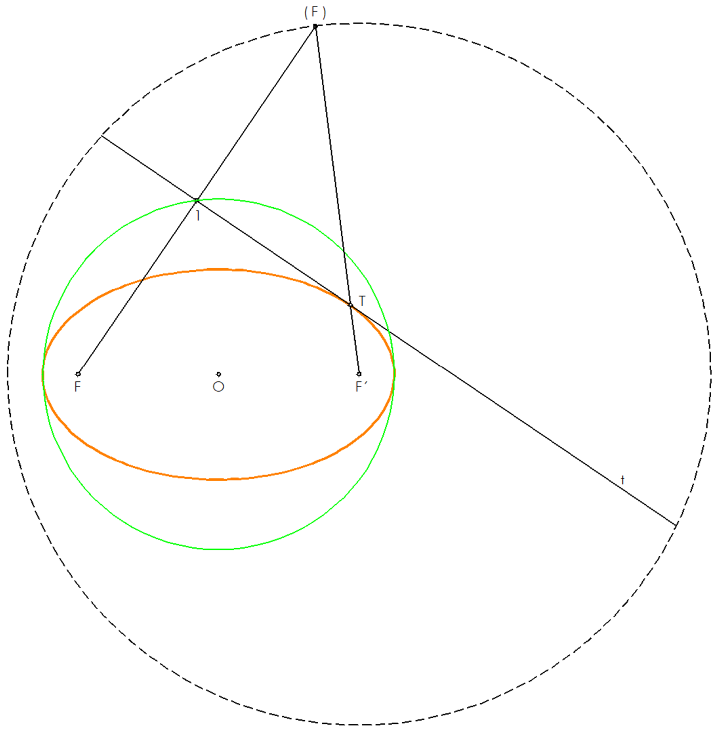
D. por hipocicloides. Cuando establecemos una base de radio doble al de la ruleta

11.4.2.4 singularidades

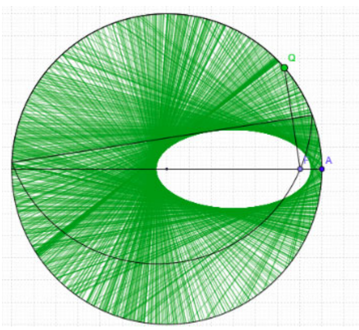
El simétrico de un foco respecto de toda tangente a una elipse está sobre la circunferencia focal con centro el otro foco.

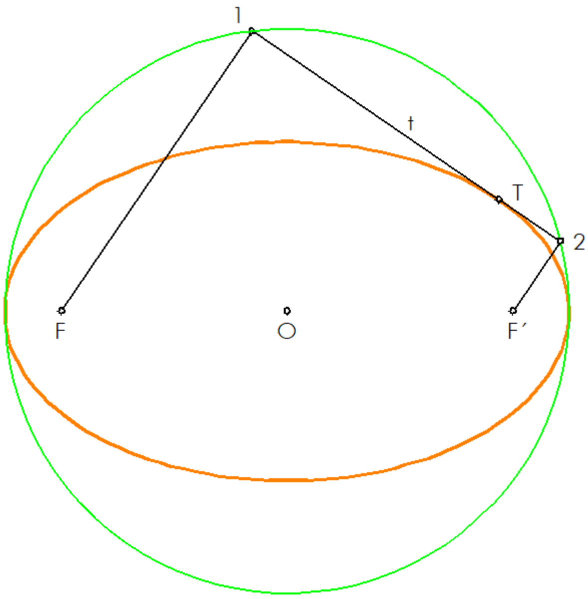
Y el punto medio de ese segmento está sobre la CP.

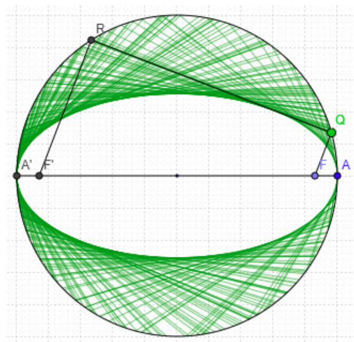




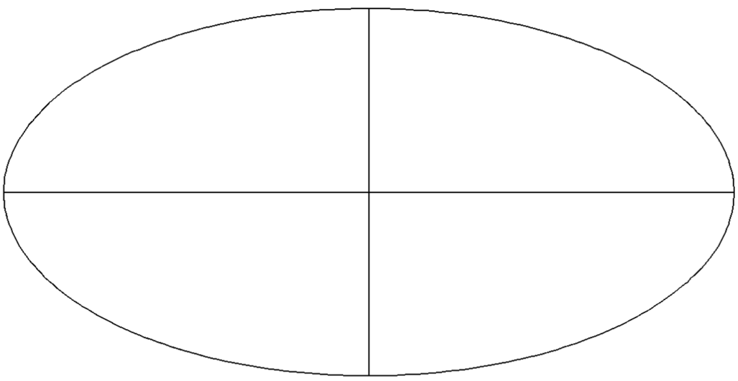
La perpendicular a la tangente desde el otro foco también se corta sobre la CP.



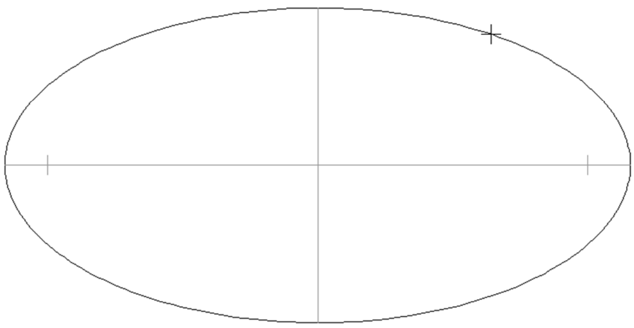


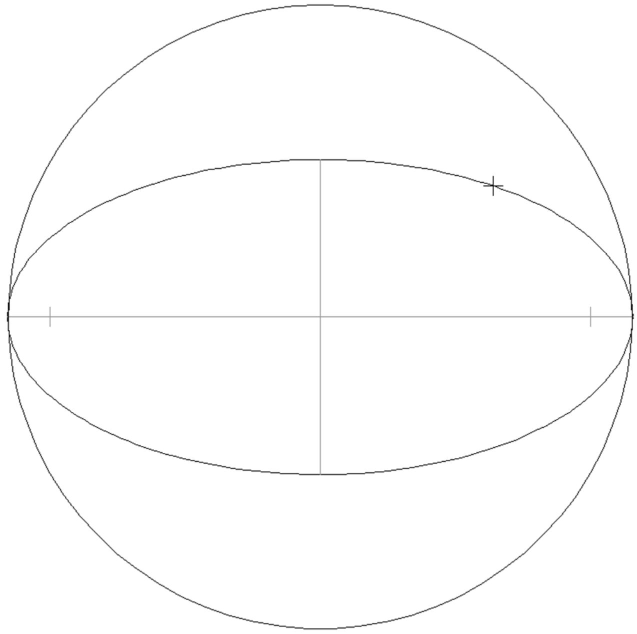


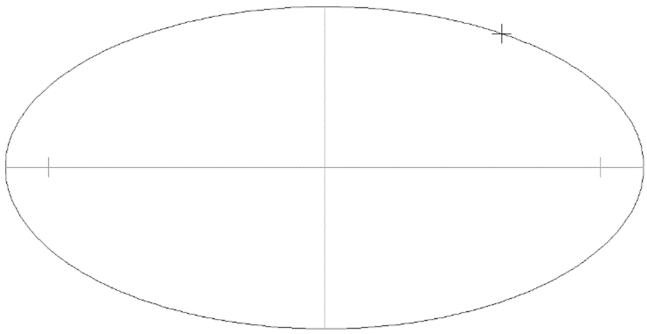
La distancia de un foco a un punto M de su circunferencia focal es 2a, igual que suma de la distancia FT más la F’T.



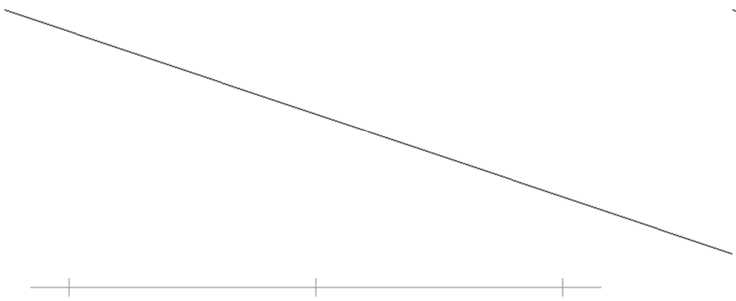
11.4.2.5. tangentes
A. por un punto perteneciente

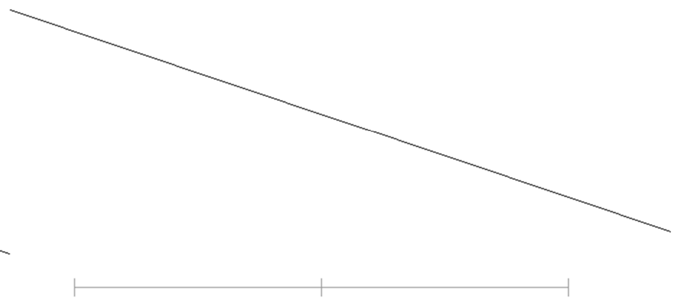




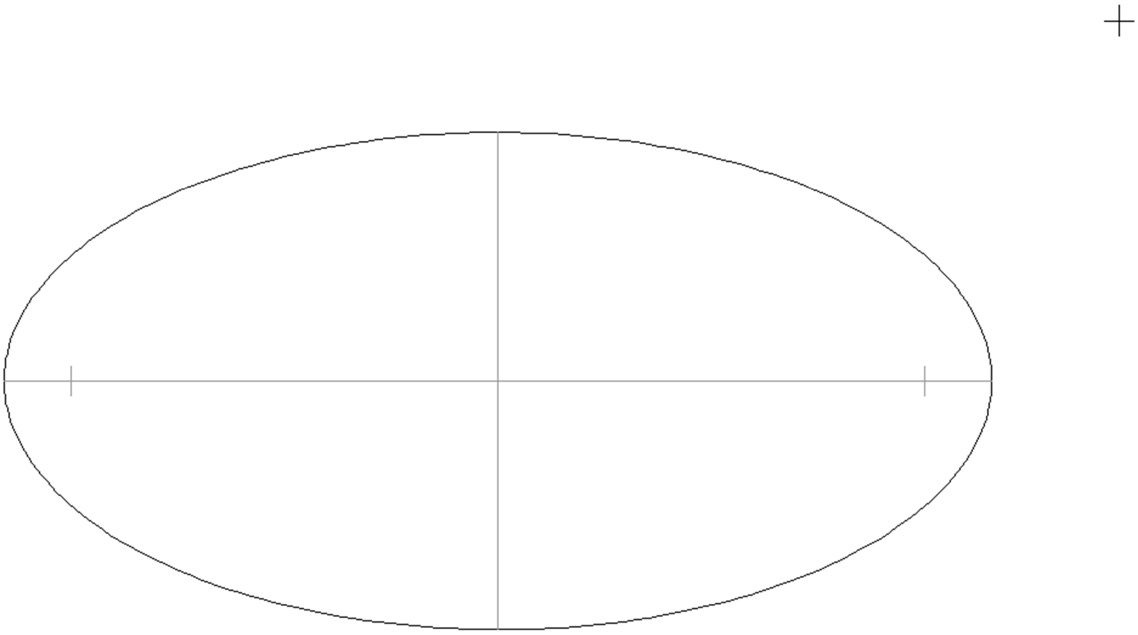


Ejercicios. Localiza el punto de tangencia y los ejes, conocida la tangente y el eje mayor o la distancia focal

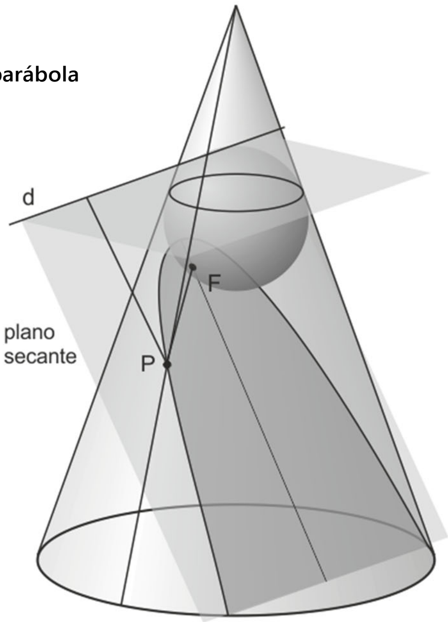


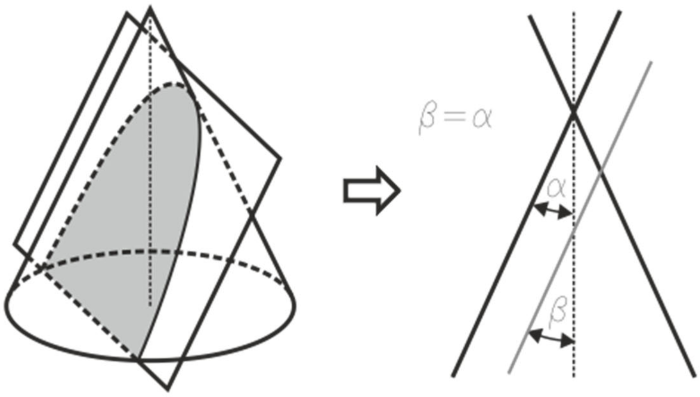


B. por un punto exterior

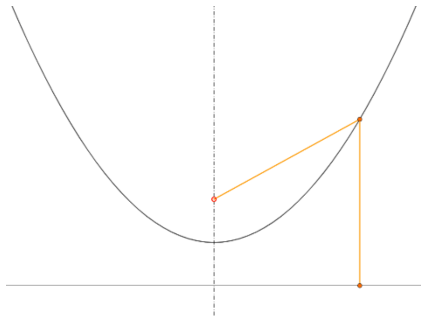


11.4.3. parábola





Es una curva plana, abierta de una rama y con un eje de simetría, cuyos puntos cumplen la condición de que equidistan de uno interior llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



11.4.3.1 Elementos de la parábola

Además del foco y directriz.

Eje focal: es perpendicular a la directriz. La parábola es simétrica respecto a este eje, en el que están situados tanto el foco como el vértice.

El vértice: punto de la curva sobre el eje. Equidista del foco y la directriz y estará situado a la mitad del segmento los une.

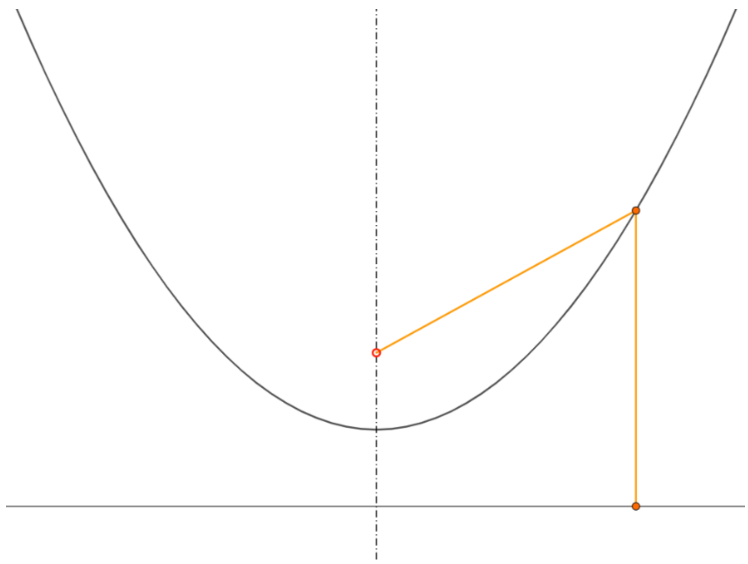
Circunferencia principal: es una circunferencia de radio infinito, puesto que es allí donde está el centro de la curva. Queda representada como una recta tangente a la parábola por el vértice.

Circunferencia focal: Es también una circunferencia de radio infinito. Es por ello que se representa como una recta coincidente con la directriz de la parábola.

Radios vectores: unen un punto de la curva con el foco y la directriz. Ambos segmentos de unión tienen siempre la misma medida.

Parámetro: Se representa como p. Es la distancia entre el foco y la directriz.

Lado recto: es la longitud de la cuerda perpendicular al eje por el foco. Se representa como 2p. La mitad de esta longitud coincide con el parámetro.



11.4.3.2 métodos de construcción

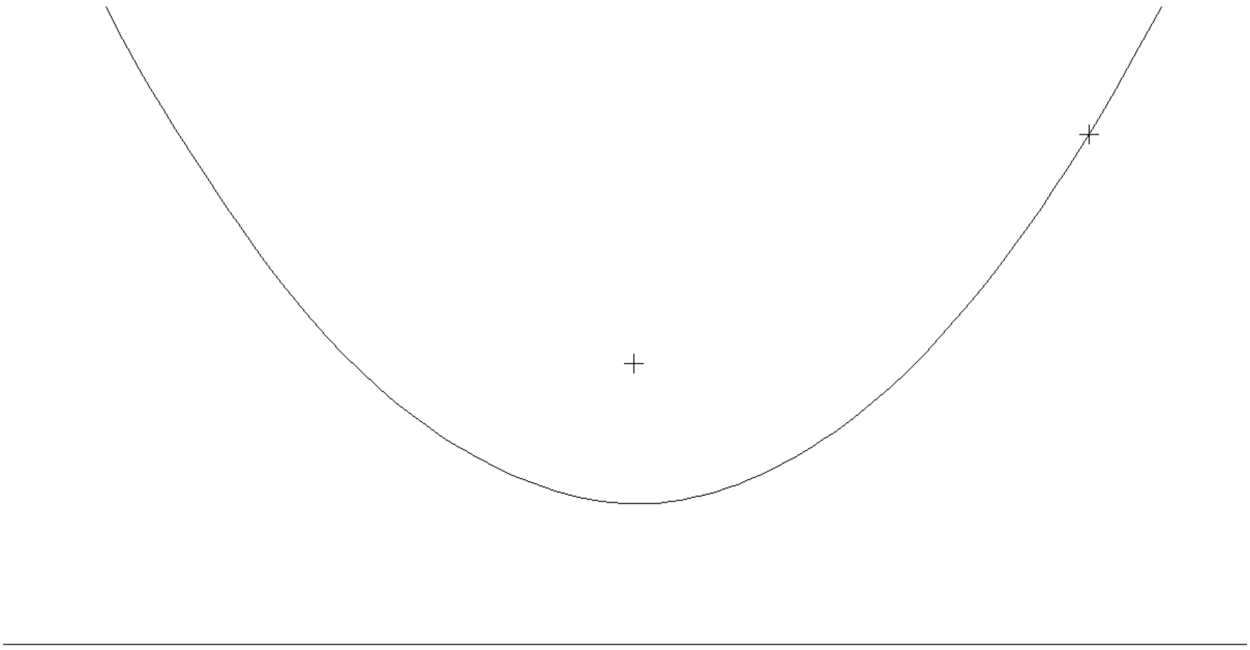
A. por puntos. Responde a la definición de parábola. Conocidas directriz y foco

B. por envolvente. Conocido un punto, el eje y el vértice

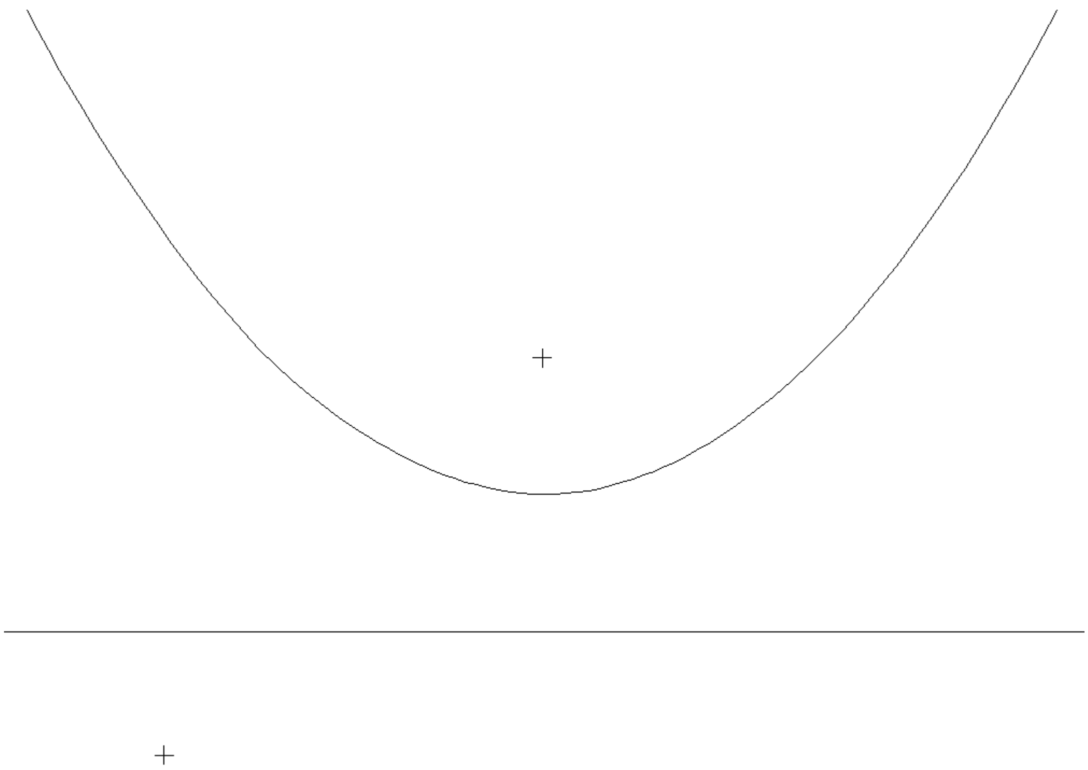
C. por intersecciones. Conocido un punto, el eje y el vértice

11.4.3.3. tangentes

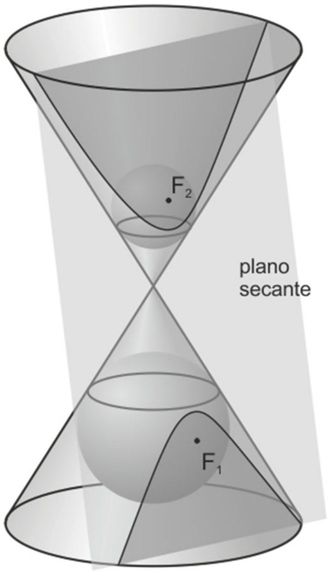
A. por un punto perteneciente

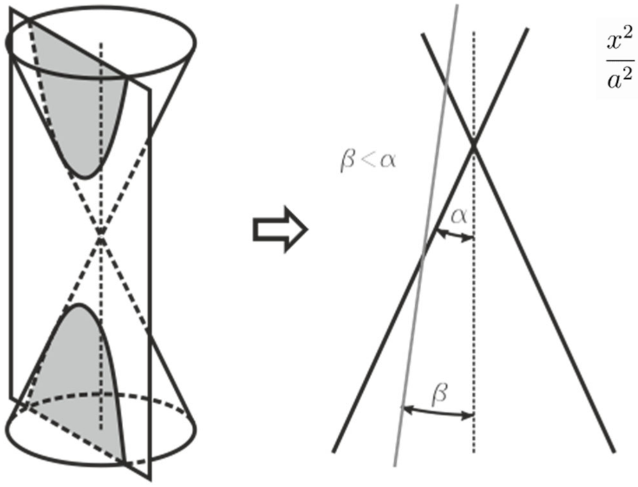


B. por un punto exterior



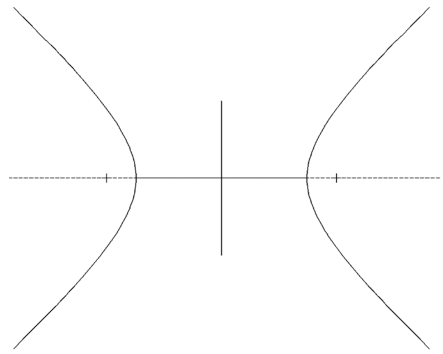
11.4.4. hipérbola





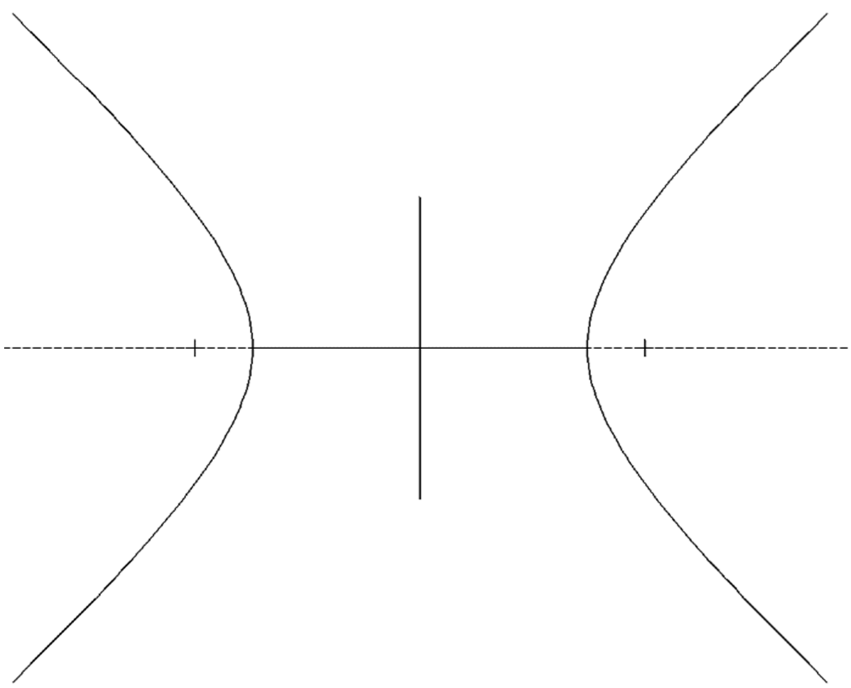
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es una curva plana, abierta, de dos ramas simétricas respecto a dos ejes perpendiculares entre si. cuyos puntos cumplen la condición de que la diferencia de distancias a otros dos llamados focos es constante.
El valor de esta diferencia es igual a la del eje mayor, conocido como 2a.



11.4.4.1. elementos de la hipérbola

Focos: Son dos puntos F y F', respecto a los cuales permanece constante la diferencia de distancias (en valor absoluto) a cualquier punto x de la hipérbola. d(F,x)-d(F',x)=cte
Centro: es el punto medio de los focos.
Eje principal o real: es la recta en la que se encuentran los focos y los vértices.
Eje secundario o imaginario: Es perpendicular al eje principal por el centro.
Vértices: son los puntos donde la hipérbola corta al eje principal.
Eje mayor: es el segmento que une los vértices. Su valor es 2a.
Eje menor: no tiene puntos en común con la hipérbola. Sin embargo, siempre se cumple que las perpendiculares lanzadas por sus extremos cortan con las perpendiculares lanzadas por los extremos del eje mayor en 4 puntos que pueden servir para trazar las asíntotas. Su valor es 2b.
Asíntotas: son las rectas r y r' que pasan por el centro de la hipérbola y verifican que se acercan a las ramas al alejarse del centro de la hipérbola. Se encuentran con la hipérbola en puntos impropios. *(Sus ecuaciones son: r: y= b/a x r': y = -b/a r)*
Radios vectores: son los segmentos que van desde cualquier punto de la hipérbola a los focos.
Distancia focal: es el segmento que une los focos. Su valor es 2c.
Circunferencia principal: Tiene como centro el de la hipérbola y su radio es a.
Circunferencia focal: Es la que tiene como centro uno de los focos y como radio 2a (eje mayor). Existen pues dos circunferencias focales.
Excentricidad: En el caso de la hipérbola, la excentricidad equivale al cociente entre el eje mayor (2a) y la distancia focal (2c) y siempre es mayor que la unidad. Cuanto mayor sea la excentricidad, más afinada será la cónica.

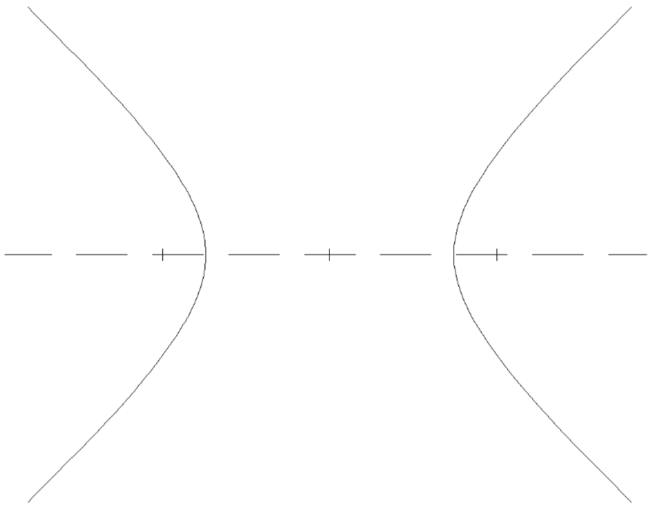


11.4.4.2. métodos de construcción

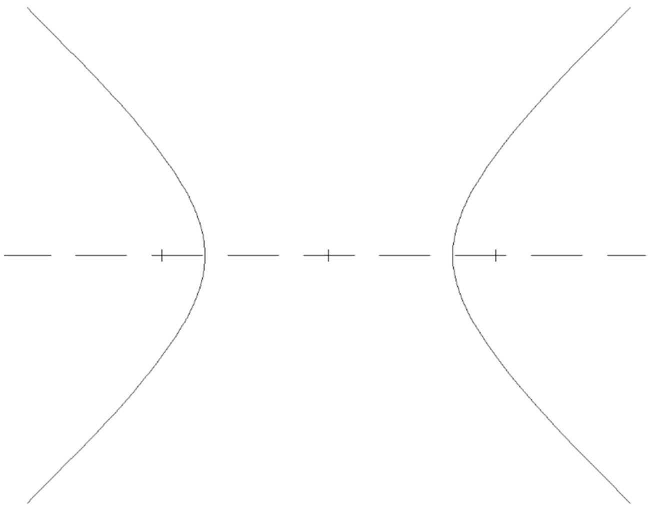
A. por puntos. Responde a la definición de hipérbola.

11.4.4.3. relaciones entre focos, vértices, ejes y asíntotas.

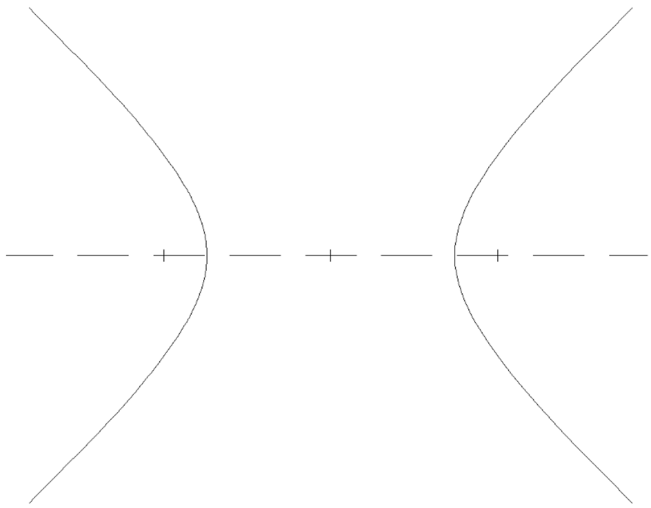
A. localiza el eje menor y las asíntotas.



B. localiza las circunferencias focales y la principal.

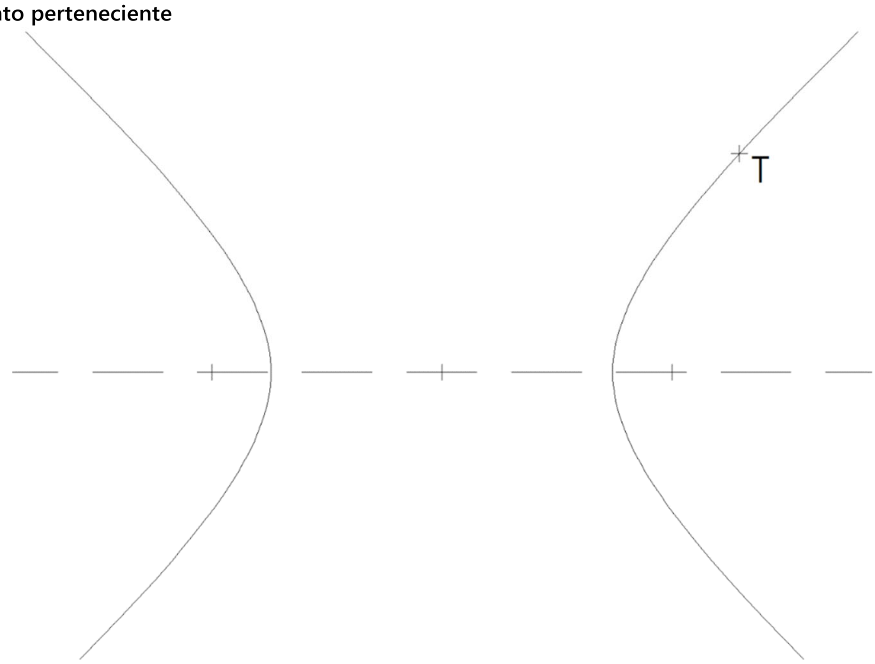


C. localiza las directrices.



11.4.4.4. tangentes

A. por un punto perteneciente



B. por un punto exterior