la funció passa pels punts consecutius $A = (\frac{2}{2k+1}, \pm 1)$, $B = (\frac{2}{2k+3}, \mp 1)$, i la longitud de la corba entre ells és més gran que la distància

$$d(A,B) = \sqrt{(\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k+3})^2 + 4} \geq \frac{2}{2k+3}$$

Per tant la longitud de la poligonal és més gran que

$$\sum_1^\infty \frac{2}{2k+3}$$

suma que és divergent.

Exercici 70 (Clotoide): Trobeu el punt $A = (a, 0)$ i la clotoide adequada $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = A$, amb $\gamma'(0) = (1, 0)$ i que pr a un cert valor del paràmetre s la clotoide sigui tangent a la circumferència de centre $(1, 1)$ i radi $1/2$.

Solució: Recordem que la clotoide és la corba que es defineix imposant que la seva curvatura varii linealment amb l'arc, és a dir,

$$k(s) = \lambda s$$

per a una certa constant λ. Si diem $\alpha(s)$ l'angle entre la tangent . aquesta corba i l'eix de les x sabem que

$$k(s) = \lambda s = \frac{d\alpha}{ds}$$

i per tant (suposant $\alpha(0) = 0$)

$$\alpha(s) = \frac{\lambda s^2}{2}.$$

Com $\langle (x'(s), y'(s)), (1, 0) \rangle = x'(s) = \cos \alpha(s)$ la clotoide és

$$\gamma(s) = (\int_0^s \cos(\mu\, s^2), \int_0^s \sin(\mu\, s^2)), \quad 2\mu = \lambda.$$

La clotoide que busquem en aquest problema en particular és de la forma

$$\gamma(s) = \left(a + \int_0^s \cos(\mu\, t^2)\, dt, \int_0^s \sin(\mu\, t^2)\, dt\right).$$

La seva curvatura és

$$k(s) = \|\gamma''(s)\| = 2\mu\, s$$

de manera que $k(s) = 2$ (curvatura del cercle donat) quan $s = 1/\mu$.

Per aquest valor de s s'han de complir dues coses:

1. $\|\gamma(1/\mu) - (1, 1)\| = 1/2$, (el punt de la clotoide està en el cercle donat),

2. $\langle \gamma(1/\mu) - (1, 1), (\cos(\mu\, s^2), \sin(\mu\, s^2)) \rangle = 0$, (la clotoide és tangent al cercle en el punt de contacte).

Aquestes dues equacions, amb les dues incògnites a, μ, són

$$\left(a + \int_0^{1/\mu} \cos(\mu\, t^2)\, dt - 1\right)^2 + \left(\int_0^{1/\mu} \sin(\mu\, t^2)\, dt - 1\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\left(a + \int_0^{1/\mu} \cos(\mu\, t^2)\, dt - 1\right)\cos(1/\mu) + \left(\int_0^{1/\mu} \sin(\mu\, t^2)\, dt - 1\right)\sin(1/\mu) = 0.$$

Deduïm

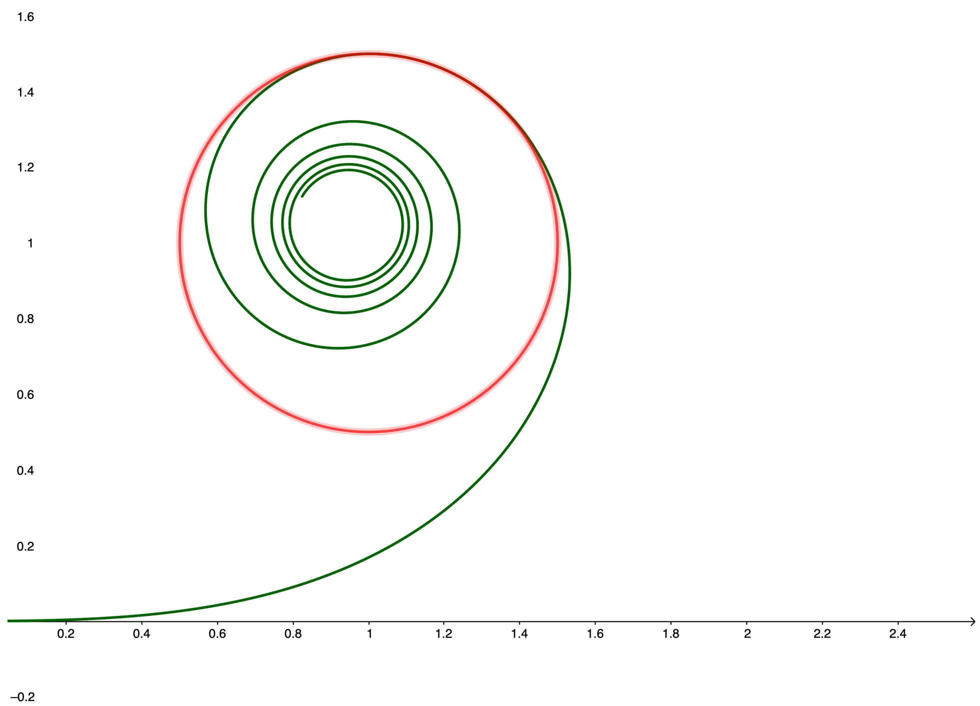
$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\sin(1/\mu) + 1 - \int_0^{1/\mu} \cos(\mu\, t^2) dt \\ \int_0^{1/\mu} \sin(\mu\, t^2) dt - 1 &= -\frac{1}{2}\cos(1/\mu). \end{aligned}$$

La segona equació només involucra μ i té solució $\mu = 0.356$ i per tant, substituint i resolent la primera equació obtenim $a = -0.106$.

Per tant la clotoide buscada és

$$\gamma(s) = \left(-0.106 + \int_0^s \cos(0.356\, t^2)\, dt, \int_0^s \sin(0.356\, t^2)\, dt\right).$$

Si dibuixem aquesta funció[18] obtenim



[18]Aprofito els càlculs en GeoGebra fets per Bernat Ancochea.