Soit P un polynôme à une indéterminée X, de forme standard :

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} c_k X^k$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P^n = \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} c_k X^k\right)^n$$

D'après le multinôme de Newton :

$$P^n = \sum_{\sum_{i=0}^{\deg(P)} k_i = n} \binom{n}{\{k_i | i \in [\![0, \deg(P)]\!]\}} \prod_{i=0}^{\deg(P)} (c_i X^i)^{k_i}$$

$$\Leftrightarrow P^n = \sum_{\sum_{i=0}^{\deg(P)} k_i = n} \binom{n}{\{k_i | i \in [\![0, \deg(P)]\!]\}} \prod_{i=0}^{\deg(P)} {c_i}^{k_i} \prod_{i=0}^{\deg(P)} (X^i)^{k_i}$$

$$\Leftrightarrow P^n = \sum_{\sum_{i=0}^{\deg(P)} k_i = n} \binom{n}{\{k_i | i \in [\![0, \deg(P)]\!]\}} \prod_{i=0}^{\deg(P)} {c_i}^{k_i} \prod_{i=0}^{\deg(P)} X^{i \cdot k_i}$$

$$\Leftrightarrow P^n = \sum_{\sum_{i=0}^{\deg(P)} k_i = n} \left[\left[\binom{n}{\{k_i | i \in [\![0, \deg(P)]\!]\}} \prod_{i=0}^{\deg(P)} {c_i}^{k_i}\right] X^{\sum_{i=0}^{\deg(P)} i \cdot k_i}\right]$$

Soit :

$$\boxed{P^n = \sum_{k=0}^{n \cdot \deg(P)} c_{k,n} X^k}$$

Avec, pour tout $k \in [\![0, n \cdot \deg(P)]\!]$:

$$\boxed{c_{k,n} = \sum_{\substack{\sum_{i=0}^{\deg(P)} k_i = n \\ \sum_{i=0}^{\deg(P)} i \cdot k_i = k}} \left[\binom{n}{\{k_i | i \in [\![0, \deg(P)]\!]\}} \prod_{i=0}^{\deg(P)} {c_i}^{k_i}\right]}$$

Alex R.

Exercice

Déterminez le coefficient de X^3 dans $(X^4+5X^3+2X^2+X+1)^5$.

En reprenant les notations précédentes :

$$(k, n, \deg(P), c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (3{,}5{,}4{,}1{,}1{,}2{,}5{,}1)$$

Le cœfficient souhaité est :

$$c_{3,5} = \sum_{\substack{\sum_{i=0}^{4} k_i = 5 \\ \sum_{i=0}^{4} i \cdot k_i = 3}} \left[\binom{5}{\{k_i | i \in [\![0,4]\!]\}} \prod_{i=0}^{4} {c_i}^{k_i} \right]$$

$$\Leftrightarrow c_{3,5} = \sum_{\substack{k_0+k_1+k_2+k_3+k_4=5 \\ \sum_{i=0}^{4} i \cdot k_i = 3}} \left[\binom{5}{k_0, k_1, k_2, k_3, k_4} c_0^{k_0} c_1^{k_1} c_2^{k_2} c_3^{k_3} c_4^{k_4} \right]$$

Les (k_i) vérifiant $k_0+k_1+k_2+k_3+k_4=5$ et $\sum_{i=0}^{4} i \cdot k_i = 3$ sont :

k_0	k_1	k_2	k_3	k_4
2	3	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0

Ainsi :

$$c_{3,5} = \binom{5}{2,3,0,0,0} c_0^2 c_1^3 + \binom{5}{3,1,1,0,0} c_0^3 c_1 c_2 + \binom{5}{4,0,0,1,0} c_0^4 c_3$$

$$\Leftrightarrow c_{3,5} = \frac{5!}{2!\,3!\,0!\,0!\,0!} \cdot 1^2 \cdot 1^3 + \frac{5!}{3!\,1!\,1!\,0!\,0!} \cdot 1^3 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{5!}{4!\,0!\,0!\,1!\,0!} \cdot 1^4 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_{3,5} = 75}$$

Vérification par Wolfram Alpha, « Expanded form ».