

Produktintegration (partielle Integration)

Formel I $\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$ (in Kurzschreibweise)

Formel II: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

Herleitung: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (Produktregel)

Integration der Gleichung führt zu

$$u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

Subtraktion von $\int u \cdot v'$ auf beiden Seiten führt zu Formel I

Subtraktion von $\int u' \cdot v$ auf beiden Seiten führt zu Formel II

Beispiel 1: $\int \underbrace{\cos(x)}_{u'} \cdot \underbrace{(4x+5)}_v dx$ Teilfunktionen: $u = \sin(x)$ $v = 4x + 5$
 $u' = \cos(x)$ $v' = 4$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\sin(x)}_u \cdot \underbrace{(4x+5)}_v - \int \underbrace{\sin(x)}_u \cdot \underbrace{(4)}_{v'} dx \\ &= \sin(x) \cdot (4x+5) - 4 \cdot \int \sin(x) dx \\ &= \sin(x) \cdot (4x+5) - 4 \cdot (-\cos(x)) + c \\ &= \sin(x) \cdot (4x+5) + 4 \cdot \cos(x) + c \end{aligned}$$

Probe durch Ableitung:

$$\begin{aligned} [\sin(x) \cdot (4x+5) + 4 \cdot \cos(x) + c]' &= \cos(x) \cdot (4x+5) + \sin(x) \cdot (4) + 4 \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos(x) \cdot (4x+5) \quad \text{qed.} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $\int \ln(x) dx = \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{(1)}_{v'} dx$ (Faktor-1-Trick !)

Teilfunktionen: $u = \ln(x)$ $v = x$
 $u' = \frac{1}{x}$ $v' = 1$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{(x)}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{(x)}_v dx \\ &= \ln(x) \cdot x - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + c \end{aligned}$$

Probe durch Ableitung:

$$[x \cdot \ln(x) - x + c]' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) \quad \text{qed.}$$