4.5 Násobení matic

Skalární součin vektorů

Přesněji *Eukleidovský skalární součin*. Uvažujme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Potom jejich skalárním součinem rozumíme operaci, jejímž výsledkem je číslo (skalár) a která je dána předpisem:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

Příklad 25. *Uvažujme vektory* $\vec{u} = (1, 5, 3)$, $\vec{v} = (0, -2, 1)$, $\vec{w} = (7, 2)$. *Potom*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -7$$

ale součiny $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ *nemají smysl.*

Poznámky. Skalární součin

1) Skalárně lze násobit pouze vektory se stejným počtem prvků, tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 5, 3) \cdot (7, 2)$ nemá smysl.

2) Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo (skalár).

3) Skalární součin souvisí s odchylkou (úhlem) φ příslušných dvou vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \varphi$$

Potom

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

Násobení matic

$$A \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Poznámky. Násobení matic

1) Ne každé dvě matice lze násobit. Například pro matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ má smysl násobení v pořadí $B \cdot A$, ale v pořadí $A \cdot B$ je násobit nelze. Nabízí se otázka „Jak poznáme, zda jsou dvě matice v příslušném pořadí násobitelné?“ Lze využít jejich typy. Například násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

můžeme napsat pomocí typů zúčastněných matic takto:

$$(2, 2) \cdot (2, 3) = (2, 3).$$

Porovnejme tento zápis se zápisem násobení

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

které nemá smysl:

$$(2, 3) \cdot (2, 2).$$

Odpověď na výše uvedenou otázku je jistě již zřejmá.

2) Násobení matic není komutativní.

Příklad 26. *Pro matice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *platí:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Příklad 27. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. *Dokažte:*

a) $AB = BA$, *b)* $AC \neq CA$,

c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, *d)* $(A+C)^2 \neq A^2 + 2AC + C^2$.

Vlastnosti operace násobení matic (za předpokladu, že je pro dané matice definováno):

i) asociativní

$$(AB)C = A(BC)$$

,

ii) nulová matice (značíme ji O)

$$AO = O,\ OA = O$$

,

iii) jednotková matice (značíme ji I nebo E)

$$AI = IA = A$$

,

iv) $(+, \cdot)-$distributivní

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

.

Poznámka. Uvažujme množinu $M_{n\times n}$ všech čtvercových matic téhož řádu n. Je zřejmé, že operace násobení matic je na této množině *neomezeně definovaná* (Zdůvodněte!). Přidáme-li k neomezené definovanosti ještě výše uvedené vlastnosti (i)–(iii) (tj. bez distributivnosti), můžeme říci, že algebraická struktura $(M_{n\times n}, \cdot)$ tvoří tzv. *monoid*. Není struktura $(M_{n\times n}, \cdot)$ rovnou *grupou*? Jaké vlastnosti by musela ještě mít?