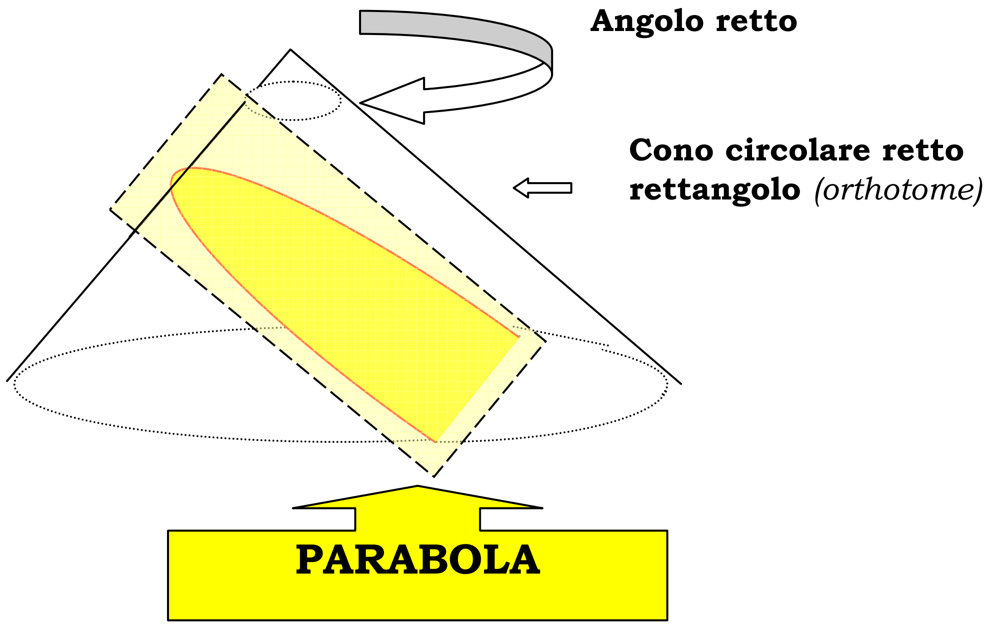
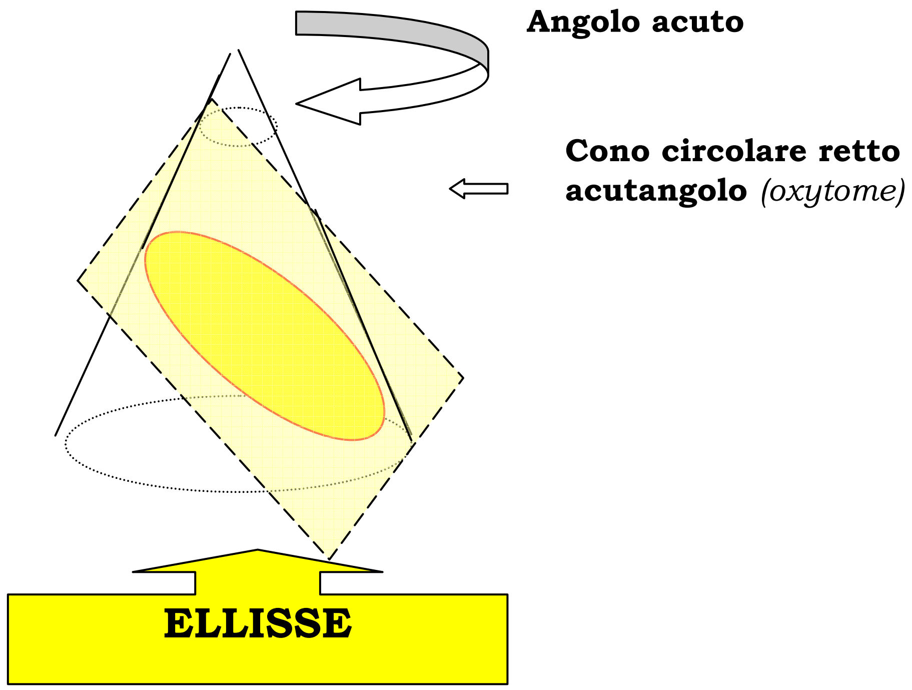
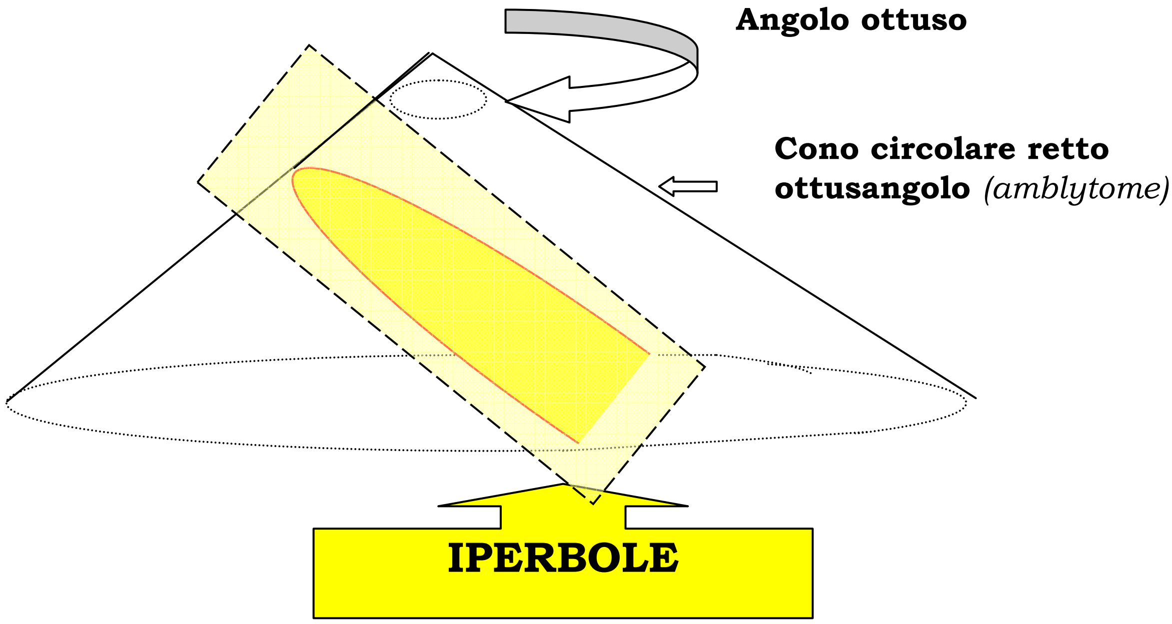
Le sezioni coniche

Queste curve furono introdotte dal matematico greco **Menecmo** (sec. IV a.C.), appartenente alla scuola platonica. Egli le ottenne intersecando un cono con un piano ortogonale alla sua superficie. A seconda che l'apertura del cono fosse un angolo retto, acuto oppure ottuso, la conica era una **parabola**, un'**ellisse**, oppure un'**iperbole**.

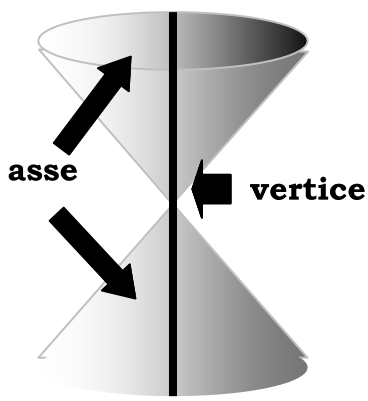




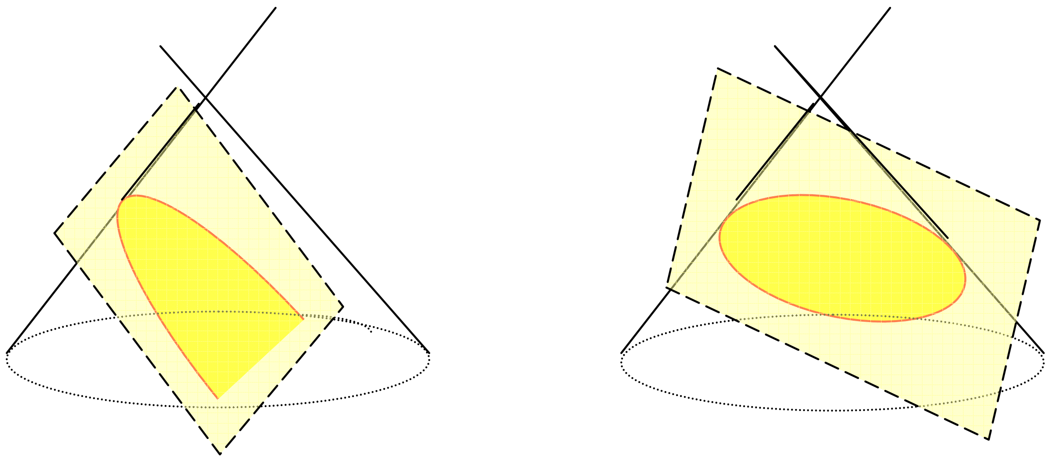


Menecmo dimostrò che era possibile risolvere il problema della **duplicazione del cubo** utilizzando due parabole, oppure una parabola ed un'iperbole.

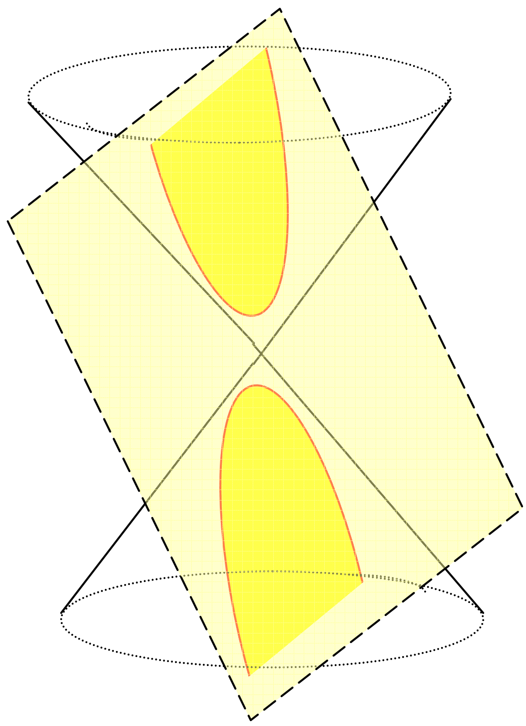
Lo studio delle sezioni coniche fu ripreso ed approfondito da **Apollonio di Perga**, che ad esse dedicò il trattato ***Le coniche***. Fu lui a coniare i termini parabola, ellisse e iperbole: essi significano, rispettivamente "uguaglianza", "mancanza" ed "eccesso", e si riferiscono alla relazione esistente fra due particolari misure geometriche nei diversi tipi di conica. Apollonio propose un nuovo modo di realizzare le coniche: egli sostituì, innanzitutto, il "cono gelato" di Menecmo (*cono ad una falda*) con il *cono a due falde,*



e dimostrò che tutte le coniche possono essere ottenute intersecando lo stesso cono (rettangolo, acutangolo od ottusangolo) con un piano: per cambiare la forma della conica è sufficiente variare l'inclinazione del piano rispetto al cono. La parabola e l'ellisse intersecano una sola falda del cono:

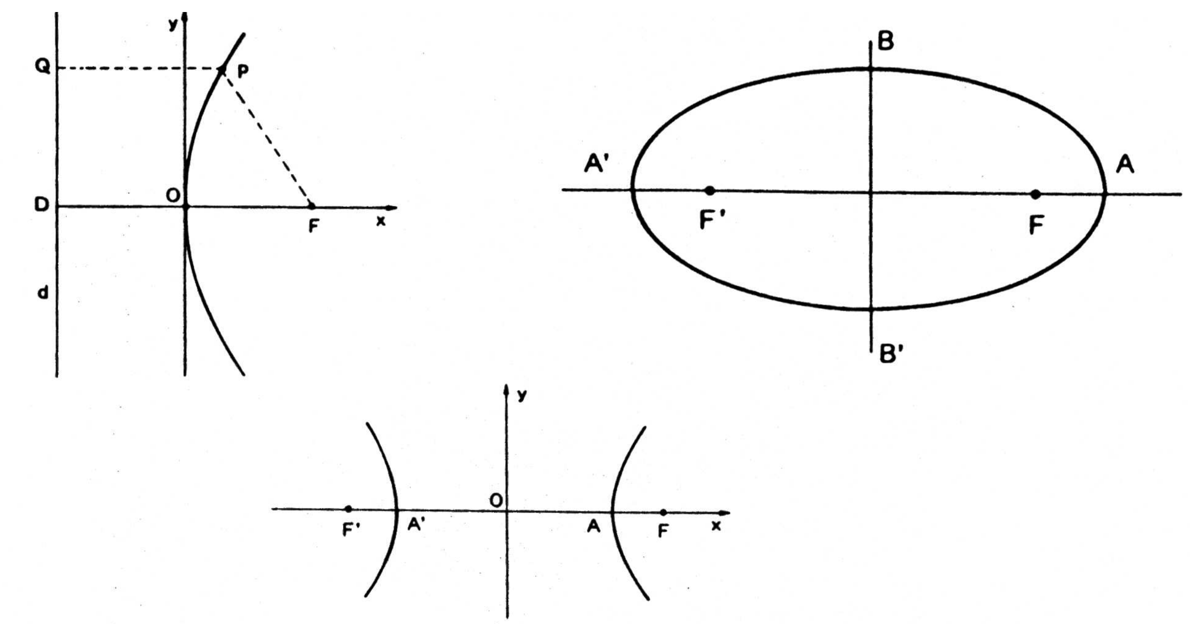


Invece l'iperbole di Apollonio taglia entrambe le falde del cono ed è una curva con due rami disgiunti e simmetrici:



Il cerchio è un tipo particolare di ellisse; sono cerchi le sezioni, ortogonali all'asse, di ogni falda del cono.

Ecco come appaiono i tre tipi di coniche, ciascuno in un opportuno **sistema di coordinate cartesiane**:

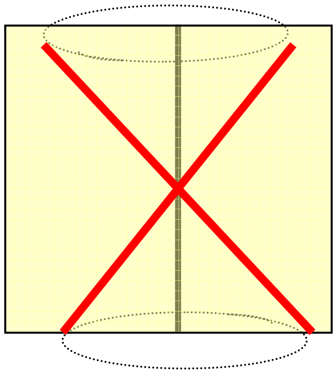


Le equazioni cartesiane delle coniche si ottengono ponendo uguale a zero un polinomio di grado due, e furono scritte per la prima volta dal matematico inglese **John Wallis** nel trattato ***De sectionibus conicis*** (1655): egli le derivò dalle proprietà geometriche dimostrate da Apollonio. Le coniche della figura hanno equazioni delle forme seguenti, dette *canoniche:*

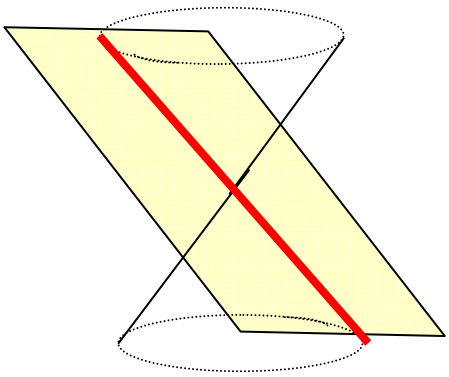
Parabola: $y^2 - px = 0$
Ellisse: $x^2/a + y^2/b = 1$
Iperbole: $x^2/a - y^2/b = 1,$

ove p, a, b sono opportune costanti positive.

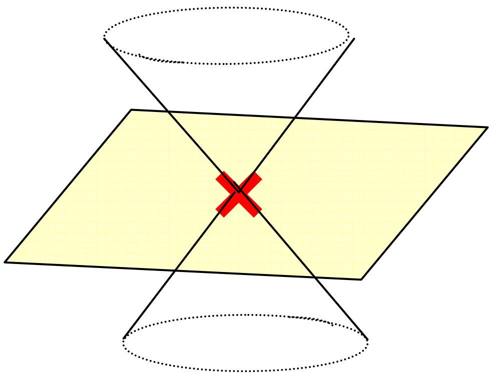
Si noti che l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono state ottenute intersecando il cono con piani *non passanti* per il suo vertice. Vediamo ora cosa accade quando intersechiamo il cono con un piano passante per il suo vertice. L'intersezione può essere costituita da due rette, per esempio se il piano contiene l'asse del cono:



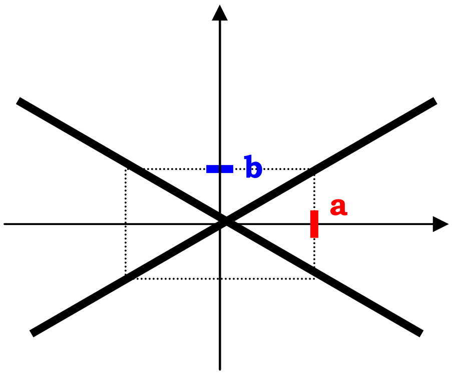
Oppure l'intersezione può essere una retta (doppia):



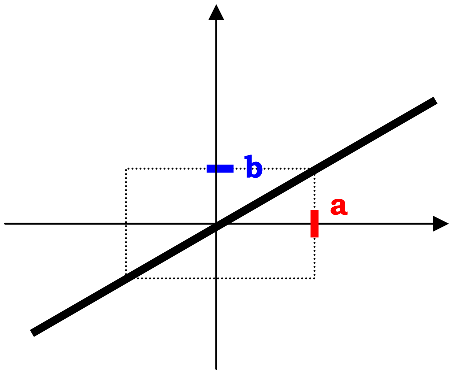
oppure un punto (doppio):



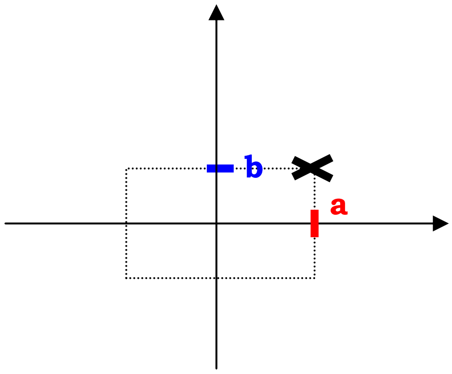
Le coppie di rette, le rette doppie ed i punti doppi sono dunque particolari tipi di coniche, che corrispondono a casi limite e sono dette *degeneri.* Anch'esse sono rappresentate nel piano da equazioni di grado due:



C: (bx-ay)(bx+ay) = 0



C: (bx-ay)² = 0



C: (x-a)² + (y-b)² = 0

In un certo senso, anche il punto doppio può nascondere una coppia di rette. Questo è possibile solo a patto di estendere il piano cartesiano in modo da dare significato di coordinata a tutti i **numeri complessi**. I punti delle rette in questione hanno quasi tutti almeno una coordinata complessa non reale: l'unico punto reale è il loro punto d'intersezione (✕). Le equazioni cartesiane complesse di queste due rette sono:

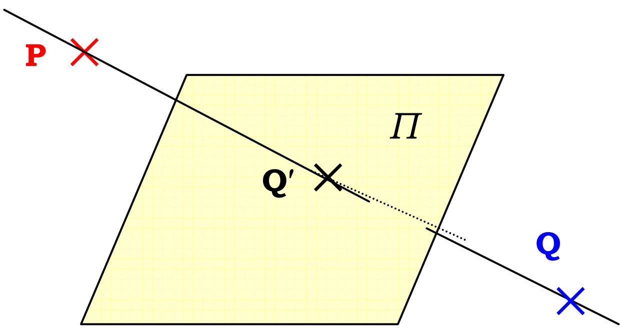
$$r_1: (x-a) + i(y-b) = 0 \qquad\qquad r_2: (x-a) - i(y-b) = 0$$

L'ellisse, la parabola e l'iperbole sono dette coniche *non degeneri.*

Secondo una suggestiva descrizione data da **Keplero** nel suo trattato ***Ad Vitellionem paralipomena*** *("Introduzione all'ottica di Witelo"),* esiste un rapporto di continuità fra i diversi tipi di coniche: da una retta doppia se ne ottengono facilmente due, dopo aver sdoppiato il loro punto d'intersezione, e queste, a loro volta, possono venire deformate nei due rami di un'iperbole; allontanando all'infinito uno dei due rami, si perviene al caso limite della parabola; immaginando di far passare il secondo ramo al di là dell'infinito, e di farlo tornare verso la conica dalla parte opposta, fino al ricongiungimento, si ottiene infine un'ellisse.

Tra i numerosissimi problemi affrontati da Apollonio nel suo trattato v'è quello di determinare la **tangente ad una conica** in un punto dato.

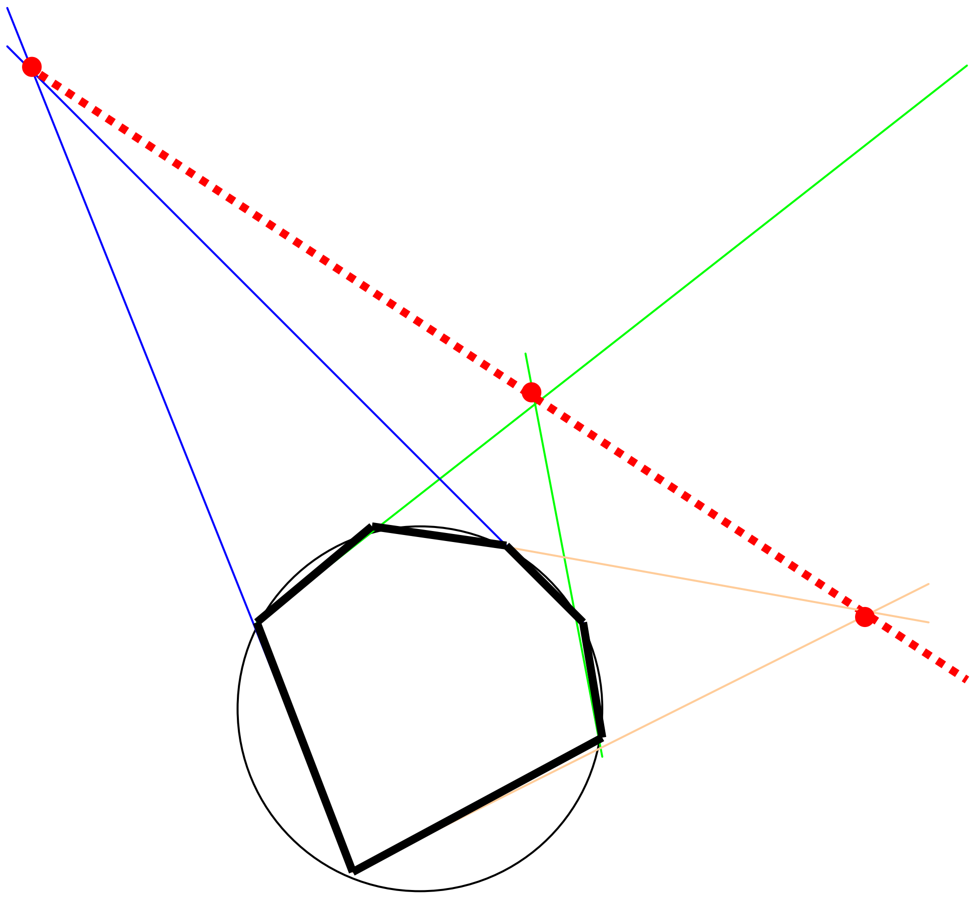
Altre opere dell'antichità dedicate alle coniche sono un trattato di **Euclide** ed uno di **Archimede**.
Nel 1600 l'argomento venne ripreso con nuovo vigore: **Descartes** ne ***La Géométrie*** lo affrontò con i mezzi della ***geometria analitica*** da lui inventati. **Desargues**, **Pascal** e **de la Hire** dimostrarono nuovi teoremi utilizzando la ***geometria proiettiva*** *(o **geometria descrittiva**)*. Vediamo innanzitutto cosa si intende, nello spazio a tre dimensioni, per ***proiezione da un punto su di un piano***.
Siano dati un punto P ed un piano Π non passante per P. Consideriamo un punto Q, diverso da P. Tracciamo la retta $[P, Q]$. In generale questa retta intersecherà Π in un punto Q', che viene detto la *proiezione da P di Q su Π.*



Dato un insieme di punti, ad esempio una curva, si definisce la proiezione della curva dal punto P sul piano Π come l'insieme delle proiezioni dei punti della curva stessa. Fissiamo una particolare conica C non degenere (ellisse, parabola o iperbole), ottenuta come sezione di un certo cono. Prendiamo come punto P il vertice del cono. È chiaro che le rette congiungenti P ed i punti di C formano il cono stesso. La proiezione C' di C sul piano Π sarà dunque l'intersezione del cono con Π. Poiché per ipotesi il piano Π non passa per P, la conica C' è non degenere. Scegliendo opportunamente il piano Π, si può fare in modo che C' sia un'ellisse, una parabola oppure un'iperbole, e ciò indipendentemente dalla natura della conica *C*. ***Ogni conica non degenere può essere proiettata in una qualunque altra conica non degenere***. A questo proposito **Newton** disse: *"Se le ombre delle figure sono proiettate su un piano infinito illuminato da un punto luminoso, le ombre delle sezioni coniche saranno sempre sezioni coniche."* Ecco alcune **immagini**.

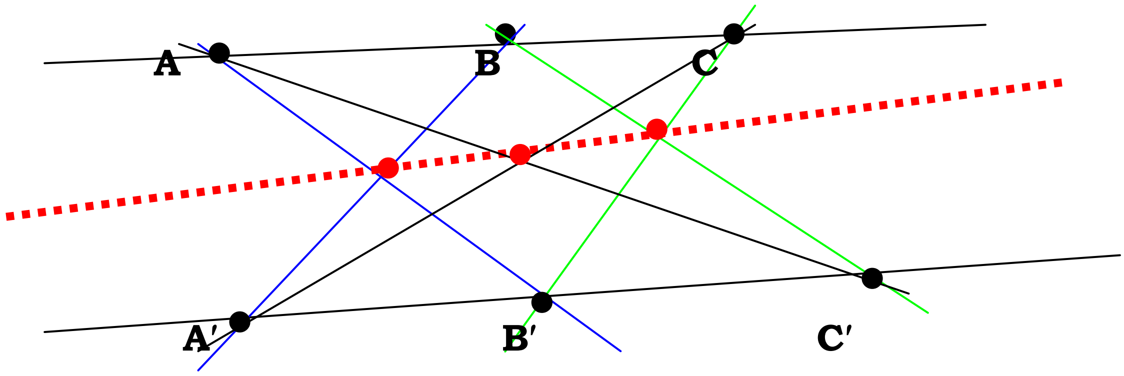
Ciò permette di estendere molti teoremi validi per un certo tipo di conica non degenere ad ogni altro tipo di conica non degenere. Consideriamo, a titolo di esempio, un noto **teorema di Pascal**, tratto da un suo trattatello di otto pagine, intitolato ***Essai sur les coniques***, che egli scrisse all'età di soli diciassette anni. Egli dimostra il teorema per il cerchio, ed osserva che per proiezione esso si trasferisce ad ogni conica non degenere. Ecco l'enunciato:

Dato un esagono inscritto in un cerchio, i tre punti d'intersezione dei prolungamenti delle coppie di lati opposti sono allineati.

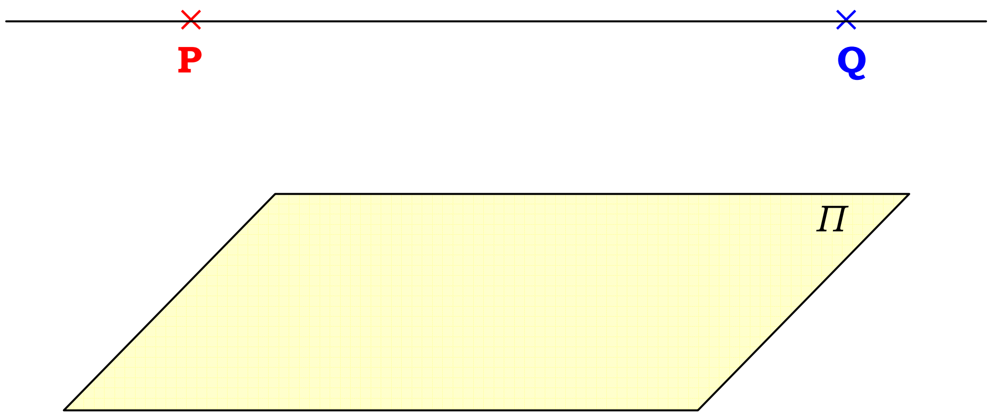


In realtà questo teorema si estende anche al caso in cui la conica è una coppia di rette: si ottiene allora il famoso **Teorema di Pappo**. L'enunciato è il seguente: *se A,B,C sono tre punti su di una retta, e*

*A′,B′,C′ sono tre punti sull'altra retta, allora i punti d'intersezione delle rette [*A, B*′] e [A′, B], [*B, C*′] e [B′, C], [C, A′] e [C′, A] sono allineati.*



La proiezione, così come l'abbiamo definita, nasconde, in realtà, un problema, che finora abbiamo sottaciuto. Questo problema si pone, ad esempio, in un caso come quello raffigurato:



Vogliamo proiettare il punto *Q* da *P* sul piano *Π,* ma la retta [*P*, *Q*] è parallela al piano *Π,* quindi è impossibile determinare l'intersezione *Q′*. Il problema si risolve con un'idea di **Desargues**: completiamo lo spazio aggiungendo un ***piano all'infinito*** Π_0, non visibile. In questo modo lo ***spazio affine*** diventa lo ***spazio proiettivo***. Il piano Π_0 interseca la retta [*P*, *Q*] in un punto, detto ***punto all'infinito*** della retta, ed interseca il piano *Π* in una retta, chiamata ***retta all'infinito*** del piano. La retta ed il piano estesi prendono i nomi di ***retta proiettiva*** e ***piano proiettivo*** rispettivamente. La retta [*P*, *Q*] ed il piano *Π* si intersecano all'infinito, nel punto all'infinito della retta: è questo il punto *Q′* cercato.
Parabole ed iperboli possiedono punti all'infinito, detti anche *impropri.* Ad esempio, proiettando un'ellisse su di una parabola, uno dei punti dell'ellisse viene proiettato all'infinito, in un punto (improprio) della parabola, nel quale quest'ultima "si richiude".

L'ellisse, la parabola e l'iperbole sono coniche diverse solo secondo la ***classificazione affine***. Secondo la ***classificazione proiettiva*** queste coniche sono tutte equivalenti: dal punto di vista proiettivo, infatti, le coniche si distinguono solo in semplicemente degeneri, doppiamente degeneri e non degeneri.

Il cono appartiene ad una classe particolare di superficie, dette ***quadriche***, caratterizzate dal fatto che tutte le loro sezioni piane sono coniche. Ad esempio, il ***paraboloide rotondo*** è la quadrica ottenuta facendo ruotare un parabola intorno al suo asse di simmetria. Altri esempi di quadriche sono **l'iperboloide iperbolico** e **l'iperboloide ellittico**.

Le coniche come luoghi geometrici
La costruzione delle coniche
Le leggi di Keplero
Specchi parabolici, ellittici e iperbolici
La parabola e la caduta dei gravi
Le coniche nell'arte
La parabola secondo Apollonio
La costruzione delle coniche secondo Newton
La curvatura della parabola