Apuntes - Teoria y Ejercicios - Parcial 3

Funciones

1. Dominio

Def.- *El domino de una función f es el conjuto de números reales que tienen imagen por f.*
Escribiremos $Dom(f)$, dominio de f.

Ejemplo

La función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene como dominio el conjunto de los números positivos, incluyendo el cero, puesto que la raiz de un número negativo no existe y por lo tanto no podremos calcular su imagen.

$$Dom(f) = [0, \infty)$$

Ejemplo

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto de todos los números reales excepto el cero puesto que no podemos dividir por cero y por tanto no podremos calcular su imagen.

$$Dom(f) = \Re \setminus 0$$

Ejemplo

La función $f(x) = \ln x$ tiene como dominio el conjunto de todos los números reales positivos puesto que para los números negativos no podríamos calcular su imagen.

$$Dom(f) = (0, \infty) \quad \text{o bien} \quad Dom(f) = \Re^+$$

Ejemplo

La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. En este caso se trata de una función polinómica, en donde todas las operaciones pueden realizarse (se trata de realizar potencias, multiplicaciones, sumas y restas), luego el dominio son todos los números reales.

$$Dom(f) = \Re$$

Ejercicios

1. Encuentra el dominio de las siguientes funciones, expresándolo adecuadamente.

$f(x) = 9 - 4x^2$ $\quad g(x) = \frac{x}{7-x^2}$ $\quad h(x) = \sqrt[4]{x^2+5x+8}$

$i(x) = \frac{x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$ $\quad j(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ $\quad k(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$

$l(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$ $\quad m(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{-1}{x-7}}$ $\quad n(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{7-x^2}}$

$o(x) = \ln(2x+3)$ $\quad p(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad q(x) = \ln(2x+3) + \frac{1}{x}$

$r(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ $\quad s(x) = \sin(\sqrt{1-x^2})$ $\quad t(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

2. Monotonía

Def.- *Diremos que la función f es* ***creciente*** *en el conjunto de puntos* $x \in Dom(f)$ *en donde* $f'(x) \geqslant 0$. Diremos **estrictamente creciente** si $f'(x) > 0$.

Def.- *Diremos que la función f es* ***decreciente*** *en el conjunto de puntos* $x \in Dom(f)$ *en donde* $f'(x) \leqslant 0$. Diremos **estrictamente decreciente** si $f'(x) < 0$.

Def.- *Diremos que una función es* ***monótona*** *en el caso de que sea creciente, o bien decreciente, en* ***todo*** *su dominio. Si es creciente diremos* ***monótona creciente****, si es decreciente diremos* ***monótona decreciente****.*

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función $f(x) = 2x$

Para estudiar la **montonia** tendremos que encontrar los **intervalos de crecimiento** y de **decrecimiento** de la función.

Observar que la derivada $f'(x) = 2$, luego $f'(x) \geqslant 0 \; \forall x \in \Re$ (*para todo valor real*), lo que implica que la función es monótona creciente. Además podemos afirmar que es **estrictamente** creciente puesto que $f'(x) > 0 \; \forall x$.

Nota*: Se trata de una recta con pendiente 2.*

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función* $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Calculamos la derivada $f'(x) = 2x - 2$. Para saber cuando es creciente tenemos que resolver la inecuación $f'(x) \geqslant 0$. Es decir $2x - 2 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 2 \iff x \geqslant 1$. Deducimos que la función es monótona creciente en el intervalo $(1, \infty)$, mientras que deberá ser monótona decreciente en $(-\infty, 1)$.

Nota*: Se trata de una parábola convexa con eje de simetría* $x = 1$.

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Calculamos la derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Para saber cuando es creciente tenemos que resolver la inecuación $f'(x) \geqslant 0$. Es decir $x^2 - 6x \geqslant 0 \iff x(x-6) \geqslant 0$. Esta inecuación se resuelve fácilmente observando que el producto de números positivos resulta positivo, al igual que el producto de números negativos. Deducimos que la función es monótona creciente si $x \in (-\infty, 0) \cup (6, \infty)$. Mientras que será decreciente en el intervalo $(0, 6)$.

***Nota**: La derivada es una parábola convexa que corta el eje de abcisas en $x = 0$ y $x = 6$, que son los puntos donde la derivada cambia de signo.*

Ejemplo

Estudiar la monotonía de la función* $f(x) = \ln x$

Primero de todo encontramos el dominio de f. $Dom(f) = (0, \infty)$. Ahora calculamos la derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$. Para saber cuando es creciente tenemos que resolver la inecuación $f'(x) \geqslant 0$. Es decir $\frac{1}{x} \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Puesto que el número 0 no forma parte del dominio, concluimos que la función es **siempre**, $\forall x \in Dom(f)$, creciente.

***Nota**: Cuando estudiamos la monotonía de una función solo nos interesa estudiarla en el conjunto en donde la función está definida, es decir en su dominio $Dom(f)$. Por eso decimos que el logaritmo natural es monótona creciente, porque lo es en todo su dominio.*

Ejercicios

1. Estudia el dominio y la monotonía de las siguientes funciones, expresándola adecuadamente.

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = 2x^2 - 8x + 9 & g(x) = x^3 - 2x + 4 & h(x) = \sqrt{x^2 - 1} \\
i(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} & j(x) = 4 + 15x + 6x^2 - x^3 & k(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \\
l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & m(x) = \frac{x}{x^2+1} & n(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+3} \\
o(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3} & p(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} & q(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}
\end{array}
$$

3. Extremos Relativos

Aunque los extremos relativos tienen una definición más general, *llamaremos **extremo relativo** de la función f a un punto **máximo o mínimo** local de su gráfica.*

Nota: *Observar que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un máximo o mínimo relativo siempre vale 0. Es decir, si $x = a$ és la abcisa de un extremo entonces $f'(a) = 0$.*

Objetivo: *Encontrar los extremos relativos de una función y decidir si se trata de máximos o mínimos relativos.*

Cómo encontrar los extremos relativos?

1. Derivar $\Rightarrow f'(x)$
2. Resolver la ecuación $\Rightarrow f'(x) = 0$
3. Comprovar que la segunda derivada no es cero $\Rightarrow \; f''(a) \neq 0$, siendo $x = a$ una solución de la ecuación anterior.
4. Dar correctamente los extremos. Es decir, expresarlos como puntos de la gráfica de $f \Rightarrow$ el punto $(a, f(a))$ será el extremo relativo.

Ejemplo

Encuentra los Extremos de la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 48$$

1. Derivamos $\Rightarrow \; f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$
2. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0$. Simplificada $\Rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0$
3. Una vez resuelta la ecuación de segundo grado encontramos 2 soluciones: $x = 2$ i $x = 3$.
4. Ahora comprovamos que se trata de extremos relativos

   calculamos la segunda derivada $\Rightarrow f''(x) = 12x - 30$
   Evaluamos: $f''(2) = -6 \neq 0, \; f''(3) = 6 \neq 0$. Efectivamente son extremos relativos.

Respuesta Los extremos relativos son $p(2, f(2))$ i $q(3, f(3))$. Falta encontrar las ordenadas:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2 + 36 \cdot 2 + 48 = 76 \Rightarrow p(2, 76)$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3 + 36 \cdot 3 + 48 = 75 \Rightarrow q(3, 75)$$

Cómo clasificar los extremos relativos?

Disponemos de dos formas de decidir si un extremo es un máximo o bien un mínimo relativo. Dependerá de nuestra decisión o de la pregunta concreta el usar uno u otro método.

Método 1 – Criterio de la 2ª derivada

Supongamos que hemos encontrado un extremo relativo en el punto de abcisa $x = a$, entonces haremos lo siguiente:

1. Calcular la segunda derivada $f''(x)$

2. Evaluarla en $x = a$ y mirar si el signo es positivo o negativo:

- Si $f''(a) > 0$ será un **mínimo**.
- Si $f''(a) < 0$ será un **máximo**.
- Si $f''(a) = 0$ el criterio no es concluyente *.

* En la sección *Puntos de inflexión* veremos la forma de decidir que tipo de punto es. En la sección de **concavidad** veremos por qué la seguda derivada decide el tipo de extremo.

Ejemplo

Siguiendo el ejemplo anterior, hemos visto que f tiene extremos relativos en los puntos $P(2,76)$ i $Q(3,75)$. Para clasificarlos hacemos lo siguente:

1. Calculamos $f''(x) = 12x - 30$
2. Substituimos en las abcisas:

   - Si $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 12 \cdot 2 - 30 = -6 < 0 \Rightarrow$ **Máximo** en el punto $P(2,76)$.
   - Si $x = 3 \Rightarrow f''(3) = 12 \cdot 3 - 30 = 6 > 0 \Rightarrow$ **Mínimo** en el punto $Q(3,75)$.

Ejemplo

Calcular los extremos de la función $g(x) = x^3 - 5$

Derivamos e igualamos a cero $\Rightarrow g'(x) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en $x = 0$. $g''(x) = 6x \Rightarrow g''(0) = 0$.

Conclusión: No podemos asegurar que en el punto de abcisa $x = 0$ exista un extremo ya que la segunda derivada vale cero.

Método 2 - Tabla de Monotonía

Retomamos el ejemplo anterior: $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 48 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$ Se trata de construir una tabla como la que se muestra abajo teniendo en cuenta los siguientes 2 puntos:

1. Se construyen los intervalos de monotonía a partir de los posibles extremos y las asímptotas verticales (puntos límite que no forman parte del dominio). En este caso los extremos son $x = 2$ y $x = 3$.

2. Escogemos un valor $x = b$ cualquiera para cada intervalo y calculamos el signo de la derivada $f'(b)$

x	$(-\infty, 2)$	$x = 2$	$(2,3)$	$x = 3$	$(3, \infty)$
Signo $f'(x)$	$f'(1) > 0$		$f'(2.5) < 0$		$f'(4) > 0$
Monotonía	$\nearrow$ crece		$\searrow$ decrece		$\nearrow$ crece
Extremo		Máx.		Mín.	

Nota: Cuando f es una función **estrictamente creciente** los extremos de la función $f \circ g$ son los mismos que los extremos de g.

Ejemplo - Para encontrar los extremos de la función

$$h(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$$

basta con encontrar los extremos de $g(x) = x^2 + 3x + 2$, puesto que la función $f(x) = \ln(x)$ es creciente. Observar que

$$f \circ g\ (x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x + 2) = h(x)$$

Nota: Las funciones e^x, $\ln x$ o $\sqrt{x}$ son crecientes, como en las funciones $j(x)$, $k(x)$ y $m(x)$ del ejercicio 1.

Ejercicios

1. Dar el *dominio* de las siguientes funciones, estudia la *monotonía* y además *encuentra* y *clasifica* los extremos relativos.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 + 1 & g(x) = x^3 - 5 & h(x) = 2^x + 5 \\ i(x) = 12x^3 + 54x^2 - 144x - 2 & j(x) = \ln(x^4 + x^2 + 1) & k(x) = e^{-3x^2-2x+2} \\ l(x) = xe^{4x} & m(x) = \sqrt{-3x^2 - 2x + 2} & n(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3 \end{array}$$

Funciones con parámetros

2. Encuentra los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ en términos del parámetro a.

3. Sea la función $f(x) = ae^{-x^2+bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

   a) Calcular los valores de a y b para que la función tenga un extremo en el punto $(1, e)$

   b) Para el caso a=3 y b=5, describir el comportamiento de la función cuando x tiende a ∞.

4. Considerar la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$

   a) Calcula el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

   b) Para los valores $a = 2,\ b = 1$ y $c = 3$, calcular las abcisas de los extremos relativos y clasificarlos.

   [Exámen de selectividad 2018 - Generalitat de Catalunya]

5. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$, siendo $k \neq 0, k \in \Re$.

   a) Calcular el dominio, las asímptotas y la monotonia.

   b) Calcular los puntos máximos o mínimos relativos usando el criterio de la segunda derivada. Si existen, encuentra los puntos de inflexión?

   [Exámen de selectividad 2017 - Generalitat de Catalunya]

4. Concavidad

A continuación se da un criterio para decidir cuando una función tiene **concavidad hacia arriba** (convexa) o **concavidad hacia abajo** (cóncava).

* No se da la definición para no añadir más dificultad, sinembargo podemos mirar la gráfica de funciones para hacernos una idea de su significado. La función x^2 es convexa mientras que la función $-x^2$ es cóncava.

Criterio de concavidad – 2ª derivada

La función f es **cóncava** en x si $f''(x) < 0$ (cóncava hacia abajo)

La función f es **convexa** en x si $f''(x) > 0$ (cóncava hacia arriba)

Ejemplo

Estudiar la concavidad de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Para estudiar la concavidad usaremos el criterio que usa la 2ª derivada, por lo que tenemos que calcularla:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$

f es cóncava hacia abajo (cóncava) $\iff f''(x) < 0 \iff 6x - 12 < 0 \iff x < \frac{12}{6} = 2$

f es cóncava $\iff x \in (-\infty, 2)$

f es convexa $\iff x \in (2, \infty)$

Ejemplo

Estudiar la concavidad de la función $g(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

$g'(x) = \frac{4x^3x^2-(x^4+1)2x}{x^4} = \frac{2x^5-2x}{x^4} \Rightarrow g''(x) = \frac{(10x^4-2)x^4-(2x^5-2x)4x^3}{x^8} = \frac{6x^4}{x^8} = \frac{6}{x^4}$

Obtenemos $g''(x) = \frac{6}{x^4}$, de donde deducimos que g es cóncava $\iff g''(x) < 0 \iff \frac{6}{x^4} < 0$, lo cual es imposible ya que el denominador (x^4) es siempre positivo.

Respuesta La función g es convexa $\forall x \in \Re$

Ejercicios

1. Estudia la concavidad de las siguientes funciones

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 1 \quad g(x) = -x^4 + 2x^2$
$h(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad i(x) = \sqrt[3]{x}$
$h(x) = x(x-2)^3 \quad i(x) = x + \frac{4}{x}$

5. Puntos de inflexión

Def : Se llama punto de inflexión de la gráfica de una función f a cualquier punto en donde la función canvia su concavidad. Es decir, *la función pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa*.

A continuación un **criterio** para encontrar analíticamente los puntos de inflexión.

Sea un punto $(a, f(a))$ perteneciente a la gráfica de f, entonces es punto de inflexión si cumple las siguientes dos propiedades:

1. $f''(a) = 0$. La segunda derivada evaluada en la abcisa $x = a$ vale cero.
2. $f^i(a) \neq 0$. La primera derivada i-ésima evaluada en $x = a$ diferente de cero cumple que i es impar.

*Normalmente la **tercera** derivada será suficiente para ver que un punto es de inflexión.* $\Rightarrow f'''(a) \neq 0$

Metodología para localizar los puntos de inflexión

1. **Encontrar candidatos:** calcular la segunda derivada y resolver la ecuación $f''(x) = 0$

   i) Si no hay solución, no habran puntos de inflexión.

   ii) Si tiene solución, para cada abcisa $x = a$ tendremos un **candidato** a punto de inflexión.

2. **Decidir si son puntos de inflexión:** calcular la tercera derivada y evaluarla en cada candidato:

   i) Si $f'''(a) \neq 0$, entonces tenemos un punto de inflexión en $P(a, f(a))$

   ii) En caso contrario, calcular las sucesivas derivadas hasta encontrar la primera que sea diferente de cero, $f^i(a) \neq 0$

   iii) Si i es impar, se trata de un punto de inflexión. Si es par **no será punto de inflexión**.

Ejemplo

Encontrar los puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

i) Primero **encontramos los candidatos**.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \iff$$
$$x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nuestros candidatos se encuentran en los puntos de abcisa $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) Ahora **decidimos** si se trata de puntos de inflexión usando la 3ª derivada.

- Para el candidato $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0 \Rightarrow \text{Es un punto de inflexión}$$

- Para el candidato $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ observamos que también se cumple que $f'''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$, luego es otro punto de inflexión.
- Falta encontrar las ordenadas de cada punto de inflexión:

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{77}{9}$$
$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{77}{9}$$

Respuesta Los puntos de inflexión son $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{77}{9})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{77}{9})$

Ejemplo

Encontrar los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Encontramos los candidatos

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f''(x) = 0 \iff x = 0$$

Ahora decidimos si en $x = 0$ tenemos un punto de inflexión usando la 3ª derivada.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \; \forall x \Rightarrow f''(0) \neq 0 \Rightarrow \text{punto de inflexión en } x = 0$. La ordenada del punto será $f(0)=0^3-3·0+2=2. **Respuesta** La función tiene el punto de inflexión $(0, 2)$.

Ejercicios

Cálculo de puntos de inflexión

1. Encuentra los *puntos de inflexión* de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11 \qquad g(x) = x^4 - 6x^2 + 4$$
$$h(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad i(x) = e^{-x^2}$$

2. Para las funciones del ejercicio 4.1 calcular los puntos de inflexión.

Resolución de problemas reales - Optimización

1. El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función $B(x) = 1.2x - (0.1x)^3$

   a) Calcula la producción mensual que hacen máximo el beneficio.

   b) El beneficio máximo correspondiente a dicha producción.

2. La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley $C(x) = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$, siendo x el dia del mes.

a) Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, sin tener en cuenta el primer y último dia.

b) Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.

Aplicaciones Prácticas - Extremos relativos

Los extremos relativos nos permiten optimizar determinados procesos, como por ejemplo la producción. Aquí unos ejemplos en forma de ejercicio:

Ejemplo 1.

Encuentra dos número enteros positivos cuya suma sea 20 y el producto del primero por el segundo sea máximo.

En primer lugar cabe observar que se desea obtener el máximo de un producto, así que debemos construir la función producto para poder calcular su máximo. Llamemos a esta función $f(x, y) = x \cdot y$ (producto de dos números). Además el enunciado nos dice que la suma debe ser $20 \Rightarrow x + y = 20$. Para poder obtener el máximo necesitamos poner la y en términos de x, lo que se consigue fácilmente $x + y = 20 \iff y = 20 - x$. Esto nos deja la siguiente función $f(x) = x(20 - x)$.

Calculemos los extremos y veamos si hay algún máximo:
$f'(x) = 1 \cdot (20 - x) + x \cdot (-1) = 0 \iff 20 - 2x = 0 \iff 2x = 20 \iff x = 10$

Veamos que tipo de extremo es: $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(10) < 0 \Rightarrow$ en $x = 10$ tenemos un máximo!

Respuesta El producto de dos número cuya suma es 20 será **máximo** cuando valen 10.

Ejemplo 2.

Un granjero compra 2400 metros de malla ciclónica para cercar un terreno rectangular que colinda con un rio. Él considera que no es necesario colocar la cerca en el lado de rio. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno si el granjero le interesa cercar el mayor área posible?

Se trata de un problema de optimización ya que pretende cercar el máyor área posible teniendo en cuenta que dispone 2400m de malla. Recursos limitados. Si queremos maximizar el área deberemos construir la función del área en terminos de los costados del terreno. El área de un terreno rectangular es $A(x, y) = xy$ siendo x e y los costados.

Para obtener el máximo de la función área necesitamos poner la y en términos de x. Lo que se consigue sabiendo que el perímetro del terreno debe ser 2400m sin tener en cuenta el costado del rio. Es decir:

$$2 \text{ costados de longitud x} + 1 \text{ costado de longitud y} \Rightarrow 2x + y = 2400 \iff y = 2400 - 2x$$

La función área será $A(x) = x(2400 - 2x)$. Encontremos sus extremos para ver si se puede maximizar:

$$A'(x) = 1 \cdot (2400 - 2x) + x \cdot (-2) = 0 \iff 2400 - 4x = 0 \iff x = 600m$$

Veamos ahora si se trata de un máximo:

$$A''(x) = -4 \Rightarrow A''(600) < 0 \Rightarrow \text{en x=600 tenemos un máximo}$$

Respuesta El terreno debe tener 600m de cerco en dos costados mientras que el tercero debe ser $y = 2400 - 2 \cdot 600 = 1200m$.

Ejemplo 3.

Se quiere fabricar una lata de refresco que contenga $36cl$ de líquido. Encuentra las dimensiones de la lata que minimizaran el coste de producción (1l equivale a 100cl y tambien a $1000cm^3$).

Para minimizar el costo de producción necesitamos usar el mínimo material posible para construir la lata, es decir que debemos minimizar la superfície de la lata.

Recordemos que una lata es cilíndrica y por lo tanto el área, en términos del radio de la base r y la altura h, es $A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Para reducir la función a una sola variable vamos a expresar h en términos r, sabiendo que el volumen de la lata son 0,36 litros, es decir $360cm^3$:

$$\text{Volumen de la lata} = \pi r^2 h = 360 \Rightarrow h = \frac{360}{\pi r^2} \Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{360}{\pi r^2}$$

Simplificando la expresión tenemos $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{720}{r}$

Obtengamos ahora los extremos de la función área y comprobemos si tiene un mínimo:

$$A'(r) = 4\pi r + \frac{-720}{r^2} = 0 \iff r^3 = \frac{720}{4\pi} = 5.654,86 \iff r = \sqrt[3]{5.654,86} \simeq 3,85$$

Veamos si se trata del mínimo:

$$A''(r) = 4\pi + \frac{2 \cdot 720}{r^3} \Rightarrow A''(3,85) > 0 \Rightarrow \text{mínimo en r=3,83}$$

Respuesta El radio de la lata debe tener $3,85cm$ y la altura deberá ser $h \simeq \frac{360}{\pi 3.85^2} \simeq 7,71cm$. Así se conseguirá minimizar la superfície y por tanto el coste de su producción.

Ejemplo 4.

El gerente de un edificio de 50 departamentos ha fijado el precio de renta en 3600 euros/mes por departamento. Se ha percatado que si mantiene ese precio, todos los departamentos son arrendados, pero por cada 100 euros de aumento, un departamento va quedando vacante. ¿Qué precio debe cobrar por departamento para maximizar el ingreso que proviene de ese edificio y cuál sería ese máximo ingreso?

Lo primero es construir la función del total de ingresos. Para saber el precio por departamento, supondremos que tenemos un número x de departamentos libres. Lógicamente, el número de departamentos arrendados serian $50 - x$. El propietario estaría arrendando cada departamento a un precio de $3600 + 100x$. Por lo que el Beneficio total vendría dado por la función $B(x) = (50 - x)(3600 + 100x)$.

Ahora tenemos que calcular los extremos relativos de B y mirar si tiene algún máximo.

$$B'(x) = -1 \cdot (3600 + 100x) + 100 \cdot (50 - x) = 1400 - 200x \iff x = \frac{1400}{200} = 7$$

Vamos a ver si se trata de un máximo: $B''(x) = -200 \Rightarrow B''(7) < 0 \Rightarrow$ en $x = 7$ tenemos un máximo!

Respuesta Hay 7 departamentos libres, es decir 43 ocupados. Además, el precio por departamento debe ser $3600 + 100 \cdot 7 = 4300$ **euros.**. El ingreso total sería $B(7) = (50 - 7)(3600 + 100 \cdot 7) = 43 \cdot 4300 = 184900$ euros.

* *Como hemos podido observar, es importante saberse algunas de las principales propiedades geométricas de ciertas figuras planas o sólidos con volumen.*

Figura	Área	Perímetro	Volumen	Parmámetros
Triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$	$\sum_i l_i$	-	$b = base$ $h = altura$
Círculo	πr^2	$2\pi r$	-	$r = radio$
Rectángulo	$l_1 \cdot l_2$	$2l_1 + 2l_2$	-	$l_i = lado$
Cono (sólido)	$\pi rh + \pi r^2$	-	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r = \text{radio base}$ $h = altura$
Cilindro (sólido)	$2\pi r^2 + 2\pi rh$ 2 tapas + parte central	-	$\pi r^2 h$	$r = \text{radio base}$ $h = altura$

Problemas generales de optimización

1. Encontrar dos números tales que la suma de uno de ellos con el cubo del otro sea 108 y que su producto sea lo más grande posible.
2. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.
3. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.
4. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.

Optimizar el área (volúmen) de superfícies (sólidos)

1. Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio $12cm$.
   ***Indicación**: Dibujar la figura y maximizar el área en terminos de la altura h del triángulo.*
2. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?
   ***Indicación**: Poner x al radio de la base del cono.*
3. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

Optimización de rendimiento o beneficio máximo

1. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?
2. Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

   a) La producción actual de la huerta.

   b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

   c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

   d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

1. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m^3, su altura 1 m y el coste de su construcción por m^2 es de 50 € para la base; 60 para la etapa y 40 para cada pared lateral.

NOTA: La solución a estos y algunos otros ejercicios se pueden encontrar en la página web de vitutor.

Enlaces de interés – Recursos Matemáticos

Teoría y ejercicios resueltos sobre **derivación** - U.Sevilla

Problemas Resueltos de **Optimización** - Vitutor

Teoría y ejercicios sobre **derivación** y **Optimización** - UAG

"Entrega – Parcial 3" +1 Punto!

Ejercicio 1. Calcula las siguientes derivadas y simplifica siempre que se pueda. Expresa el resultado en una única fración:

$$f(x) = \frac{x^3-2x+x^2}{2} \qquad g(x) = \sqrt{5x - x^4} \qquad h(x) = 2\ln(-x+1) \qquad i(x) = 2\sin(\tfrac{x}{2})$$
$$j(x) = \sin^2(x^2+3) \qquad k(x) = \frac{1-x^4+3x}{2x} \qquad l(x) = -e^{-2x^2+4} \qquad m(x) = \arctan(x^2)$$

Ejercicio 2. Considera la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ y usa la tabla de monotonía para responder los apartados a) y b). Usa una tabla de concavidad para responder el apartado c).

a) Estudia la monotonía y expresa los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Encuentra y clasifica los extremos relativos.

c) Estudia la concavidad de la función y expresa los intervalos en donde la función es cóncava y convexa.

d) Existe algún punto de la gráfica de f que sea punto de inflexión? Si existe, calcula dicho punto.

Ejercicio 3. Una boya, formada por dos conos de hierro unidos por sus bases ha de ser construida mediante dos placas circulares de 3m de radio (*ver figura*). Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

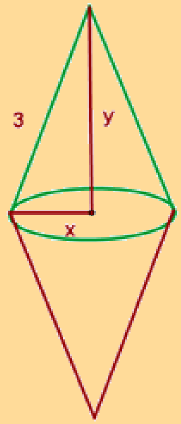

Figura.- Boya